

DOI:10.16356/j.1005-2615.2017.05.009

一种模拟不可压流的节点间断有限元-格子波尔兹曼方法

吴杰 刘琛

(南京航空航天大学机械结构力学及控制国家重点实验室,南京,210016)

摘要:基于节点间断有限元方法,本文提出了一种求解格子波尔兹曼方程(Lattice Boltzmann equation,LBE)的新方法,即节点间断有限元-格子波尔兹曼方法(Nodal discontinuous Galerkin-Lattice Boltzmann method,NDG-LBM)。在该方法中,LBE的碰撞过程和迁移过程被拆分成了两步:碰撞过程用LBM多松弛时间(Multiple relaxation time,MRT)模型进行求解,迁移过程则写成对流方程并采用节点间断有限元方法进行求解。其中,空间离散采用了非结构网格,时间离散采用了四阶、五步龙格-库塔格式。为了验证NDG-LBM的可行性,文中模拟了顶盖驱动方腔流、静止单个圆柱绕流、旋转-静止双圆柱绕流以及高雷诺数NACA0012翼型绕流。计算所得的数值结果与其他文献中的结果吻合度很好。

关键词:节点间断有限元方法;格子波尔兹曼方法;多松弛时间;对流方程

中图分类号:O3 **文献标志码:**A **文章编号:**1005-2615(2017)05-0662-07

Nodal Discontinuous Galerkin-Lattice Boltzmann Method for Simulating Incompressible Flows

WU Jie, LIU Chen

(State Key Laboratory of Mechanics and Control of Mechanical Structures, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing, 210016, China)

Abstract:Based on the nodal discontinuous Galerkin method, a new way to solve the lattice Boltzmann equation(LBE), i. e. a nodal discontinuous Galerkin-lattice Boltzmann method (NDG-LBM), is presented in this study. In this method, the collision process and streaming process in LBE are split into two sub-steps. To implement the collision process, the multi-relaxation time (MRT) model in LBM is adopted. Meanwhile, the streaming process can be converted into the advection equation, which is then solved via the the nodal discontinuous Galerkin method. Here, the space is discretized on the unstructured grids, and the time discretization is performed by using the low-storage fourth-order, five-stage Runge-Kutta scheme. To validate the current NDG-LBM, the simulations of lid-driven cavity flow, flows over a stationary circular cylinder, two rotating-stationary cylinders and a NACA0012 airfoil with high Reynolds number are carried out. By comparing the obtained numerical results with previous data in literature, the good agreement is achieved.

Key words: nodal discontinuous Galerkin method; lattice Boltzmann method; multi-relaxation time; advection equation

基金项目:中央高校基本科研业务费专项基金(NS2016017)资助项目。

收稿日期:2017-07-01;**修订日期:**2017-08-15

作者简介:吴杰,男,教授,博士生导师,国家自然科学基金优秀青年科学基金获得者,入选江苏省“六大人才高峰”。研究方向:计算流体力学数值方法、钝体流动控制与新型风力机系统等。主持国家自然科学基金、江苏省自然科学基金多项,发表SCI论文50余篇。

通信作者:吴杰,E-mail:wuj@nuaa.edu.cn。

引用格式:吴杰,刘琛.一种模拟不可压流的节点间断有限元-格子波尔兹曼方法[J].南京航空航天大学学报,2017,49(5):662-668. WU Jie, LIU Chen. Nodal discontinuous Galerkin-Lattice boltzmann method for simulating incompressible flows[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics,2017,49(5):662-668.

在过去的二十多年里,格子波尔兹曼方法(Lattice Boltzmann method, LBM)已被广泛地用于模拟研究多种流体力学问题^[1]。在历史发展的过程中,LBM是由格子气自动机(Lattice gas automata, LGA)演化而来的^[2];但随后证明,它也可以看作是波尔兹曼方程的一种特殊的离散格式^[4]。格子波尔兹曼方程(Lattice Boltzmann equation, LBE)是一种形式非常简单的代数方程,它包含两个简单的连续变化过程:迁移和碰撞。LBE中唯一的变量是粒子分布函数(Particle distribution function, PDF),通过对PDF进行求和就可以得到宏观变量。

标准LBM使用的网格必须是均匀的,而且时间步长由网格步长确定,这在很大程度限制了LBM的应用范围。究其原因是因为在波尔兹曼方程离散至LBE过程中,物理空间的离散和粒子速度空间的离散是耦合在一起完成的^[3]。但事实上,它们之间可以相互解耦^[4]。为此,可以先进行粒子速度空间的离散,从而得到离散波尔兹曼方程(Discrete Boltzmann equation, DBE)。在此基础上,使用传统的数值方法对DBE进行空间的离散求解。目前,已形成了基于有限差分、有限体积和有限元的一系列格子波尔兹曼方法(Finite difference-lattice Boltzmann method, FD-LBM^[5], Finite volume-lattice Boltzmann method, FV-LBM^[6], Finite element-lattice Boltzmann method, FE-LBM^[7]),这些方法不再受制于均匀网格而能灵活地利用各种不同的非均匀网格。

另一方面,间断有限元(Discontinuous Galerkin, DG)法^[8]近年来已开始逐步被用于求解流体力学问题。它在保留了有限元法的高精度格式的基础上,引入了有限体积法的数值通量的概念。因此,它同时拥有了这两种方法的优点。最近,DG方法也被用来求解LBE或DBE。基于改进的Dubiners三角基函数,Shi等^[9]采用DG谱单元方法求解LBE并模拟了低雷诺数($Re \leq 200$)的圆柱绕流问题。采用形状函数,Duster等^[10]在四边形单元上用DG求解DBE,同时采用一阶欧拉格式进行时间离散。Min和Lee^[11]则在四边形单元上用DG谱单元方法求解LBE。此外,他们把LBE中的碰撞过程和迁移过程分开处理,从而提高了LBM在模拟高雷诺数问题时的稳定性。虽然二维质量矩阵在他们的方法中可以对角化,但是该方法仅限于在四边形单元上使用。

基于节点间断有限元(Nodal discontinuous Galerkin, NDG)方法^[12],本文提出了一种求解LBE的新方法,即节点间断有限元-格子波尔兹曼方法(Nodal discontinuous Galerkin-lattice Boltz-

mann method, NDG-LBM)。借鉴Min和Lee^[11]的思想,LBE的碰撞过程和迁移过程被拆分成了两步。碰撞过程用LBM种的多松弛时间(Multiple relaxation time, MRT)模型^[13]进行求解,而迁移过程则可以写成对流方程并采用NDG方法进行求解。其中,空间离散采用了非结构网格,时间离散采用了四阶、五步龙格-库塔格式。本文介绍了LBM中的MRT模型和NDG-LBM并给出了采用该方法模拟顶盖方腔驱动流、静止单个圆柱绕流、旋转-静止双圆柱绕流以及高雷诺数NACA0012翼型绕流的计算结果及相应的分析。

1 数值方法

1.1 格子波尔兹曼方程

对于二维黏性不可压流,可以用格子波尔兹曼方程表示

$$f_a(\mathbf{x} + \mathbf{e}_a \delta t, t + \delta t) = f_a(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{\tau} [f_a(\mathbf{x}, t) - f_a^{\text{eq}}(\mathbf{x}, t)] \quad (1)$$

式中: f_a 为密度分布函数; f_a^{eq} 为其相应的平衡状态; τ 为单松弛时间系数; \mathbf{e}_a 为粒子速度; t 为时间; δt 为时间步长; \mathbf{x} 为位置;在本文的数值模拟中,采用的是D2Q9粒子速度模型,所以粒子速度 \mathbf{e}_a 为

$$\mathbf{e}_a = \begin{cases} (0, 0) & \alpha = 0 \\ (\pm 1, 0), (0, \pm 1) & \alpha = 1 \sim 4 \\ (\pm 1, \pm 1) & \alpha = 5 \sim 8 \end{cases} \quad (2)$$

平衡分布函数为

$$f_a^{\text{eq}}(\mathbf{x}, t) = \rho \omega_a \left[1 + \frac{\mathbf{e}_a \cdot \mathbf{u}}{c_s^2} + \frac{(\mathbf{e}_a \cdot \mathbf{u})^2 - (c_s |\mathbf{u}|)^2}{2c_s^4} \right] \quad (3)$$

式中: ρ 为密度; c_s 为LBM中的声速; $c_s^2 = \frac{1}{3}$; ω_a 为权系数, $\omega_0 = \frac{4}{9}$, $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = \frac{1}{9}$, $\omega_5 = \omega_6 = \omega_7 = \omega_8 = \frac{1}{36}$ 。

当LBM采用单松弛时间(Single relaxation time, SRT)模型,数值模拟在某些情况下会变得不稳定。为了克服这个困难,Lallemand和Luo^[13]采用的方法是把不同的物理量如动量、能量等在动量空间分开处理,使用不同的松弛时间系数使它们各自松弛到相应的平衡状态。因此,本文引入了多松弛时间模型以提高计算稳定性,进而保证计算的准确性,式(1)则可改写为

$$f_a(\mathbf{x} + \mathbf{e}_a \delta t, t + \delta t) = f_a(\mathbf{x}, t) - \mathbf{M}^{-1} \mathbf{S} [\mathbf{R}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{R}^{\text{eq}}(\mathbf{x}, t)] \quad (4)$$

式中: \mathbf{R} 为 f_a 在动量空间上的一组物理量, \mathbf{R}^{eq} 为其相应的平衡态,它们的表达式为

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \{\rho, e, \epsilon, j_x, q_x, j_y, q_y, p_{xx}, p_{xy}\}^T \\ \mathbf{R}^{\text{eq}} &= \{0, e^{\text{eq}}, \epsilon^{\text{eq}}, 0, q_x^{\text{eq}}, 0, q_y^{\text{eq}}, p_{xx}^{\text{eq}}, p_{xy}^{\text{eq}}\}^T \quad (5a) \\ e^{\text{eq}} &= -2\rho + 3(j_x^2 + j_y^2) / \rho \\ \epsilon^{\text{eq}} &= \rho - 3(j_x^2 + j_y^2) / \rho \\ q_x^{\text{eq}} &= -j_x, q_y^{\text{eq}} = -j_y \\ p_{xx}^{\text{eq}} &= (j_x^2 - j_y^2) / \rho, p_{xy}^{\text{eq}} = j_x j_y / \rho \quad (5b) \end{aligned}$$

式中:在 \mathbf{R} 空间中, ρ 为密度, e 为能量, ϵ 为能量的平方, j_x 和 j_y 分别为 x 和 y 方向的动量分量(ρu 和 ρv), q_x 和 q_y 分别为相应的能量通量, p_{xx} 和 p_{xy} 则为应力张量, \mathbf{M} 为把 f_a 转化到 \mathbf{R} 空间的相应的转化矩阵

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & -1 & -1 & -1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & -2 & -2 & -2 & -2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

此外, \mathbf{S} 是一个非负的对角矩阵, $\mathbf{S} = \text{diag}(0, s_1, s_2, 0, s_4, 0, s_6, s_7, s_8)$, 其值可以通过线性稳定性分析获得^[13]。在本文的模拟中, 这些值分别取为 $s_1 = 1.6, s_2 = 1.4, s_4 = s_6 = 1.2, s_7 = s_8 = 1/\tau$ 。其中 $\tau = \nu / (c_s^2 \delta t) + 0.5$, ν 为流体运动黏度。

LBE 包含两个过程:碰撞过程和迁移过程。它们在实际求解时可以分开来处理, 即

碰撞过程

$$\tilde{f}_a(\mathbf{x}, t) = f_a(\mathbf{x}, t) - \mathbf{M}^{-1} \mathbf{S} [\mathbf{R}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{R}^{\text{eq}}(\mathbf{x}, t)] \quad (6a)$$

迁移过程

$$f_a(\mathbf{x} + \mathbf{e}_a \delta t, t + \delta t) = \tilde{f}_a(\mathbf{x}, t) \quad (6b)$$

方程式(6b)实际上是对流方程的数值离散表达式。为了保持计算的稳定性, 它要求采用均匀的直角网格并且 CFL 数必须为 1。为了消除这些限制, 可以把迁移过程还原为对流方程

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} + (\mathbf{e}_a \cdot \nabla) f_a = 0 \quad (7)$$

随后, 可以采用不同的数值方法来求解方程式(7)。本文采用的方法是节点间断有限元法。

1.2 节点间断有限元方法

如果定义通量 $\mathbf{F}_a(f) = \mathbf{e}_a f_a$, 方程式(7)则可改写为

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}_a(f) = 0 \quad (8)$$

与所有的有限元方法一样, 可以把计算区域 Ω 离散成一些不重叠的子区域 Ω^k (或称之为单元)。因

此有 $\cup_{k=1}^K \Omega^k = \Omega$, 其中 K 为单元的总个数。对方程式(8)与局部测试函数 φ 进行内积, 则可得到

$$\int_{\Omega^k} \left[\frac{\partial f_a}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}_a(f) \right] \varphi d\Omega = 0 \quad (9)$$

对式(9)中的通量项进行部分积分, 则有

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^k} \frac{\partial f_a}{\partial t} \varphi d\Omega - \int_{\Omega^k} \mathbf{F}_a(f) \cdot \nabla \varphi d\Omega = \\ - \int_{\Gamma^k} \varphi \mathbf{n} \cdot \mathbf{F}_a(f) d\Gamma \quad (10) \end{aligned}$$

式中: Γ^k 为单元 Ω^k 的边界, \mathbf{n} 为边界的单元外法向量。在 DG 中, 两个相邻单元的界面上 f_a 的值可以是不连续的。这样, 可以定义 f_a^- 为当前单元的界面上的值而 f_a^+ 为相邻单元的界面上的值。因此, 可以定义数值通量 $\mathbf{F}_a^*(f) = \mathbf{F}_a^*(f^-, f^+)$, 并用其表示相邻单元界面上的通量。方程式(10)可写为

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^k} \frac{\partial f_a}{\partial t} \varphi d\Omega - \int_{\Omega^k} \mathbf{F}_a(f) \cdot \nabla \varphi d\Omega = \\ - \int_{\Gamma^k} \varphi \mathbf{n} \cdot \mathbf{F}_a^*(f) d\Gamma \quad (11) \end{aligned}$$

对式(11)再次进行部分积分, 则有

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^k} \left[\frac{\partial f_a}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}_a(f) \right] \varphi d\Omega = \\ \int_{\Gamma^k} \varphi \mathbf{n} \cdot [\mathbf{F}_a(f) - \mathbf{F}_a^*(f)] d\Gamma \quad (12) \end{aligned}$$

式(12)就是本文用来处理 LBM 中迁移过程的基本方程。

目前, 已有了若干种不同的数值通量格式。本文采用考虑了逆风影响的 Lax-Friedrichs 格式, 即

$$\mathbf{F}_a^*(f^-, f^+) = \frac{1}{2} \left[\mathbf{F}_a(f^-) + \mathbf{F}_a(f^+) + \frac{|\Lambda|}{|\mathbf{e}_a|} (f_a^- - f_a^+) \mathbf{n} \right] \quad (13)$$

式中: $\Lambda = \max(\mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial f}) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_a$ 。因此, 方程式(12)右边项中的点积项可写为

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{F}_a - \mathbf{F}_a^*) = \frac{1}{2} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_a - |\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_a|) (f_a^- - f_a^+) = \\ \begin{cases} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_a) (f_a^- - f_a^+) & \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_a < 0 \\ 0 & \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_a \geq 0 \end{cases} \quad (14) \end{aligned}$$

在 NDG^[16] 中, f_a 在每个单元 Ω^k 内可以近似地表示为

$$\begin{aligned} f_a^k(\mathbf{x}, t) \approx \tilde{f}_a^k(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=1}^{N_p} \tilde{f}_{a,n}^k(t) \psi_n(\mathbf{x}) = \\ \sum_{n=1}^{N_p} \tilde{f}_a^k(\mathbf{x}_n, t) \ell_n^k(\mathbf{x}) \quad (15) \end{aligned}$$

式中: $\tilde{f}_a^k(\mathbf{x}, t)$ 为 $f_a^k(\mathbf{x}, t)$ 的局部近似解。它既可以用包含 N 阶局部多项式基 $\psi_n(\mathbf{x})$ 的模式形式表示, 也可以用基于 N 阶拉格朗日插值多项式 $\ell_n^k(\mathbf{x})$ 的节点形式表示, 这两种形式之间可以通过系数 $\tilde{f}_{a,n}^k(t)$ 来建立联系。而 $\tilde{f}_a^k(\mathbf{x}_n, t)$ 为单元 Ω^k

内变量在节点上的值, N_p 则表示单元 Ω^k 内节点的个数。在本文研究中,采用的是三角形单元,所以 N_p 与多项式基的阶数 N 之间的关系为 $N_p = (N+1)(N+2)/2$ 。

用来离散计算区域的三角形 Ω^k 通常没有固定的形状,为了便于生成三角形单元内的节点,可以把普通三角形 $\Omega^k = \{x = (x, y)\}$ 转化成标准三角形 $I = \{r = (r, s) \mid r, s \geq -1; r + s \leq 0\}$, 如图1所示。

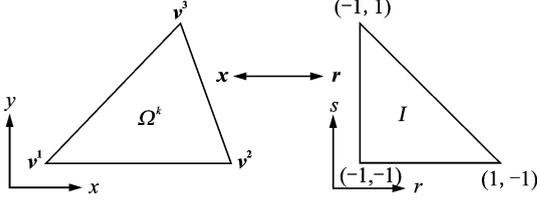


图1 普通三角形 Ω^k 和标准三角形 I 之间的关系

Fig.1 Relationship between general triangle Ω^k and stand-ard triangle I

因此,它们之间的关系为^[16]

$$\mathbf{x} = -\frac{r+s}{2}\mathbf{v}^1 + \frac{r+1}{2}\mathbf{v}^2 + \frac{s+1}{2}\mathbf{v}^3 \quad (16)$$

式中: $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2$ 和 \mathbf{v}^3 为三角形顶点的向量,它们以逆时针方向排序。有如下等式

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_r & x_s \\ y_r & y_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_x & r_y \\ s_x & s_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

可知

$$r_x = \frac{y_s}{J}, r_y = -\frac{x_s}{J}, s_x = -\frac{y_r}{J}, s_y = \frac{x_r}{J} \quad (18)$$

式中: J 为雅克比行列式 $J = x_r y_s - x_s y_r$ 。而从方程式(16)可知

$$(x_r, y_r) = \mathbf{x}_r = \frac{\mathbf{v}^2 - \mathbf{v}^1}{2}, (x_s, y_s) = \mathbf{x}_s = \frac{\mathbf{v}^3 - \mathbf{v}^1}{2} \quad (19)$$

通过上述关系式,可以在标准三角形单元内生成节点用以构造拉格朗日插值多项式,详细过程可见参考文献[12]。

最后,方程式(12)用 NDG 进行空间离散可得

$$\mathbf{M}^k \frac{d\mathbf{f}_a^k}{dt} + \mathbf{S}_a^k \mathbf{f}_a^k = \mathbf{R}_a^k \quad (20)$$

式中: $\mathbf{f}_a^k = [\hat{f}_a^k]_n (n = 1, \dots, N_p)$ 为解向量。质量矩阵 \mathbf{M}^k 、刚度矩阵 \mathbf{S}_a^k 和右边项矩阵 \mathbf{R}_a^k 中的元素为

$$[\mathbf{M}^k]_{mn} = \int_I \ell_m(\mathbf{r}) \ell_n(\mathbf{r}) J^k d\mathbf{r} \quad m, n = 1, \dots, N_p \quad (21a)$$

$$[\mathbf{S}_a^k]_{mn} = \int_I \mathbf{e}_a \cdot \frac{\partial \ell_m(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \ell_n(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{x}} J^k d\mathbf{r} \quad m, n = 1, \dots, N_p \quad (21b)$$

$$[\mathbf{R}_a^k]_{mn} =$$

$$\int_{\partial I} \frac{1}{2} (\mathbf{e}_a \cdot \mathbf{n} - |\mathbf{e}_a \cdot \mathbf{n}|) (\hat{f}_a^- - \hat{f}_a^+) \ell_m(\mathbf{r}) \ell_n(\mathbf{r}) J_s^k d\mathbf{r}$$

$$m, n = 1, \dots, N_p \quad (21c)$$

式中: J^k 和 J_s^k 分别为单元内部和单元边界的映射雅克比行列式, ∂I 为标准三角形 I 的边界。

1.3 龙格-库塔时间离散格式

对于空间离散后的 NDG 方程式(20),可以进一步采用龙格-库塔格式进行时间离散。因此,先在方程两边乘以 \mathbf{M}^k 的逆矩阵

$$\frac{d\mathbf{f}_a^k}{dt} = -\mathbf{M}^{k-1} \mathbf{S}_a^k \mathbf{f}_a^k + \mathbf{M}^{k-1} \mathbf{R}_a^k = \mathcal{L}(\mathbf{f}_a^k) \quad (22)$$

应用四阶、五步龙格-库塔格式对式(22)进行时间离散

$$j = 1, \dots, 5: \begin{cases} \mathbf{p}^{(0)} = \mathbf{f}_a^{(n)} \\ \mathbf{k}^{(j)} = a_j \mathbf{k}^{(j-1)} + \delta t \mathcal{L}(\mathbf{p}^{(j-1)}), \\ t^{(n)} + c_j \delta t \\ \mathbf{p}^{(j)} = \mathbf{p}^{(j-1)} + b_j \mathbf{k}^{(j)} \\ \mathbf{f}_a^{(n+1)} = \mathbf{p}^{(5)} \end{cases} \quad (23)$$

式中: a_j, b_j 和 c_j 为给定的常数。关于四阶、五步龙格-库塔格式的更多细节可见参考文献[12]。

1.4 边界条件

与传统的 LBM 一样,本文的 NDG-LBM 也需要根据边界条件来求解边界上未知的粒子分布函数(\hat{f}_a^+)。本文考虑的边界是进口/出口和固壁,相应的边界条件为

进口/出口

$$\hat{f}_a^+ = \hat{f}_a^- \quad \mathbf{e}_a \cdot \mathbf{n} > 0 \quad (24a)$$

$$\hat{f}_a^+ = \hat{f}_a^{\text{eq}}(\rho_0, \mathbf{u}_0) \quad \mathbf{e}_a \cdot \mathbf{n} > 0$$

固壁

$$\hat{f}_a^+ = \hat{f}_a^- \quad \mathbf{e}_a \cdot \mathbf{n} > 0$$

$$\hat{f}_a^+ = \hat{f}_a^- + 2\tau \omega_a \rho_0 (\mathbf{e}_a \cdot \mathbf{u}_0) / c_s^2 \quad \mathbf{e}_a \cdot \mathbf{n} < 0 \quad (24b)$$

式中: ρ_0 和 \mathbf{u}_0 分别是边界上的密度和速度, \hat{f}_a^- 为 \hat{f}_a^+ 相反方向的粒子分布函数。

2 计算结果和分析

2.1 顶盖驱动方腔流

为了验证本文的 NDG-LBM,首先模拟了不同雷诺数下的顶盖驱动方腔流。对于该问题,雷诺数定义为 $Re = UL/\nu$ 。其中, U 为顶盖驱动速度, L 为方腔的边长, ν 为动力黏性系数计算区域用 1 848 个三角形单元进行离散,如图 2 所示,插值多项式的阶数为 $N=3$ 。

图 3 给出了 $Re=100, 400, 1\ 000$ 和 $5\ 000$ 时的流线图。从图中可知,随着雷诺数的增加,主涡逐渐向方腔中心移动,左下角和右下角的两个次涡逐渐增大。当 $Re=5\ 000$ 时,左上角还出现了第 3 个次涡,同时右下角出现了一个尺寸更小的涡。

为了验证本文 NDG-LBM 的准确性,图 4 给

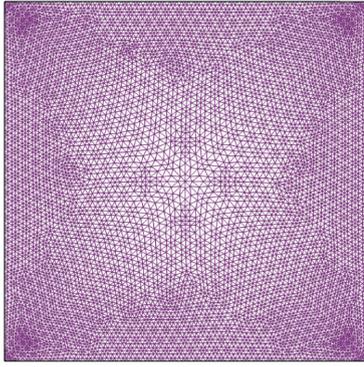


图 2 顶盖方腔驱动流的包含 1 848 个三角形单元的非结构网格

Fig. 2 Unstructured mesh with 1 848 triangular elements for lid-driven cavity flow

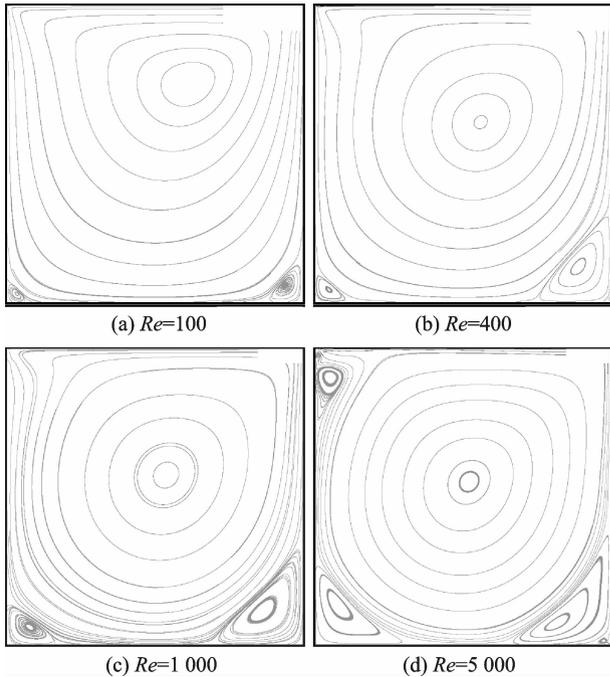


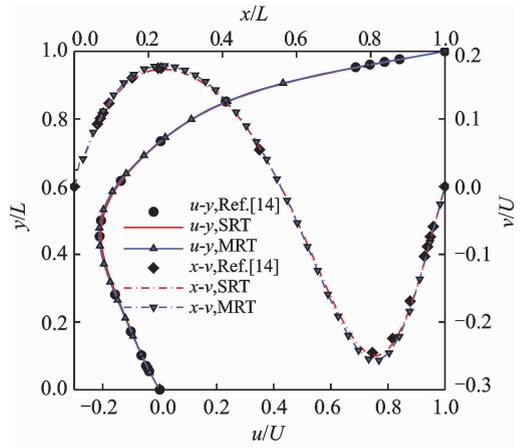
图 3 顶盖方腔驱动流在 $Re=100, 400, 1\ 000$ 和 $5\ 000$ 时的流线图

Fig. 3 Streamlines of lid-driven cavity flow at $Re=100, 400, 1\ 000$ and $5\ 000$

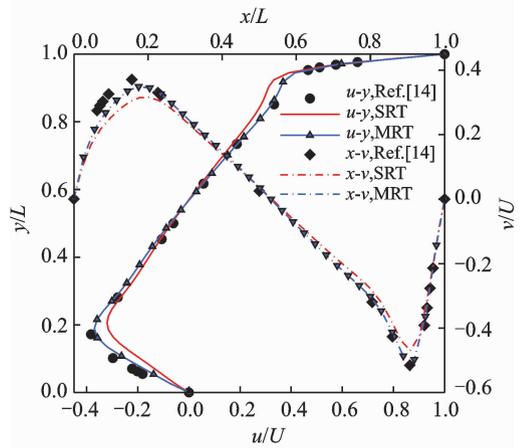
出了 $Re=100$ 和 $1\ 000$ 时中线上的速度型并与 Ghia 等^[14]的结果进行比较。图中, u, v 为速度分量; x, y 为中线坐标。从图中可知, 本文的结果与文献中的结果符合得很好。特别地, 当 $Re=1\ 000$ 时采用 MRT 获得的结果相比于 SRT 更接近文献中的结果。这说明 MRT 能有效地确保高雷诺数流动模拟的准确性。

2.2 静止单个圆柱绕流

为了进一步验证 NDG-LBM, 本文还模拟了静止单个圆柱的绕流问题。对于此问题, 雷诺数定义为 $Re = UD/\nu$ 。其中, U 为自由来流速度, D 为圆柱直径, ν 为动力黏性系数。计算区域用 2 944 个



(a) $Re=100$



(b) $Re=1\ 000$

图 4 $Re=100$ 和 $1\ 000$ 时中线上的速度型比较

Fig. 4 Comparison of centerline velocity profiles at $Re=100$ and $1\ 000$

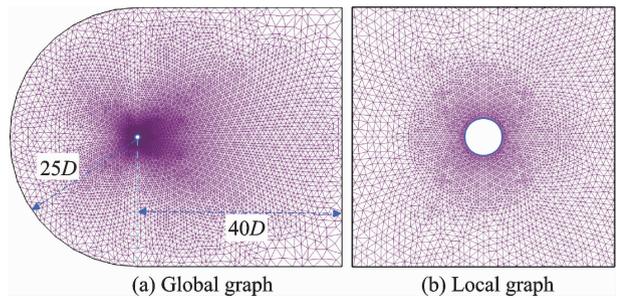


图 5 静止单个圆柱绕流的包含 2 944 个三角形单元的非结构网格

Fig. 5 Unstructured grids with 2 944 triangular elements for flow over stationary circular cylinder

三角形单元进行离散, 如图 5 所示, 插值多项式的阶数仍取 $N=3$ 。

本文模拟了 $Re=100$ 和 200 时的非定常流动。表 1 给出了 $Re=100$ 时的平均阻力系数 \bar{C}_d 、最大升力幅值 ΔC_l 和无量纲涡脱落频率 St 的计算结果, 并与文献[15~17]中的结果进行了比较。由表 1 可见, 当前的计算结果与文献中的结果符合得很好。这再次证明了本文方法的可靠性。图 6 给出了 $Re=100$ 和 200 时流动达到周期性变化后的流

线和瞬时涡量云图。从图中可以看到清晰的卡门涡街现象。

表 1 静止单个圆柱绕流在 $Re=100$ 时的结果比较

Tab. 1 Comparison of results for flow over stationary circular cylinder at $Re=100$

参数	\bar{C}_d	ΔC_l	St
Ref. [15]	1.760	—	0.180
Ref. [16]	1.330	0.320	0.165
Ref. [17]	1.447	0.330	—
本文	1.414	0.352	0.167

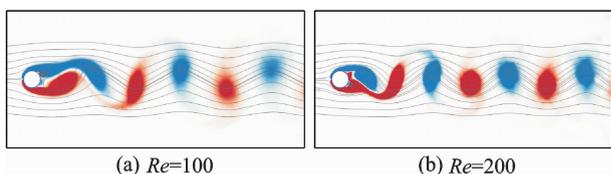


图 6 静止单个圆柱绕流的流线和瞬时涡量云图

Fig. 6 Streamlines and instantaneous vorticity contours for flow over stationary circular cylinder

2.3 旋转-静止双圆柱绕流

为了进一步检验 NDG-LBM 并展示其处理复杂问题的能力,本文还模拟了 $Re=150$ 时双圆柱的绕流问题。其中两个圆柱前后放置,它们的大小一致(直径为 D),它们之间的距离为 L ,同时前圆柱作旋转运动而后圆柱静止,如图 7 所示。计算区域用 3 962 个三角形单元进行离散,区域大小与单圆柱问题一样。旋转圆柱的角速度变化为

$$\omega(t) = \omega_0 \sin(2\pi ft) \quad (25)$$

式中: ω_0 为角速度幅值, f 为无量纲转动频率。在本文的模拟中,它们的取值分别为 $\omega_0 = 2, 3$ 和 $f = 0.1, 0.2$ 。此外,圆柱之间的距离为 $L = 2.5D$ 和 $3.5D$ 。

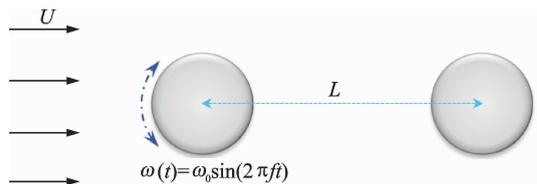


图 7 旋转-静止圆柱绕流示意图

Fig. 7 Sketch of flow over rotating-stationary circular cylinders

图 8 给出了不同参数下的涡量云图。从图中可知,前圆柱的旋转运动显著地改变后圆柱的涡脱落过程。其中,圆柱之间的距离 L 和圆柱的转动频率 f 对后圆柱的涡脱落影响较小。然而,随着旋转幅度 ω_0 的增大,后圆柱的涡脱落形态从交替分布逐渐转变成上下分布。

2.4 NACA0012 翼型绕流

为了进一步展示 NDG-LBM 处理高雷诺数问

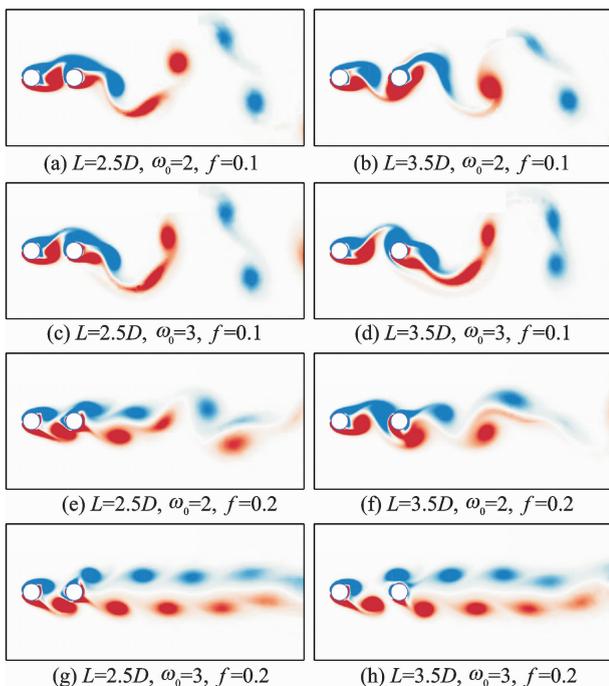


图 8 旋转-静止圆柱绕流的瞬时涡量云图

Fig. 8 Instantaneous vorticity contours for flow over rotating-stationary circular cylinders

题的能力,本文还模拟了 $Re=5\ 000$ 时 NACA0012 翼型的绕流问题,其中来流迎角为 10° 。

图 9 给出了流动达到稳定以后的流线和涡量云图。从图中可知,翼型后缘的上表面附近存在回流区,同时流场中出现了典型的涡脱落现象。

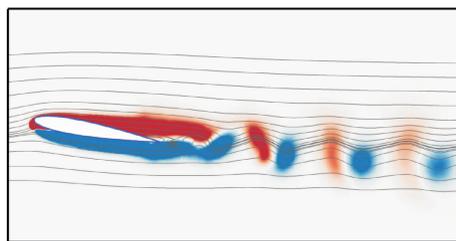


图 9 NACA0012 翼型绕流的流线和瞬时涡量云图

Fig. 9 Streamlines and instantaneous vorticity contours for flow over NACA0012 airfoil

3 结束语

本文基于节点间断有限元方法,提出了另一种求解格子波尔兹曼方程的方法,即 NDG-LBM。该方法首先把 LBE 的碰撞过程和迁移过程拆成两步。其中碰撞过程用 LBM 中的多松弛时间模型进行求解,而迁移过程则还原成对流方程。然后采用 NDG 方法求解该对流方程,其中采用非结构网格进行空间离散,采用四阶、五步龙格-库塔格式进行时间离散。最后应用该方法模拟了顶盖方腔驱动流、静止单个圆柱绕流、旋转-静止双圆柱绕流以及高雷诺数 NACA0012 翼型绕流。计算所得的结

果与文献中的结果很吻合,有效地验证了本文NDG-LBM的准确性和可靠性。

参考文献:

- [1] AIDUN C K, CLAUSEN J R. Lattice-Boltzmann method for complex flows [J]. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 2010, 42: 439-472.
- [2] McNAMARA G R, ZANETTI G. Use of the Boltzmann equation to simulate lattice-gas automata [J]. *Physical Review Letters*, 1988, 61(20): 2332-2335.
- [3] HE X, LUO L S. Theory of the lattice Boltzmann method: From the Boltzmann equation to the lattice Boltzmann equation [J]. *Physical Review E*, 1997, 56(6): 6811-6817.
- [4] ABE T. Derivation of the lattice Boltzmann method by means of the discrete ordinate method for the Boltzmann equation [J]. *Journal of Computational Physics*, 1997, 131(1): 241-246.
- [5] MEI R, SHYY W. On the finite difference-based lattice Boltzmann method in curvilinear coordinates [J]. *Journal of Computational Physics*, 1998, 143(2): 426-448.
- [6] XI H, PENG G, CHOU S H. Finite-volume lattice Boltzmann method [J]. *Physical Review E*, 1999, 59(5): 6202-6205.
- [7] LEE T, LIN C L. A characteristic Galerkin method for discrete Boltzmann equation [J]. *Journal of Computational Physics*, 2001, 171(1): 336-356.
- [8] COCKBURN B, SHU C W. Runge-Kutta discontinuous Galerkin methods for convection-dominated problems [J]. *Journal of Scientific Computing*, 2001, 16(3): 173-261.
- [9] SHI X, LIN J, YU Z. Discontinuous Galerkin spectral element lattice Boltzmann method on triangular element [J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2003, 42(11): 1249-1261.
- [10] DUSTER A, DEMKOWICZ L, RANK E. High-order finite elements applied to the discrete Boltzmann equation [J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2006, 67(8): 1094-1121.
- [11] MIN M, LEE T. A spectral-element discontinuous Galerkin lattice Boltzmann method for nearly incompressible flows [J]. *Journal of Computational Physics*, 2011, 230(1): 245-259.
- [12] HESTHAVEN J S, WARBURTON T. Nodal discontinuous Galerkin methods: Algorithms, analysis, and applications [M]. New York: Springer-Verlag, 2008.
- [13] LALLEMAND P, LUO L S. Theory of the lattice Boltzmann method: Dispersion, dissipation, isotropy, Galilean invariance, and stability [J]. *Physical Review E*, 2000, 61(6): 6546-6562.
- [14] GHIA U, GHIA K, SHIN C. High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method [J]. *Journal of Computational Physics*, 1982, 48(3): 387-411.
- [15] GRESHO P M, CHAN S T, LEE R L, et al. A modified finite element method for solving the time-dependent, incompressible Navier-Stokes equations. Part 2: Applications [J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 1984, 4(7): 619-640.
- [16] KANG S. Characteristics of flow over two circular cylinders in a side-by-side arrangement at low Reynolds numbers [J]. *Physics of Fluids*, 2003, 15(9): 2486-2498.
- [17] LAI M C, PESKIN C S. An immersed boundary method with formal second-order accuracy and reduced numerical viscosity [J]. *Journal of Computational Physics*, 2000, 160(2): 705-719.

