第 49 卷第 5 期 南京航空航天大学学报 Vol. 49 No. 5
2017 年 10 月 Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics Oct. 2017

DOI:10.16356/j.1005-2615.2017.05.003

基于测量试验数据修正有限元模型质量矩阵

戴 华 魏 伟
(南京航空航天大学理学院，南京，210016)

摘要:对无阻尼结构系统有限元模型质量矩阵修正问题,以该矩阵修正量的 F-范数为目标函数,并以待修正质量矩阵应具有的性质,如满足正交关系,对称性,半正定性和稀疏性作为约束条件,数学上形成带约束的矩阵最佳逼近问题。给出了问题有解的条件,基于循环投影方法,提出了求解矩阵最佳逼近问题的数值方法。数值结果说明了所给方法的有效性。

关键词:无阻尼结构系统;模型修正;矩阵最佳逼近问题;投影方法
中图分类号:O327;TB123 **文献标志码**:A 1005-2615(2017)05-0606-06

Mass Matrix Correction of Finite Element Model Using Measured Test Data

DAI Hua, *WEI Wei*
(College of Science, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing, 210016, China)

Abstract: For problem of correcting mass matrix of finite element model of undamped structural systems, the desired mass matrix properties, including orthogonality relation, symmetry, positive semi-definiteness and sparsity, are imposed as side constraints to form mathematically the optimal matrix approximation problems. The solvability conditions for the problems are presented. Based on the cyclic projection method, numerical methods are proposed for solving the matrix nearness problems. Numerical results show that the proposed methods are efficient.

Key words: undamped structural system; model updating; matrix nearness problem; projection method

振动对于航空、航天、船舶、机械、电子、大型桥梁等许多工程结构常常是造成恶性破坏的直接原因。因此,在大型结构设计中,振动设计与控制是至关重要的。对工程结构进行定量、准确的动力学分析,解决工程结构中普遍存在的振动问题,首先必须建立结构的动力学模型。有限元方法具有分析速度快、设计周期短、与结构试验相比成本低等优点,已成为结构动力系统建模最常用、最有效的方法之一。由有限元方法可建立无阻尼结构系统的运动微分方程

$$\boldsymbol{M}_a\ddot{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{K}_a\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{f}(t)$$

式中:$\boldsymbol{x}(t)\in\boldsymbol{R}^n$ 为位移向量;n 为有限元模型的自由度;$\boldsymbol{M}_a,\boldsymbol{K}_a\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$ 分别为系统有限元模型的质量和刚度矩阵;$\boldsymbol{f}(t)\in\boldsymbol{R}^n$ 为载荷向量。通常,有限元模型的质量和刚度矩阵都是对称半正定矩阵,并且具有稀疏结构。结构系统的固有频率 ω 或特征值 $\lambda(\lambda=\omega^2)$ 以及相应的振型或特征向量 $\boldsymbol{x}$ 由如下特征方程确定

$$\boldsymbol{K}_a\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{M}_a\boldsymbol{x} \tag{1}$$

应用特征值问题的数值方法[1],可求得广义特征值问题(1)的特征值 $\lambda_i^{(a)}$ 和相应的特征向量 $\boldsymbol{x}_i^{(a)}$ 。

随着试验模态分析技术、信号处理和动态测试

基金项目:国家自然科学基金(11571171)资助项目。
收稿日期:2017-07-01;**修订日期**:2017-08-15
作者简介:戴华,男,教授,博士生导师,全国优秀教师,享受政府特殊津贴。研究方向:计算数学、一般力学与力学基础等。承担国家自然科学基金项目 5 项,江苏省自然科学基金项目 3 项,发表论文 190 余篇,出版专著 2 部。
通信作者:戴华,E-mail: hdai@nuaa.edu.cn。

引用格式:戴华,魏伟.基于测量试验数据修正有限元模型质量矩阵[J].南京航空航天大学学报,2017,49(5):606-611. DAI Hua, WEI Wei. Mass matrix correction of finite element model using measured test data[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics,2017,49(5):606-611.

技术的发展,由振动试验可获得实际结构系统的一些低阶频率 $\omega_i^{(e)}(i=1,2,\cdots,m\leqslant n)$,即特征值 $\lambda_i^{(e)}=(\omega_i^{(e)})^2$ 以及相应的振型 $x_i^{(e)}$。由于实际结构的复杂性,有限元方法必须对结构的边界条件、连接条件和约束条件进行简化处理,还必须对结构的几何特性做一些假设,因而有限元方法所建立的结构有限元模型往往不能准确地反映实际结构的动态特性,有限元模型的计算结果 $\lambda_i^{(a)}$ 和 $\boldsymbol{x}_i^{(a)}$ 与实测结果 $\lambda_i^{(e)}$ 和 $\boldsymbol{x}_i^{(e)}$ 之间存在着误差。另一方面,受试验条件和成本的限制,实测信息的不完整导致试验建模无法获得完备的数学模型。有限元模型修正就是将有限元建模和试验建模结合起来,先用有限元方法建立结构的有限元模型,然后依据系统动态特性的试验测量数据修正有限元模型,使得修正后结构模型的低阶动态特性参数与试验值趋于一致,并且使有限元模型在保持拓扑结构的同时改变量尽可能小。数学上,有限元模型修正问题归结为求矩阵,使其满足低阶动态特性、保持物理和结构性质的同时,并使矩阵的改变量达到最小。修正的有限元动力学模型可用于结构响应分析和控制。

四十多年来,结构有限元模型修正的理论和方法取得了许多成果[2-3],并且在工程实际中得到了重要应用[4-5]。因为有限元模型质量和刚度矩阵是实际结构的较好近似,所以最早发展并被广泛使用的有限元模型修正方法是以系统矩阵或矩阵元素为修正对象的矩阵型和元素型修正方法。Berman 等[6-7]利用测量的部分振型修正质量矩阵 $\boldsymbol{M}$,要求修正的质量矩阵 $\boldsymbol{M}$ 满足对称性 $\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{M}$ 和正交性条件 $\boldsymbol{X}_e^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{X}_e=\boldsymbol{I}_m$,并使质量矩阵的改变量最小,应用 Lagrange 乘子法,导出了修正质量矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的表达式。Zhang 和 Lee 等[8-9]分别利用矩阵变换和 Moore- Penrose 广义逆给出了修正质量矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的显式表示。但这些方法修正的质量矩阵 $\boldsymbol{M}$ 不仅改变了解析质量矩阵 $\boldsymbol{M}_a$ 的带状或稀疏结构,而且未必是半正定的。为保持修正质量矩阵的稀疏结构,Wei 和 Zhang[10], Cha[11]以质量矩阵的待修正元素为对象,发展了修正质量矩阵的元素型修正方法。Yuan 和 Dai[12]考虑了解析质量矩阵的一个主子矩阵准确、修正其余元素的问题,利用广义奇异值分解给出了修正质量矩阵的表达式。这类方法具有灵活、方便等特点,但难以保证修正质量矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的半正定性。

为了保证修正的质量矩阵既满足对称半正定性,又具有稀疏结构,本文以质量矩阵改变量的 F-范数为目标函数,并以待修正质量矩阵应具有的性质,如满足正交关系或特征方程,对称性,半正定性和稀疏性作为约束条件,数学上将问题归结为带约束的矩阵最佳逼近问题。应用矩阵的 QR 分解,给出了该问题有解的条件。基于循环投影方法[13],提出了求解这类问题的数值方法,提供了两个数值例子以说明所给方法的有效性。

为了表述方便,对使用的记号作如下说明:$\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})$ 和 $\boldsymbol{A}^+$ 分别表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩和 Moore-Penrose 广义逆。对 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\boldsymbol{R}^{m\times n}$,$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})$ 和 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 分别表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的内积和 Hadamard 积,基于此内积,$\boldsymbol{R}^{m\times n}$ 构成 Hilbert 空间,并且由此内积导出的长度即为矩阵的 F-范数 $\|*\|_{\mathrm{F}}$。$\boldsymbol{SR}^{n\times n}$ 表示 n 阶实对称矩阵的全体,$\boldsymbol{SR}_0^{n\times n}$ 表示 n 阶对称半正定矩阵的集合,$\boldsymbol{OR}^{n\times n}$ 表示 n 阶正交矩阵的全体。对 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{SR}^{n\times n}$,$\boldsymbol{A}\geqslant 0$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 为实对称半正定矩阵。$\mathrm{sparse}(\boldsymbol{M})=\mathrm{sparse}(\boldsymbol{M}_a)$ 表示矩阵 $\boldsymbol{M}$ 和 $\boldsymbol{M}_a$ 具有相同的稀疏结构。$\boldsymbol{I}_n$ 表示 n 阶单位矩阵。记 $\boldsymbol{\Lambda}_e=\mathrm{diag}(\lambda_1^{(e)},\cdots,\lambda_m^{(e)})$,$\boldsymbol{X}_e=[x_1^{(e)},\cdots,x_m^{(e)}]$,并设 $\boldsymbol{\Lambda}_e>0$,$\mathrm{rank}(\boldsymbol{X}_e)=m$,$\boldsymbol{M}_a=(m_{aij})$,$\boldsymbol{K}_a=(k_{aij})\in\boldsymbol{SR}_0^{n\times n}$,并且 $\boldsymbol{M}_a$ 正定。

1　利用正交关系修正质量矩阵

为了使修正质量矩阵 $\boldsymbol{M}$ 既满足如下正交性条件

$$\boldsymbol{X}_e^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{X}_e=\boldsymbol{I}_m \tag{2}$$

又是对称半正定的,并保持稀疏结构,本文将修正质量矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的问题归结为如下带约束的矩阵逼近问题

$$\begin{gathered}\min\frac{1}{2}\|\boldsymbol{M}-\boldsymbol{M}_a\|_{\mathrm{F}}^2\\ \mathrm{s.t.}\ \ \boldsymbol{X}_e^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{X}_e=\boldsymbol{I}_m,\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{M}\geqslant 0\\ \mathrm{sparse}(\boldsymbol{M})=\mathrm{sparse}(\boldsymbol{M}_a)\end{gathered} \tag{3}$$

设测量的振型矩阵 $\boldsymbol{X}_e$ 的 $\boldsymbol{QR}$ 分解为

$$\boldsymbol{X}_e=\boldsymbol{Q}\begin{pmatrix}\boldsymbol{R}\\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix} \tag{4}$$

式中:$\boldsymbol{Q}=[\boldsymbol{Q}_1,\boldsymbol{Q}_2]\in\boldsymbol{OR}^{n\times n}$,$\boldsymbol{Q}_1\in\boldsymbol{R}^{n\times m}$,$\boldsymbol{R}$ 为 m 阶可逆上三角矩阵。将式(4)代入式(2),可导出满足正交条件(2)的对称矩阵为

$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{Q}\begin{pmatrix}(\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}})^{-1} & \boldsymbol{M}_{12}\\ \boldsymbol{M}_{12}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{M}_{22}\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} \tag{5}$$

式中:$\boldsymbol{M}_{12}\in\boldsymbol{R}^{m\times(n-m)}$ 和 $\boldsymbol{M}_{22}\in\boldsymbol{SR}^{(n-m)\times(n-m)}$ 是任意的。

为了求得矩阵方程(2)的对称半正定解,需要如下引理。

引理 1[14]　设 $\boldsymbol{E}\in\boldsymbol{SR}^{n\times n}$,$\boldsymbol{F}\in\boldsymbol{R}^{n\times k}$,$\boldsymbol{G}\in\boldsymbol{SR}^{k\times k}$,$\boldsymbol{H}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E} & \boldsymbol{F}\\ \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{G}\end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{H}\geqslant 0$ 当且仅当 $\boldsymbol{E}\geqslant 0$,$\boldsymbol{G}-\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}^+\boldsymbol{F}\geqslant 0$,且 $\mathrm{rank}[\boldsymbol{E},\boldsymbol{F}]=\mathrm{rank}(\boldsymbol{E})$。

由引理 1,即得矩阵方程(2)的对称半正定解

$\boldsymbol{M}$ 为

$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{Q}\begin{pmatrix}(\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}})^{-1} & \boldsymbol{M}_{12}\\ \boldsymbol{M}_{12}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{M}_{12}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_{12}+\boldsymbol{G}\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} \tag{6}$$

式中：$\boldsymbol{M}_{12}\in\boldsymbol{R}^{m\times(n-m)}$ 和 $\boldsymbol{G}\in\boldsymbol{SR}_0^{(n-m)\times(n-m)}$ 是任意的。

为了给出问题(3)解的存在性和唯一性，需要如下引理。

引理2(最佳逼近定理)[15] 设 $\boldsymbol{H}$ 是一个 Hilbert 空间，$\boldsymbol{W}$ 是 $\boldsymbol{H}$ 中的一个非空闭凸集，则对 $\boldsymbol{g}\in\boldsymbol{H}$，存在唯一的向量 $\boldsymbol{g}^*\in\boldsymbol{W}$，使得

$$\|\boldsymbol{g}-\boldsymbol{g}^*\|=\min_{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{W}}\|\boldsymbol{g}-\boldsymbol{x}\| \tag{7}$$

式中：$\boldsymbol{x}$ 表示 Hilbert 空间中向量 $\boldsymbol{x}$ 的长度或由长度导出的范数。

问题(7)的解 $\boldsymbol{g}^*$ 通常称为 $\boldsymbol{g}$ 在 $\boldsymbol{W}$ 中的最佳逼近或称 $\boldsymbol{g}^*$ 为 $\boldsymbol{g}$ 在 $\boldsymbol{W}$ 中的投影，记为 $\boldsymbol{g}^*=\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{W}}(\boldsymbol{g})$。

如果引理2中 Hilbert 空间 $\boldsymbol{H}$ 的非空闭凸集 $\boldsymbol{W}=\bigcap_{i=1}^{k}\boldsymbol{W}_i$，其中 $\boldsymbol{W}_i(i=1,2,\cdots,k)$ 都是 Hilbert 空间 $\boldsymbol{H}$ 中的闭凸集，并且对 $\boldsymbol{g}\in\boldsymbol{H}$，仅能计算 $\boldsymbol{g}$ 在每个 $\boldsymbol{W}_i$ 上的投影 $\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{W}_i}(\boldsymbol{g})$。Boyle 和 Dykstra[13] 给出了计算 $\boldsymbol{g}$ 在 $\boldsymbol{W}$ 中投影的一个迭代方法，称为循环投影方法，并证明了循环投影方法的收敛性。

由引理2可得如下结论。

定理1 设测量的振型矩阵 $\boldsymbol{X}_e$ 的 $\boldsymbol{QR}$ 分解为式(4)，如果存在 $\boldsymbol{M}_{12}\in\boldsymbol{R}^{m\times(n-m)}$ 和 $\boldsymbol{G}\in\boldsymbol{SR}_0^{(n-m)\times(n-m)}$，使得式(6)中的质量矩阵 $\boldsymbol{M}$ 满足 $\mathrm{sparse}(\boldsymbol{M})=\mathrm{sparse}(\boldsymbol{M}_a)$，则问题(3)的可行域是非空闭凸集，从而问题(3)存在唯一解。

记

$$S_{M_1}=\{\boldsymbol{M}\in\boldsymbol{R}^{n\times n}\mid\boldsymbol{X}_e^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_a\boldsymbol{X}_e=\boldsymbol{I}_m,\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{M}\}$$

$$S_{M_2}=\{\boldsymbol{M}\in\boldsymbol{R}^{n\times n}\mid\mathrm{sparse}(\boldsymbol{M})=\mathrm{sparse}(\boldsymbol{M}_a)\}$$

$$S_{M_3}=\{\boldsymbol{M}\in\boldsymbol{R}^{n\times n}\mid\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{M}\geqslant 0\}$$

则 $S_{M_3}=\boldsymbol{SR}_0^{n\times n}$，问题(3)的可行域为 $S_{M_1}\cap S_{M_2}\cap S_{M_3}$，并且是 $\boldsymbol{R}^{n\times n}$ 中的闭凸集。因此问题(3)等价于求 $\boldsymbol{M}_a$ 在 $S_{M_1}\cap S_{M_2}\cap S_{M_3}$ 中的最佳逼近。下面依次考虑 $\boldsymbol{M}_a$ 在 S_{M_1},S_{M_2},S_{M_3} 上的投影。

对解析质量矩阵 $\boldsymbol{M}_a\in\boldsymbol{SR}^{n\times n}$，记

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_a\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{M}_{a11} & \boldsymbol{M}_{a12}\\ \boldsymbol{M}_{a12}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{M}_{a22}\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{M}_{aij}=\boldsymbol{Q}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_a\boldsymbol{Q}_j\quad i,j=1,2 \tag{8}$$

对 $\boldsymbol{M}\in S_{M_1}$，由式(5,8)和F-范数的正交不变性，可得

$$\|\boldsymbol{M}-\boldsymbol{M}_a\|_{\mathrm{F}}^2=\left\|\begin{pmatrix}(\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}})^{-1} & \boldsymbol{M}_{12}\\ \boldsymbol{M}_{12}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{M}_{22}\end{pmatrix}-\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_a\boldsymbol{Q}\right\|_{\mathrm{F}}^2=$$
$$\|(\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}})^{-1}-\boldsymbol{M}_{a11}\|_{\mathrm{F}}^2+2\|\boldsymbol{M}_{12}-\boldsymbol{M}_{a12}\|_{\mathrm{F}}^2+$$
$$\|\boldsymbol{M}_{22}-\boldsymbol{M}_{a22}\|_{\mathrm{F}}^2$$

当且仅当 $\boldsymbol{M}_{12}=\boldsymbol{M}_{a12}$，$\boldsymbol{M}_{22}=\boldsymbol{M}_{a22}$，$\min\limits_{\boldsymbol{M}\in\boldsymbol{SR}^{n\times n}}\boldsymbol{M}-\boldsymbol{M}_a{}_{\mathrm{F}}^2$ 取得最小值。因此，解析质量矩阵 $\boldsymbol{M}_a$ 在 S_{M_1} 中的投影为

$$P_{S_{M_1}}(\boldsymbol{M}_a)=\boldsymbol{Q}\begin{pmatrix}(\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}})^{-1} & \boldsymbol{M}_{a12}\\ \boldsymbol{M}_{a12}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{M}_{a22}\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$$

由式(4)可得 $\boldsymbol{X}_e^+=\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{T}}$。利用 Moore-Penrose 广义逆的性质和式(8)，上式可化为

$$P_{S_{M_1}}(\boldsymbol{M}_a)=\boldsymbol{M}_a+(\boldsymbol{X}_e^+)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_e^+-\boldsymbol{X}_e\boldsymbol{X}_e^+\boldsymbol{M}_a\boldsymbol{X}_e\boldsymbol{X}_e^+ \tag{9}$$

对给定的解析质量矩阵 $\boldsymbol{M}_a\in\boldsymbol{SR}^{n\times n}$，使用如下指标集 S_{M_a} 刻画矩阵 $\boldsymbol{M}_a$ 的稀疏结构

$$S_{M_a}=\{(i,j)\mid m_{aij}=0,\ \boldsymbol{M}_a=(m_{aij})\in\boldsymbol{SR}^{n\times n}\} \tag{10}$$

由指标集 S_{M_a} 的定义，容易证明如下结论。

引理3 设 $\boldsymbol{T}=(t_{ij})\in\boldsymbol{SR}^{n\times n}$，则问题

$$\min\frac{1}{2}\|\boldsymbol{M}-\boldsymbol{T}\|_{\mathrm{F}}^2$$
$$\text{s. t. }\mathrm{sparse}(\boldsymbol{M})=\mathrm{sparse}(\boldsymbol{M}_a) \tag{11}$$

有唯一解 $\boldsymbol{M}=(m_{ij})\in\boldsymbol{SR}^{n\times n}$，且 $m_{ij}=\begin{cases}0,(i,j)\in S_{M_a}\\ t_{ij},(i,j)\notin S_{M_a}\end{cases}$。

由引理3可知，问题(11)的 $\boldsymbol{M}$ 就是 $\boldsymbol{T}$ 在 S_{M_2} 中的投影，即

$$\boldsymbol{M}=P_{S_{M_2}}(\boldsymbol{T})=(m_{ij})$$
$$m_{ij}=\begin{cases}0 & (i,j)\in S_{M_a}\\ t_{ij} & (i,j)\notin S_{M_a}\end{cases} \tag{12}$$

为了计算一个矩阵在 S_{M_3} 中的投影，需要如下引理。

引理4[16] 设 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$，$\hat{\boldsymbol{A}}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$ 的谱分解为 $\hat{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{U}\mathrm{diag}(\theta_1,\cdots,\theta_n)\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}$，其中 $\theta_1,\cdots,\theta_n$ 为矩阵 $\hat{\boldsymbol{A}}$ 的特征值，$\boldsymbol{U}\in\boldsymbol{OR}^{n\times n}$，则存在唯一的对称半正定矩阵 $\boldsymbol{A}_+$，使得

$$\|\boldsymbol{A}_+-\boldsymbol{A}\|_{\mathrm{F}}=\min_{\boldsymbol{X}\in\boldsymbol{SR}_0^{n\times n}}\|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{A}\|_{\mathrm{F}} \tag{13}$$

并且 $\boldsymbol{A}_+=\boldsymbol{U}\mathrm{diag}(\beta_1,\cdots,\beta_n)\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}$，其中 $\beta_i=\max\{\theta_i,0\}(i=1,2,\cdots,n)$。

对矩阵 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$，问题(13)的解称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的正逼近，记为 $\boldsymbol{A}_+$。实际上，$\boldsymbol{A}_+$ 是 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 在 S_{M_3} 中的投影，即 $\boldsymbol{A}_+=P_{S_{M_3}}(\boldsymbol{A})=P_{SR_0^{n\times n}}(\boldsymbol{A})$。

于是，可给出求解问题(3)的数值算法如下：

算法1 修正质量矩阵的循环投影方法

输入：$\boldsymbol{M}_a\in\boldsymbol{SR}^{n\times n}$，$\boldsymbol{X}_e\in\boldsymbol{R}^{n\times m}$ 和收敛准则 ε，并置 $\boldsymbol{M}_{1,0}=\boldsymbol{M}_a$，$\boldsymbol{I}_{0,j}=0(j=1,2,3)$。

输出：修正的质量矩阵 $\boldsymbol{M}$。

对 $i=1,2,\cdots$，执行以下运算直到收敛

对 $j=1,2,3$，计算

$$M_{i,j}=P_{S_{M_j}}(M_{i,j-1}-I_{i-1,j})$$

$$I_{i,j}=M_{i,j}-(M_{i,j-1}-I_{i-1,j})$$

置 $M_{i+1,0}=M_{i,3}$，如果 $\|M_{i+1,0}-M_{i,0}\|_F\leqslant\varepsilon$，则 $M=M_{i+1,0}$，停止；否则继续迭代。

定理 2[13]　如果问题(3)的可行域非空，则对任意 $j(j=1,2,3)$，算法 1 所产生的矩阵序列 $\{M_{n,j}\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛于问题(3)的唯一解。

由算法 1 修正的质量矩阵不仅满足正交性条件(2)，而且是对称半正定的，与解析质量矩阵 M_a 具有相同的稀疏结构。

2　利用特征方程修正质量矩阵

假定解析刚度矩阵 K_a 准确，并设测量的特征值 Λ_e 和相应的振型 X_e 满足

$$X_e^{\mathrm{T}}K_aX_e=\Lambda_e \tag{14}$$

基于待修正质量矩阵 M 应满足如下特征方程

$$MX_e\Lambda_e=K_aX_e \tag{15}$$

和对称半正定性，戴华[17]将修正质量矩阵的问题归结为如下带约束的矩阵逼近问题

$$\min\frac{1}{2}\|M-M_a\|_F^2$$

$$\text{s.t.}\quad MX_e\Lambda_e=K_aX_e,M^{\mathrm{T}}=M\geqslant 0 \tag{16}$$

记

$$D_M=\{M\in R^{n\times n}\mid MX_e\Lambda_e=K_aX_e,M^{\mathrm{T}}=M\geqslant 0\}$$

则 D_M 是问题 (16)的可行域。

为了给出 D_M 中元素的表达式，需要如下引理。

引理 5[18]　设 $X,B\in R^{n\times m}$，如果 $\mathrm{rank}(X)=m$，并且 X 有 QR 分解 $X=Q\begin{pmatrix}R\\0\end{pmatrix}$，其中 $Q=[Q_1,Q_2]\in OR^{n\times n}$，$Q_1\in R^{n\times m}$，$R$ 为 m 阶可逆上三角矩阵，则 $AX=B$ 有解 $A\in SR_0^{n\times n}$ 当且仅当

$$X^{\mathrm{T}}B=B^{\mathrm{T}}X\geqslant 0,\mathrm{rank}(X^{\mathrm{T}}B)=\mathrm{rank}(B)。$$

在有解的情况下，$AX=B$ 的对称半正定解可表示为 $A=BX^{+}+[(BX^{+})^{\mathrm{T}}+(I_n-XX^{+})B(X^{\mathrm{T}}B)^{+}B^{\mathrm{T}}](I_n-XX^{+})+Q_2GQ_2^{\mathrm{T}}$，其中 $G\in SR_0^{(n-m)\times(n-m)}$ 是任意的。

定理 3　设测量的特征值 Λ_e 和相应的振型 X_e 满足式(14)，且 X_e 的 QR 分解为式(4)，则问题(16) 的可行域非空，并且问题(16)存在唯一解

$$M=M_0+Q_2[Q_2^{\mathrm{T}}(M_a-M_0)Q_2]_+Q_2^{\mathrm{T}} \tag{17}$$

其中 $M_0=K_aX_e\Lambda_e^{-2}X_e^{\mathrm{T}}K_a$。

证明　由引理 5 知，矩阵方程 $MX_e\Lambda_e=K_aX_e$ 存在对称半正定解，并且其通解可表示为

$$M=K_aX_e\Lambda_e^{-2}X_e^{\mathrm{T}}K_a+Q_2GQ_2^{\mathrm{T}} \tag{18}$$

式中：$G\in SR_0^{(n-m)\times(n-m)}$ 是任意的，从而问题(16)的可行域是非空闭凸集。由引理 2 可知，问题(16)存在唯一解。

对任意 $M\in D_M$，M 可表示为

$$M=M_0+Q_2GQ_2^{\mathrm{T}}=M_0+Q\begin{pmatrix}0&0\\0&G\end{pmatrix}Q^{\mathrm{T}}$$

由 F-范数的正交不变性，可得

$$\|M-M_a\|_F^2=\left\|Q\begin{pmatrix}0&0\\0&G\end{pmatrix}Q^{\mathrm{T}}-(M_a-M_0)\right\|_F^2=$$

$$\left\|\begin{pmatrix}0&0\\0&G\end{pmatrix}-Q^{\mathrm{T}}(M_a-M_0)Q\right\|_F^2=$$

$$\|Q_1^{\mathrm{T}}(M_a-M_0)Q_1\|_F^2+2\|Q_1^{\mathrm{T}}(M_a-M_0)Q_2\|_F^2+\|G-Q_2^{\mathrm{T}}(M_a-M_0)Q_2\|_F^2$$

从而 $\|M-M_a\|_F^2=\min$ 当且仅当 $\|G-Q_2^{\mathrm{T}}(M_a-M_0)Q_2\|_F^2=\min$。由引理 4 可知，当 $G=[Q_2^{\mathrm{T}}(M_a-M_0)Q_2]_+$ 时，$\|M-M_a\|_F^2$ 取最小值。将 $G=[Q_2^{\mathrm{T}}(M_a-M_0)Q_2]_+$ 代入式(18)即得式(17)。

定理 3 给出的修正质量矩阵 M 不仅满足特征方程(15)，而且是对称半正定矩阵。袁永新和戴华[19]利用奇异值分解给出了问题(16)解的表达式。但这些表达式不能保持解析质量矩阵的稀疏结构。

为了使修正质量矩阵 M 既满足特征方程(15)，又是对称半正定的，并保持稀疏结构，本文将修正质量矩阵 M 的问题归结为如下带约束的矩阵逼近问题

$$\min\frac{1}{2}\|M-M_a\|_F^2$$

$$\text{s.t.}\ MX_e\Lambda_e=K_aX_e,M^{\mathrm{T}}=M\geqslant 0$$

$$\mathrm{sparse}(M)=\mathrm{sparse}(M_a) \tag{19}$$

由定理 3 和引理 2，可得如下结论。

定理 4　设测量的特征值 Λ_e 和振型 X_e 满足式(14)，且 X_e 的 QR 分解为式(4)。如果存在矩阵 $G\in SR_0^{(n-m)\times(n-m)}$，使得 $M=K_aX_e\Lambda_e^{-2}X_e^{\mathrm{T}}K_a+Q_2GQ_2^{\mathrm{T}}$ 满足 $\mathrm{sparse}(M)=\mathrm{sparse}(M_a)$，则问题(19)的可行域非空，从而问题(19)存在唯一解。

记

$$S_1=\{M\in R^{n\times n}\mid MX_e\Lambda_e=K_aX_e,M^{\mathrm{T}}=M\geqslant 0\}$$

$$S_2=\{M\in R^{n\times n}\mid \mathrm{sparse}(M)=\mathrm{sparse}(M_a)\}$$

则问题(19)的可行域 $D_M=S_1\cap S_2$。

对给定的矩阵 $M_a\in SR^{n\times n}$，由定理 3 可得 M_a 在 S_1 上的投影为

$$P_{S_1}(M_a)=M_0+Q_2[Q_2^{\mathrm{T}}(M_a-M_0)Q_2]_+Q_2^{\mathrm{T}} \tag{20}$$

因为 $S_2=S_{M_2}$，对给定的矩阵 $T=(t_{ij})\in SR^{n\times n}$，由式(12)容易计算 T 在 S_2 上的投影 $P_{S_2}(T)=P_{S_{M_2}}(T)$。

于是，给出求解问题(19)的数值算法如下：

算法 2 修正质量矩阵的循环投影方法

输入：$\boldsymbol{K}_a, \boldsymbol{M}_a \in \boldsymbol{SR}^{n\times n}, \boldsymbol{X}_e \in \boldsymbol{R}^{n\times m}, \boldsymbol{\Lambda}_e \in \boldsymbol{R}^{m\times m}$ 和收敛准则 ε，置 $\boldsymbol{M}_{1,0}=\boldsymbol{M}_a, \boldsymbol{I}_{0,j}=0(j=1,2)$。

输出：修正的质量矩阵 $\boldsymbol{M}$。

对 $i=1,2,\cdots$，执行以下运算直到收敛。

对 $j=1,2$，计算

$$\boldsymbol{M}_{i,j}=P_{S_j}(\boldsymbol{M}_{i,j-1}-\boldsymbol{I}_{i-1,j})$$

$$\boldsymbol{I}_{i,j}=\boldsymbol{M}_{i,j}-(\boldsymbol{M}_{i,j-1}-\boldsymbol{I}_{i-1,j})$$

置 $\boldsymbol{M}_{i+1,0}=\boldsymbol{M}_{i,2}$，如果 $\|\boldsymbol{M}_{i+1,0}-\boldsymbol{M}_{i,0}\|_{\mathrm{F}}\leqslant\varepsilon$，则 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{M}_{i+1,0}$，停止；否则继续迭代。

由文献[13]中定理 2，可得算法 2 的收敛性结果。

定理 5 如果问题(19)的可行域非空，则对任意 $j(j=1,2)$，算法 2 所产生的矩阵序列 $\{\boldsymbol{M}_{n,j}\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛于问题(19)的唯一解。

3 数值结果

本节给出两个数值例子，以说明算法 1 和算法 2 的有效性。算法 1 和算法 2 用 MATLAB R2015b 编程，程序在主频为 2.90 GHz 的计算机上实现。收敛准则 $\varepsilon=10^{-7}$。用 $\boldsymbol{M}$ 和 $\widetilde{\boldsymbol{M}}$ 分别表示精确的质量矩阵和计算的修正质量矩阵，Iter 和 CPU 分别表示执行算法的迭代步数和计算时间(单位：s)，记

$$\boldsymbol{E}_1=\|\boldsymbol{X}_e^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{M}}\boldsymbol{X}_e-\boldsymbol{I}\|_{\mathrm{F}}$$

$$\boldsymbol{E}_2=\|\widetilde{\boldsymbol{M}}\boldsymbol{X}_e\boldsymbol{\Lambda}_e-\boldsymbol{K}_a\boldsymbol{X}_e\|_{\mathrm{F}},\mathrm{Err}=\frac{\|\widetilde{\boldsymbol{M}}-\boldsymbol{M}\|_{\mathrm{F}}}{\boldsymbol{M}_{\mathrm{F}}}$$

例 1 考虑图 1 所示的无阻尼弹簧-质点系统，其中 $m_i=1$ kg$(i=1,2,\cdots,5)$，$k_i=0.5$ N/m$(i=1,2,\cdots,6)$，则系统精确的质量矩阵与刚度矩阵分别为

$$\boldsymbol{M}=\mathrm{diag}(1,1,1,1,1)$$

$$\boldsymbol{K}=\boldsymbol{K}_a=\begin{pmatrix} 1 & -0.5 & & & \\ -0.5 & 1 & -0.5 & & \\ & -0.5 & 1 & -0.5 & \\ & & -0.5 & 1 & -0.5 \\ & & & -0.5 & 1 \end{pmatrix}$$

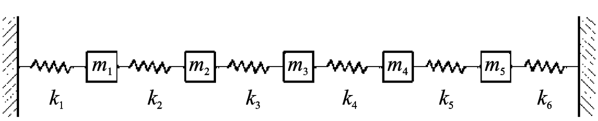

图 1 无阻尼弹簧-质点系统

Fig. 1 Undamped spring-mass system

取广义特征值问题 $\boldsymbol{K}x=\lambda\boldsymbol{M}x$ 的二个最小特征值及其相应的特征向量作为测量特征对，分别记为 $\boldsymbol{\Lambda}_e, \boldsymbol{X}_e$，即

$$\boldsymbol{\Lambda}_e=\mathrm{diag}(0.1340,0.5000)$$

$$\boldsymbol{X}_e=\begin{pmatrix} 0.2887 & -0.5000 \\ 0.5000 & -0.5000 \\ 0.5774 & 0 \\ 0.5000 & 0.5000 \\ 0.2887 & 0.5000 \end{pmatrix}$$

容易验证：$\boldsymbol{\Lambda}_e$ 和 $\boldsymbol{X}_e$ 满足式(14)。$\boldsymbol{M}$ 的估计为 $\boldsymbol{M}_a=\boldsymbol{M}+\mu\boldsymbol{E}_r\times\boldsymbol{M}$，其中 $\boldsymbol{E}_r$ 为随机生成的五阶对称矩阵，其元素随机分布在区间[-1.0，1.0]，参数 μ 表示对 $\boldsymbol{M}$ 相对扰动的大小。利用算法 1 和算法 2 计算的修正质量矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{M}}$ 与精确的质量矩阵 $\boldsymbol{M}$ 完全相同。数值结果见表 1。

表 1 例 1 的数值结果

Tab. 1 Numerical results of Example 1

算法	$\mu=0.01$			
	约束误差	Err	Iter	CPU
1	$\boldsymbol{E}_1=0.2931\text{e-}6$	0.3300e-3	82	0.005
2	$\boldsymbol{E}_2=0.1261\text{e-}3$	0.3168e-3	19	0.001
算法	$\mu=0.1$			
	约束误差	Err	Iter	CPU
1	$\boldsymbol{E}_1=0.2936\text{e-}6$	0.6800e-3	128	0.008
2	$\boldsymbol{E}_2=0.1261\text{e-}3$	0.3167e-3	27	0.002

例 2 考虑一端固定、另一端自由的离散变截面杆[20]，基于线性形函数的解析质量矩阵与刚度矩阵为

$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix} 0.4 & 0.1 & & & & & & & & \\ 0.1 & 0.4 & 0.1 & & & & & & & \\ & 0.1 & 0.4 & 0.1 & & & & & & \\ & & 0.1 & 0.4 & 0.1 & & & & & \\ & & & 0.1 & 0.6 & 0.2 & & & & \\ & & & & 0.2 & 0.8 & 0.2 & & & \\ & & & & & 0.2 & 0.8 & 0.2 & & \\ & & & & & & 0.2 & 0.8 & 0.2 & \\ & & & & & & & 0.2 & 0.8 & 0.2 \\ & & & & & & & & 0.2 & 0.4 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{K}=\boldsymbol{K}_a=\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & & & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & & & & & \\ & & -1 & 2 & -1 & & & & & \\ & & & -1 & 4 & -3 & & & & \\ & & & & -3 & 6 & -3 & & & \\ & & & & & -3 & 6 & -3 & & \\ & & & & & & -3 & 6 & -3 & \\ & & & & & & & -3 & 6 & -3 \\ & & & & & & & & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

这里刚度矩阵和质量矩阵的元素缩放了一定比例。取广义特征值问题 $\boldsymbol{K}x=\lambda\boldsymbol{M}x$ 的 4 个最小特征值及其相应的特征向量作为测量特征对，分别记为 $\boldsymbol{\Lambda}_e, \boldsymbol{X}_e$。$\boldsymbol{M}$ 的估计为 $\boldsymbol{M}_a=\boldsymbol{M}+\mu\boldsymbol{E}_r\times\boldsymbol{M}$，其中 $\boldsymbol{E}_r$ 为随机生成的 10 阶对称矩阵，其元素随机分布在区间[-1.0，1.0]。利用算法 1 和算法 2

计算的修正质量矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{M}}$ 与精确的质量矩阵 $\boldsymbol{M}$ 完全相同。数值结果见表 2。

表 2　例 2 的数值结果

Tab. 2　Numerical results of Example 2

算法	$\mu=0.01$			
	约束误差	Err	Iter	CPU
1	$\boldsymbol{E}_1=0.5310\text{e-}5$	0.230 0e-3	3 705	0.313
2	$\boldsymbol{E}_2=0.3424\text{e-}5$	0.986 7e-5	982	0.071

算法	$\mu=0.1$			
	约束误差	Err	Iter	CPU
1	$\boldsymbol{E}_1=0.3750\text{e-}4$	0.583 0e-3	6 643	0.543
2	$\boldsymbol{E}_2=0.3435\text{e-}5$	0.990 0e-5	1 319	0.106

例 1,2 的数值结果说明由算法 1 和算法 2 修正的质量矩阵不仅满足正交性条件或特征方程,而且是对称半正定矩阵,还具有要求的稀疏结构。因此,算法 1,2 是有效的,并且由表 1,2 可见,如果刚度矩阵已知,由特征方程修正质量矩阵的计算效率更高。

4　结束语

本文研究了有限元模型质量矩阵的修正问题。建立了以待修正质量改变量的 F-范数为目标函数并以质量矩阵应具有的性质如满足正交关系或特征方程,对称性,半正定性和稀疏性为约束条件的矩阵最佳逼近问题。给出了问题有解的条件。提出了求解带约束矩阵最佳逼近问题的循环投影方法。所获得的修正质量矩阵不仅满足正交性条件或特征方程,而且是对称半正定的,并与解析质量矩阵具有相同的稀疏结构。本文所发展的修正质量矩阵的理论和方法可应用于修正有限元模型的刚度矩阵或同时修正有限元模型的质量和刚度矩阵。

参考文献:

[1] BATHE K J, WILSON E L. Numerical methods in finite element analysis[M]. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1976.

[2] MOTTERSHEAD J E, FRISWEEL M I. Model updating in structural dynamics: A survey[J]. Journal of Sound and Vibration, 1993, 167:347-375.

[3] 朱安文,曲广吉,高耀南,等. 结构动力模型修正技术的发展[J]. 力学进展,2002, 32(3): 337-348.
ZHU Anwen, QU Guangji, GAO Yaonan, et al. A survey of the modifying techniques of structure dynamic models[J]. Advances in Mechanics, 2002, 32(3): 337-348.

[4] FRISWEEL M I, MOTTERSHEAD J E. Finite element model updating in structural dynamics[M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1995.

[5] 张德文,魏阜旋. 模型修正与破损诊断[M]. 北京:科学出版社, 1999.
ZHANG Dewen, WEI Fuxuan. Model updating and damage detection[M]. Beijing: Science Press, 1999.

[6] BERMAN A. Mass matrix correction using an incomplete set of measured modes[J]. AIAA Journal, 1979, 17: 1147-1148.

[7] BERMAN A, NAGY E J. Improvement of a large analytical model using test data[J]. AIAA Journal, 1983, 21:1168-1173.

[8] ZHANG D, ZHANG L. Matrix transformation method for updating dynamic model[J]. AIAA Journal, 1992, 30:1440-1443.

[9] LEE E T, RAHMATALLA S, EUN H C. Estimation of parameter matrices based on measured data[J]. Applied Mathematical Modelling, 2011, 35: 4816-4823.

[10] WEI F S, ZHANG D W. Mass matrix modification using element correction method[J]. AIAA Journal, 1989, 27: 119-121.

[11] CHA P D. Correcting system matrices using the orthogonality conditions of distinct measured modes[J]. AIAA Journal, 2000, 38: 730-732.

[12] YUAN Y X, DAI H. Inverse problems for symmetric matrices with a submatrix constraint[J]. Applied Numerical Mathematics, 2007, 57: 646-656.

[13] BOYLE J P, DYKSTRA R L. A method for finding projections onto the intersection of convex sets in Hilbert spaces[C]// Advances in Order Restricted Statistical Interference. Berlin: Springer, 1986: 28-47.

[14] ALBERT A. Conditions for positive and nonnegative definiteness in terms of pseudoinverses[J]. SIAM Journal on Applied Mathematics, 1969, 17: 430-440.

[15] AUBIN J P. Applied functional analysis[M]. New York: John Wiley & Sons, 1979.

[16] HIGHAM N J. Computing a nearest symmetric positive semidefinite matrix[J]. Linear Algebra and Its Applications, 1988, 103: 103-118.

[17] 戴华. 用振动试验最优校正刚度、柔度和质量矩阵[J]. 振动工程学报, 1988,1(2): 18-27.
DAI Hua. Optimal correction of stiffness, flexibility and mass matrices using vibration tests[J]. Journal of Vibration Engineering, 1988,1(2): 18-27.

[18] 张磊. 对称非负定矩阵反问题解存在的条件[J]. 计算数学,1989, 11(4): 337-343.
ZHANG Lei. The solvability conditions for the inverse problem of symmetric nonnegative definite matrices[J]. Mathematica Numerica Sinica, 1989, 11(4): 337-343.

[19] 袁永新,戴华. 用振动测量数据最优修正振型矩阵与质量矩阵[J]. 工程数学学报, 2007, 24(4): 631-638.
YUAN Yongxin, DAI Hua. Optimal correction of modal matrix and mass matrix using test data[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2007, 24(4): 631-638.

[20] 田霞,戴华. 杆有限元模型的特征值反问题[J]. 高等学校计算数学学报, 2007, 29(2): 146-156.
TIAN Xia, DAI Hua. Inverse eigenvalue problems for the finite element model of the rod[J]. Numerical Mathematics—A Journal of Chinese Universities, 2007, 29(2): 146-156.