

DOI:10.16356/j.2097-6771.2026.03.001

并联机器人位置正解问题的研究现状及发展趋势

叶鹏达¹, 尤晶晶^{2,3}, 闻王虎², 李 飒², 沈惠平¹

(1. 常州大学机械与轨道交通学院, 常州 213164; 2. 南京林业大学机械电子工程学院, 南京 210037; 3. 重庆大学
高端装备机械传动全国重点实验室, 重庆 400044)

摘要: 并联机器人技术的发展对其运动性能提出了更高的要求, 其中, 位置正解问题与性能表征、性能提升等工作息息相关, 自 20 世纪 80 年代开始受到广泛关注。由于位置正解方程的强非线性和多解性, 目前该问题尚未完全解决, 仍然是机器人机构学领域研究的焦点。首先, 从方法原理的角度, 阐述了位置正解的国内外研究现状及特色, 剖析了求解算法的核心思想, 并挖掘出研究中面临的根本性难题。其次, 从方法特性的角度, 对比分析了位置正解求解方法的优劣性及适用性。最后, 在总结了并联机器人位置正解的现有研究方法的基础上, 展望了其未来的发展方向, 为机器人机构学领域的研究提供了借鉴和参考。

关键词: 并联机器人; 位置正解; 数值法; 封闭法; 解析法

中图分类号: TP24 **文献标志码:** A **文章编号:** 1005-2615(2026)03-0471-15

Research Status and Development Trend of Forward Position Solution Problem in Parallel Robot

YE Pengda¹, YOU Jingjing^{2,3}, WEN Wanghu², LI Sa², SHEN Huiping¹

(1. School of Mechanical Engineering and Rail Transit, Changzhou University, Changzhou 213164, China; 2. College of Mechanical and Electronic Engineering, Nanjing Forestry University, Nanjing 210037, China; 3. State Key Laboratory of Mechanical Transmission for Advance Equipment, Chongqing University, Chongqing 400044, China)

Abstract: The development of parallel robot technology puts forward higher requirements for its motion performance, in which the forward position solution problem is closely related to performance characterization, performance improvement and so on. It has received widespread attention since the 1980s. Due to the strong nonlinearity and multiple solutions of the forward kinematics equations, this problem has not been completely solved at present, and it is still the focus of research in the field of robotic mechanism. Firstly, from the perspective of method principles, this paper expounds the research status and characteristics of forward position solution at home and abroad, analyzes the core ideas of the solution algorithms, and excavates the fundamental problems faced in the research. Secondly, from the perspective of method characteristics, the advantages, disadvantages and applicability of the forward position solution methods are compared and analyzed. Finally, on the basis of summarizing the existing research methods of forward position solution of parallel robots, the future development direction is prospected, which provides a reference for the research in the field of robotic mechanism.

Key words: parallel robot; forward position solution; numerical method; closed-form method; analytical

基金项目: 国家自然科学基金(52575022, 52375007); 高端装备机械传动全国重点实验室开放基金(SKLM-T-MSKF-KT-202330)。

收稿日期: 2025-04-16; **修订日期:** 2025-10-10

通信作者: 叶鹏达, 男, 博士, 讲师, E-mail: yepengda@126.com。

引用格式: 叶鹏达, 尤晶晶, 闻王虎, 等. 并联机器人位置正解问题的研究现状及发展趋势[J]. 南京航空航天大学学报(自然科学版), 2026, 58(3): 471-485. YE Pengda, YOU Jingjing, WEN Wanghu, et al. Research status and development trend of forward position solution problem in parallel robot[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics (Natural Science Edition), 2026, 58(3): 471-485.

method

随着科学技术的发展,机器人已在工业、农业、服务业和娱乐等诸多行业有了广泛的应用,并对人们的生活产生了深远的影响^[1]。开环结构的串联机器人首先被提出,随后,人们又提出了闭环结构的并联机器人。其中,最具代表性的工作当属 1965 年英国工程师 Stewart 发表的论文《A Platform with Six Degrees of Freedom》^[2]。该文系统描述了一种 6 自由度并联机构,用于飞行模拟器。这一设计成为现代并联机器人的雏形,但初期研究集中于机构应用,基础理论问题尚未成为焦点。

20 世纪 80 年代,随着机器人技术的发展和高速、高精度需求的出现(如航空制造、医疗技术等),并联机器人的潜力被重新发掘。此时,位置正解的复杂性(非线性方程组、多解性)成为核心挑战,吸引大量学者投入研究^[3]。《21 世纪 100 个交叉科学难题》^[4]指出,Stewart 平台是机器人领域中的新事物,它的设计基础理论中存在着若干难度极大的问题,其中,位置正解问题是一个最基本的难题,被喻为是空间机构运动分析中继 7R 机构位移分析后的又一座“珠穆朗玛峰”。并联机器人的位置正解是指已知所有支链中驱动副的输入位移,求解动平台的位置和姿态。该问题是机构的工作空间计算、奇异性分析、动力学控制、轨迹规划、构型综合、尺度综合、误差补偿和故障诊断等一系列工作的基础^[5-7]。

并联机器人的位置正解研究起初是从 Stewart 平台开始的^[8],其后扩展到其他 6 自由度并联机器人,例如 6-移动副球副球副(Prismatic-joint spherical-joint spherical-joint,PSS)、6-万向副移动副球副(Universal-joint prismatic-joint spherical-joint,UPS)和 6-转动副万向副球副(Revolute-joint universal-joint spherical-joint,RUS)等^[9-11]。随后又扩展到少自由度并联机器人,例如 4-万向副移动副万向副(Universal-joint prismatic-joint universal-joint,UPU)、3-转动副移动副转动副(Revolute-joint prismatic-joint revolute-joint,RPR)和 3-转动副移动副球副(Revolute-joint prismatic-joint spherical-joint,RPS)等^[12-14]。在理论研究方面,并联机器人的位置正解涉及到机构学、代数几何学、微分几何学和数值计算等多学科内容。它的数学模型可归结为一类多元强非线性代数方程组的求解,这也是物理和工程技术等领域所面临的共同难题。非线性科学目前正处于科技发展的最前沿,个性极强、难度极大,国内外许多科研机构一直将非线性科学的理论和算法列为主要研究内容^[15-17]。

并联机器人可应用于精密加工^[18]、遥操作^[19]、

振动测量^[5]、空间对接^[20]、医疗康复^[21]和镜面调姿^[22]等领域。位置正解问题的解决是高质量实现上述应用的基本前提。如何用最小的机构尺寸获得必需的工作空间,如何在工作空间内实现无奇异的路径规划,如何分析与补偿输出误差,如何诊断与修复输出故障,如何校对机器零位置等问题都要求获得并联机器人的位置正解。特别地,上述应用场合都需要更为精确、高效和稳定的控制算法,位置正解的求解将直接影响控制算法的性态。由此可见,并联机器人的位置正解问题无论是在理论研究还是在实际应用方面,均具有极其重要的意义。

1 并联机器人本体的研究现状

并联机器人机构是由静平台、动平台及连接动、静平台的至少两个独立运动链组成,且具有两个或两个以上自由度的一种闭环机构,如图 1 所示。并联机器人的出现最早可追溯至 20 世纪 30 年代,Gwinnett^[23]提出了一种基于球面并联机器人机构的娱乐装置,如图 2 所示。1940 年,Pollard^[24]发明了一种汽车喷漆机器人,如图 3 所示。1947 年,Gough 发明了一种 6 自由度轮胎检测装置,如图 4 所示。1965 年,Stewart^[2]首次对 Gough 发明的机构进行了机构学理论意义上的研究,并描绘了飞行模拟器运动产生装置的设计雏形,如图 5 所示,

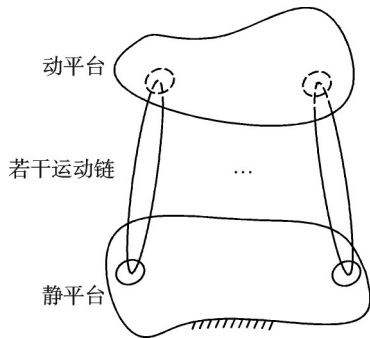


图1 并联机器人机构

Fig.1 Parallel robot mechanism

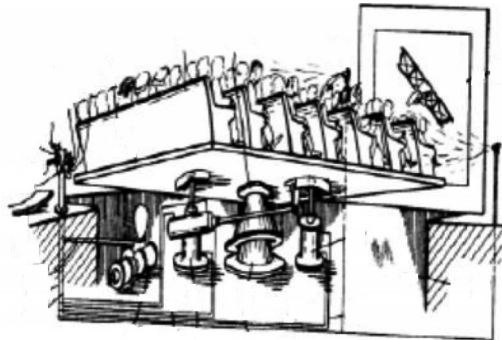


图2 并联机构的娱乐装置

Fig.2 Amusement device of parallel mechanism

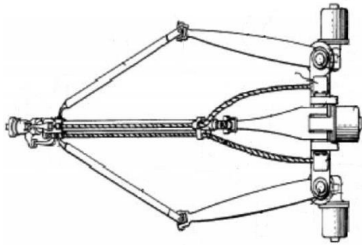


图 3 并联式汽车喷漆机器人

Fig.3 Parallel-type spray painting robot

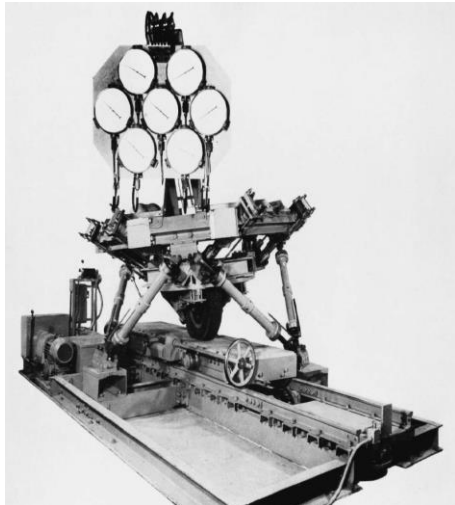


图 4 并联式轮胎检测装置

Fig.4 Parallel-type tire test device



图 5 并联式飞行模拟装置

Fig.5 Parallel-type flight simulator device



图 6 国内首台并联机器人样机

Fig.6 First parallel robot prototype in China

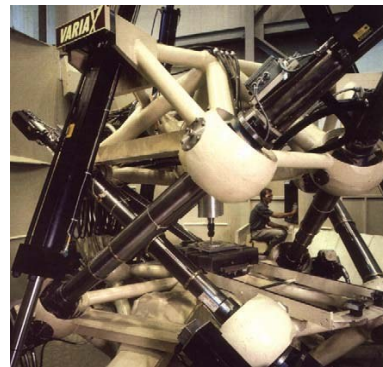


图 7 VARIAX 并联机床

Fig.7 VARIAX parallel machine tool



图 8 VAMT1Y 并联机床

Fig.8 VAMT1Y parallel machine tool

该机构是后来人们所称的 Gough-Stewart 平台机构或 Stewart 机构。1978 年, Hunt^[25] 首次提出将 Stewart 机构应用于工业机器人, 并设计出一种新型 6 自由度并联机器人。1979 年, Maccallion 和 Pham^[26] 基于 Stewart 机构设计出用于装配的并联机器人, 标志着真正意义上的并联机器人的诞生。1997 年, 燕山大学黄真团队^[27] 研制出了国内首台并联机器人样机, 如图 6 所示, 标志着中国自主研制并联机器人的开端。1994 年, 美国芝加哥国际机床博览会上推出了 VARIAX 虚拟轴机床, 如图 7 所示, 标志着并联机床的正式诞生。1997 年, 清华大学和天津大学联合研制出国内首台大型镗床类并联机床样机 VAMT1Y, 如图 8 所示。20 世纪 90 年代开始, 随着计算机技术的快速发展, 各种新型并联机构不断涌现, 例如 Delta 并联机构、Par4 并联机构和 Diamond 并联机构等, 并联机器人机构的理论和应用得到较快发展。

为了满足“一机多性能、多功能”的需求, 20 世纪 90 年代中期开始, “可重构”的思想被运用到机构构型的设计与研究中, 由此诞生了具有变拓扑和变自由度特性的可重构并联机器人^[28]。可重构机构包含运动分叉机构、变胞机构和多模式机构等众多子类。1996 年, 奥地利机构学家 Wohlhart^[29] 发

现奇异性可改变机构自由度,于是提出了一类可实现自由度变化的运动分叉机构。同期,Dai等^[30]受到折纸艺术的启发,基于生物学演变原理,提出一类可进行自我重构的变胞机构,如图9所示。多模式机构则是拉瓦尔大学 Gosselin 教授和孔宪文教授等^[31]参照计算机领域的术语,提出的一类可免重新装配完成运动模式切换的机构,如图10所示。Ye等^[32]将平面变胞机构和4自由度支链结合,设计出一种适用于多向增材制造的3支链可重构并联机构,如图11所示,可实现3T、3T1R_x、3T1R_y和3T2R这4种操作模式的切换。Gan等^[33]提出一种3rTPS可重构并联机构,如图12所示,通过改变rTPS支链的相位,可实现3R、3R1T、3R2T和3R3T这4种运动模式的切换。Kong等^[34]通过可锁铰链设计出一种3自由度多模式并联机构,为其他可锁铰链的多模式机构构型综合

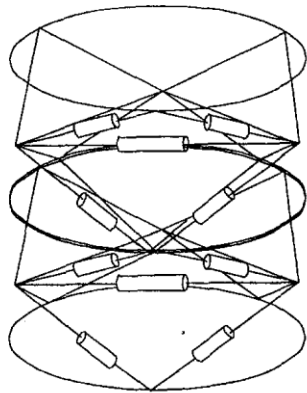


图9 可折展变胞机构

Fig.9 Foldable metamorphic mechanism

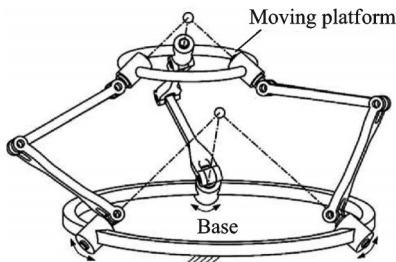


图10 多模式并联机构

Fig.10 Parallel mechanism of multiple operation modes

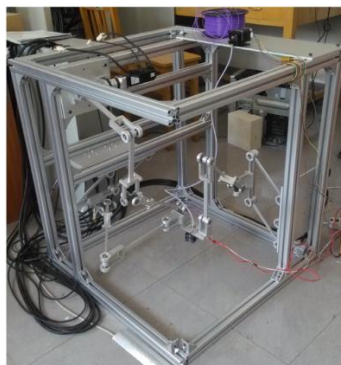


图11 3支链可重构并联机构

Fig.11 Three-legged reconfigurable parallel mechanism

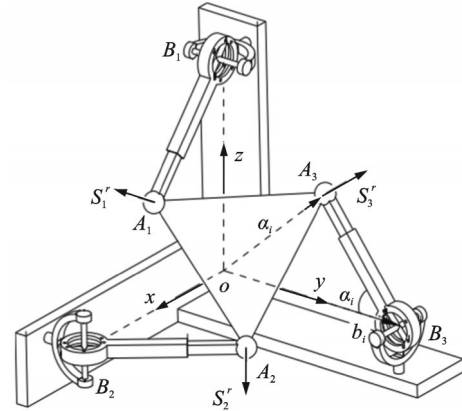


图12 3rTPS变胞并联机构

Fig.12 3rTPS metamorphic parallel mechanism

提供了参考。可重构机构的提出为机构创新设计开辟了新的思路和方法,对新一代智能型可重构机器人的创新与发展具有重要意义。

2 并联机器人位置正解的研究现状

并联机器人位置反解的求解比较容易,但位置正解问题非常复杂,目前还没有完全解决。由于位置正解是运动学、动力学问题的基础,故吸引了众多学者的关注^[35-36]。

从机构结构角度来看,并联机器人可分为平台型和台体型两大类,平台型是指静平台和动平台上的铰链点分别位于同一平面内,台体型是指静平台和/或动平台上的铰链点不位于同一平面内。显然,台体型的铰链布局比平台型更一般化,因此,台体型并联机器人的位置正解问题更复杂。现有的求解方法主要有3类:数值法、封闭法和解析法,如图13所示。

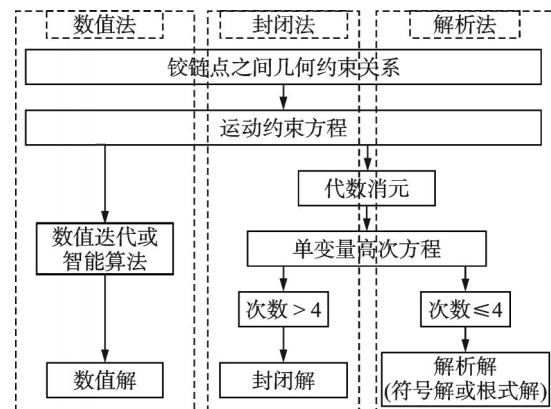


图13 位置正解求解方法流程图

Fig.13 Flow chart of forward position solution methods

2.1 数值法

数值法的核心思想是运用Newton-Raphson法或拟Newton法等对机构的运动约束方程组进行数值逼近迭代运算。Newton-Raphson法和拟Newton法的迭代模型分别如式(1,2)所示,其算法流程如

图 14 所示。其中,实线表示 Newton-Raphson 法,虚线表示拟 Newton 法。

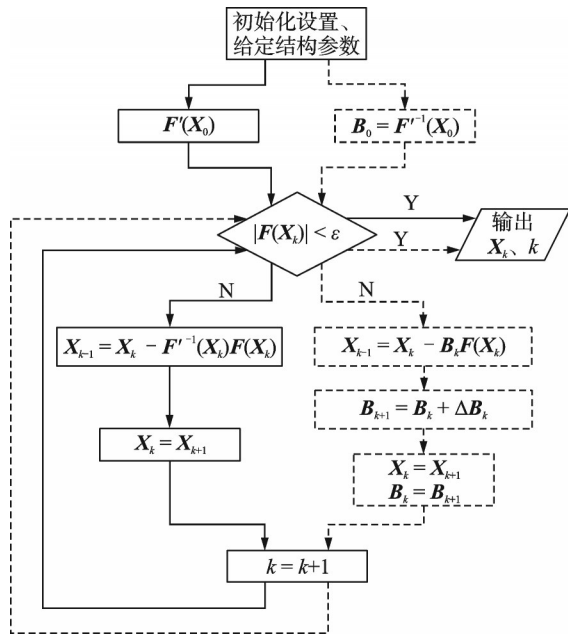


图 14 两种迭代算法流程图

Fig.14 Flow chart of two iterative algorithms

$$X_{k+1} = X_k - F^{-1}(X_k)F(X_k) \quad (1)$$

式中: $X = (x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)^T$; k 为迭代步数; $F(X_k)$ 为 Jacobian 矩阵。

$$\begin{cases} X_{k+1} = X_k - B_k F(X_k) \\ B_{k+1} = B_k + \frac{(S_k - B_k y_k) S_k^T B_k}{S_k^T B_k y_k} \end{cases} \quad (2)$$

式中: $S_k = X_{k+1} - X_k$; $y_k = F(X_{k+1}) - F(X_k)$; $S_k^T B_k y_k \neq 0$ 。

车林仙^[37]提出一种 6-CPS 正交并联机器人机构,基于反馈混沌化的 Newton-Raphson 迭代算法求解了机构的位置正解。张辉等^[38]研究了 Stewart 机构的 4 种运动学正向数值求解方法,结果表明,Newton-Raphson 法的通用性较好但效率较低,改进的 Jacobian 矩阵法能够满足实时性要求。在 Newton-Raphson 法的基础上,耿明超等^[11]将拟 Newton 法应用于并联机器人位置正解的求解,分析了 3-RPS 和 6-RUS 机构的位置正解,结果表明,拟 Newton 法由于迭代求解过程无需构造 Jacobian 矩阵,因此计算量较小,计算效率比 Newton-Raphson 法高。两种算法的效率和迭代过程比较分别如表 1 和 2 所示。薛剑等^[39]将 6-3(前、后数字分别表示静、动平台上铰链点的数目)Stewart 机构等效为虚拟 3-RPS 并联机构,并运用 Newton-Raphson 法计算位置正解,算例结果满足 0.1 ms 控制周期的实时性要求。韩旺等^[40]针对“中国天眼”球面射电望远镜,提出一种基于线驱动并联机构的馈源平台位姿直接测量方法,避免了机构

杆件弹性变形、铰链间隙引入的馈源平台误差。Zhao 等^[41]以动平台的瞬时速度方向作为逐次逼近迭代路径,提出了一种新的数值求解算法,求解了 Stewart 机构的位置正解。强红宾等^[42]以步长矩阵初值及等比参数为变量,提出了一种调整步长 Newton 法,算例结果表明该方法的计算时间小于 Newton 下山法。

表 1 3-RPS 并联机构位置正解算法效率比较

Table 1 Efficiency comparison of forward position solution algorithm of 3-RPS parallel mechanism

序号	Newton-Raphson 法		拟 Newton 法	
	迭代次数	时间/ms	迭代次数	时间/ms
1	4	130	5	18
2	4	130	5	18
3	4	130	6	20
4	4	130	6	19
5	5	135	7	20
平均	4.2	131	5.8	19

表 2 3-RPS 并联机构位置正解算法迭代过程比较

Table 2 Iterative process comparison of forward position solution algorithm of 3-RPS parallel mechanism

步数	Newton-Raphson 法			拟 Newton 法		
	$\alpha/(^\circ)$	$\beta/(^\circ)$	z_p/m	$\alpha/(^\circ)$	$\beta/(^\circ)$	z_p/m
1	0	0	0.500 0	0	0	0.500 0
2	27.55	27.25	0.674 6	27.54	27.25	0.674 6
3	29.87	29.76	0.651 4	29.36	29.11	0.655 3
4	29.99	29.99	0.650 0	29.93	29.86	0.650 6
5	30.00	30.00	0.650 0	29.99	29.98	0.650 1
6	—	—	—	29.99	29.99	0.650 0
7	—	—	—	30.00	30.00	0.650 0

在数值逼近迭代求解过程中,需要给定迭代初值。如果初值位于收敛区间内,计算结果会收敛,否则结果就会发散^[43],如图 15 所示。为了解决这个问题,许多学者选用智能算法,其核心思想是通过数据驱动的方式,学习机构参数与位姿之间的复杂映射关系。Ghorbani 等^[44]运用自适应网络模糊推理算法、多层感知算法和径向基函数神经网络法求解了 6-UPU 并联机构位置正解,结果表明自适应网络模糊推理算法的计算结果更精确。潘芳伟等^[45]采用遗传算法求解了一种平面连杆式 6 自由度并联机器人,该方法简便且具有通用性。Roland 等^[46]运用铰链点之间的误差作为目标函数,提出了一种基于父代中心交叉算子的广义代沟模型(Generalized generation gap model with parent-centric recombination, G3-PCX)遗传算法,求解了 6-6 并联机构位置正解。这些智能算法不依赖于迭代初值

的选取,但训练数据的数量和质量直接影响模型的性能,当输入参数超出训练集的范围时,输出结果可能完全不可信,且误差无法预估,因此并不适用于对算法稳定性要求较高的场合。

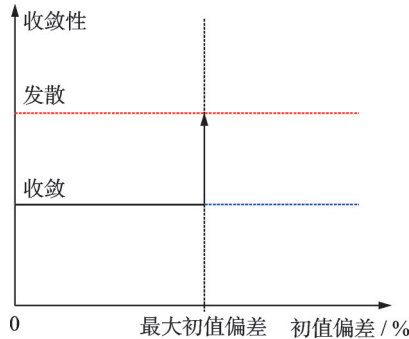


图 15 迭代收敛性

Fig.15 Iterative astringency

2.2 封闭法

封闭法的核心思想是通过消元将位置正解问题化简为一个关于某单变量的4次以上的代数方程^[47-48]。

Huang 等^[49]针对 3-移动副 移动副 球副 (Prismatic-joint prismatic-joint spherical-joint, PPS) 并联机构,运用共形几何代数的方法,推导出一元 8 次方程。高征等^[50]针对 3-U^rRS 并联机构,以动平台 3 个顶点之间的长度为约束条件,建立约束方程,推导出一元 16 次代数方程。Parenti-Castelli 等^[51]针对移动副转动副转动副 (Prismatic-joint revolute-joint revolute-joint, PRR)-3 球副 (Spherical-joint, S) 和移动副移动副转动副 (Prismatic-joint prismatic-joint revolute-joint, PPR)-3S 并联机构,如图 16 所示,根据基本回路方程,推导出一元 16 次和一元 12 次代数方程。Griffis 等^[52]针对 3-3 平台型 Stewart 并联机构,如图 17 所示,运用代数消元方法,推导出一元 16 次代数方程。Lin 等^[53]针对 4-4 平台型 Stewart 并联机构,将其分为 T-T-Q-T-T-Q、T-T-T-Q-T-Q 和 T-T-T-T-Q-Q 这 3 种构型,如图 18 所示,运用球面三角形余弦定理,推导出一元 16 次、一元 8 次和一元 24 次代数方程。Lin 等^[54]针对 5-4 台体型 Stewart 并联机构,根据独立支链的数目将其分为 5-4A、5-4Ba、5-4Bb 和 5-4C 这 4 种构型,如图 19 所示,运用余弦定理消元,分别推导出一元 16 次、一元 24 次、一元 24 次和一元 32 次代数方程。Su 等^[55]运用 Dixon 结式消元,通过构造 8 阶结式,将 5-5A 台体型 Stewart 并联机构的位置正解问题化简成一元 40 次代数方程。Zhang 等^[56]针对 5-5B 台体型 Stewart 并联机构,通过提取约束方程的最大公约数,构建了 10 阶 Sylvester 结式,推导出一元 24 次代数方程如下

$$B_{12}t_2^{12} + B_{11}t_2^{11} + \dots + B_1t_2 + C + D_{11}t_2^{-1} + \dots + D_{12}t_2^{-12} = 0 \quad (3)$$

式中 $B_i, D_i (i=1, 2, \dots, 12)$ 和 C 为关于机构结构参数的表达式。

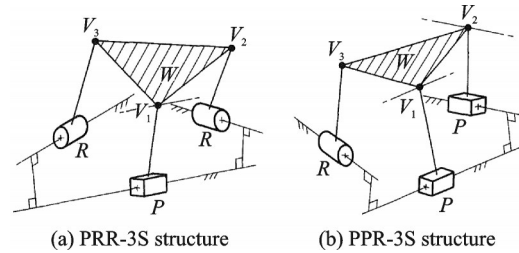


图 16 PRR-3S 和 PPR-3S 并联机构

Fig.16 PRR-3S and PPR-3S parallel mechanisms

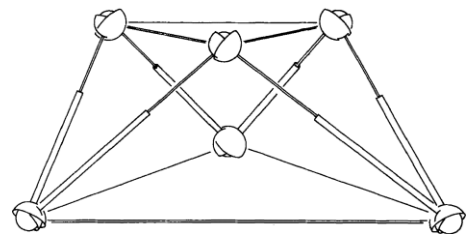


图 17 3-3 平台型 Stewart 并联机构

Fig.17 3-3 platform type Stewart parallel mechanism

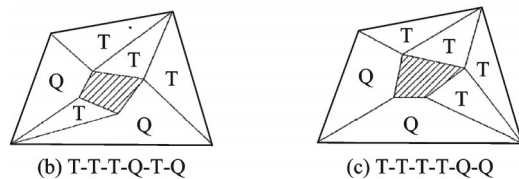
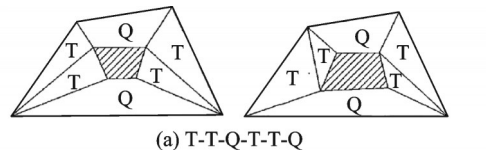


图 18 4-4 平台型 Stewart 并联机构

Fig.18 4-4 platform type Stewart parallel mechanisms

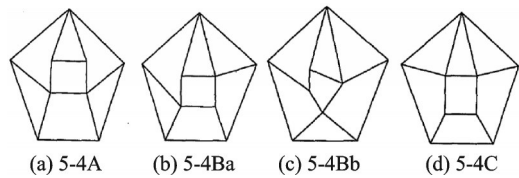


图 19 5-4 台体型 Stewart 并联机构

Fig.19 5-4 in-parallel type Stewart parallel mechanisms

程世利等^[57]针对 6-3 平台型 Stewart 并联机构 (图 20),利用旋转矩阵的正交性和归一性,增加了 5 个相容方程,并运用正交补方法进行消元,最终化简成一元八次代数方程。Innocenti 等^[58]针对 6-3 台体型 Stewart 并联机构,运用代数消元方法将 3 个含 3 个未知量的 2 次代数方程化简成一元 16 次代数方程,最终求得 16 组解。Wen 等^[59]针对 6-4 平台型 Stewart 并联机构,通过构造结式,推导出一元 16 次代数方程,最终求得 32 组解。Innocenti^[60]针对 6-4 台体型 Stewart 并联机构,通过消元方法将 5

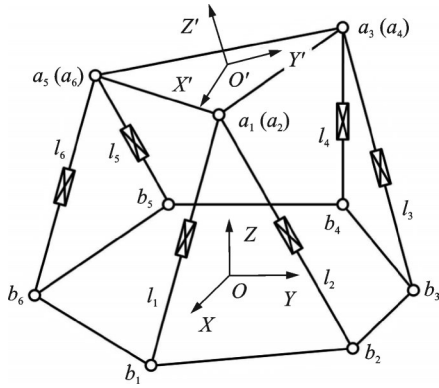


图 20 6-3 平台型 Stewart 并联机构

Fig.20 6-3 platform type Stewart parallel mechanism

个含 5 个未知量的封闭方程化简成一元 32 次代数方程,最终求得 32 组解。黄昔光等^[61]针对 6-5 平台型 Stewart 并联机构,通过代数消元构造了 15 阶结式,推导出一元 20 次代数方程。Huang 等^[62]针对对称 6-6 平台型 Stewart 并联机构,且动、静平台上的铰链点分别位于两个圆上,如图 21 所示,运用代数消元的方法构造了 15 阶 Sylvester 结式,推导出一元 14 次代数方程。黄昔光等^[63]针对一般 6-6 平台型 Stewart 并联机构,运用分次字典序 Gröbner 基算法,构造了 15 阶 Sylvester 结式,推导出一元 20 次代数方程,且该机构最多有 40 组解。Husty^[64]运用运动映射和结式消元方法,将 Gough-Stewart 平台机构的位置正解化简成一元 40 次代数方程。Dhingra 等^[65]运用 Gröbner 基法和 Sylvester 透析消元法相结合的思路,针对 6-6 台体型 Stewart 并联机构,构造了 68 阶 Sylvester 结式,推导出一元 40 次代数方程。Innocenti^[66]针对 6-6 台体型构型,构造了两个 45 阶结式,最终推导出一元 40 次代数方程。Lee 等^[67]针对 6-6 台体型构型,通过构造 28 阶 Sylvester 结式,推导出一元 40 次代数方程。Nag 等^[68]针对 6-6 台体型 Stewart 并联机构,通过 Sylvester 透析消元法和快速 Fourier 变换,建立了一种位置正解求解的几何代数框架。庄育锋等^[69]针对 6-6 台体型构型,运用分次字典序 Gröbner 基和 Sylvester 结式相结合的方法,构造了 20 阶 Sylvester 结式,推导出一元 40 次代数方程如下

$$\begin{cases} \mathbf{M}_{20 \times 20} \mathbf{T} = 0 \\ \sum_{i=0}^{40} s_i c_3^i = 0 \end{cases} \quad (4)$$

式中: $\mathbf{M}_{20 \times 20}$ 为一个关于 c_3 的 20 阶系数矩阵; \mathbf{T} 为一个含有 20 个假想变元的列阵; s_i 为关于输入参数的实系数。

黄昔光等^[70]针对 6-6 台体型构型,运用分次字典序 Gröbner-Sylvester 法,构造了 18 阶 Sylvester

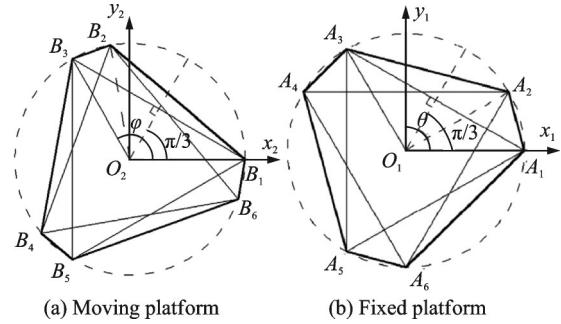


图 21 对称 6-6 平台 Stewart 型并联机构的动、静平台形状
Fig.21 Shapes of moving and fixed platforms of symmetrical 6-6 platform type Stewart parallel mechanism

结式,推导出一元 40 次代数方程。Lee 等^[71]针对 6-6 台体型构型,运用改善的透析消元法,构造了 15 阶 Sylvester 结式,结式维数进一步减小,推导出一元 40 次代数方程。Gan 等^[72]针对 6-6 台体型构型,运用 Gröbner 基法,构造了 13 阶 Sylvester 结式,推导出一元 40 次代数方程。Wei 等^[73]针对 6-6 台体型构型,运用共形几何代数的方法,建立了运动约束方程,如式(5)所示。进一步地,通过构造 9 阶 Sylvester 结式矩阵,化简成一元 40 次代数方程。

$$\mathbf{Q}' = \mathbf{TRQR}^* \mathbf{T}^* \quad (5)$$

式中: $\mathbf{T} = 1 - \frac{1}{2} \mathbf{a} \mathbf{e}_{\infty}$, $\mathbf{R} = u_0 + u_1 \mathbf{e}_{32} + u_2 \mathbf{e}_{13} + u_3 \mathbf{e}_{21}$, $\mathbf{T}^* = 1 + \frac{1}{2} \mathbf{a} \mathbf{e}_{\infty}$, $\mathbf{R}^* = u_0 - u_1 \mathbf{e}_{32} - u_2 \mathbf{e}_{13} - u_3 \mathbf{e}_{21}$, $u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1$, $\mathbf{a} = 2d\mathbf{t}$, d 为位移距离, \mathbf{t} 为运动方向。

由上述分析可知,运用各种消元方法,并联机构的位置正解问题最终可化简为一个一元高次方程,拓扑构型与封闭解性质的对应关系如表 3 所示。当方程最高次数大于 4 次时,所求得解为封闭解,借助全局求解方法(如 Jenkins-Traub 算法或特征值方法),可求得机构所有可能解。然而,封闭法的推导过程异常繁琐。于是,有学者开始尝试添加辅助传感器的方法,其根本目的是减少推导过程中未知量的个数,从而降低方程的复杂程度。Chiu 等^[74]借助两个辅助角度传感器和一个辅助位移传感器,求解了 Stewart 机构的位置正解。Bonev 等^[75]针对 6-6 平台型 Stewart 并联机构,通过在动平台上添加 3 个辅助位移传感器,如图 22 所示,将 9 个广义坐标减少至 6 个,推导出机构的封闭解。卢文娟等^[76]针对 6-UPS 并联机构,在一个虎克铰处添加 2 个角度传感器,测得分支 L_i 的 2 个欧拉角,基于旋转矩阵构建 12 个方程,求解了机构的位置正解。然而,由于传感器的成本较高,且在工作过程中不可避免地存在测量噪声,严重影响了位置正解的求解精度,故这种方法并没有得到推广应用。

表 3 拓扑构型与封闭解性质的对应关系

Table 3 Corresponding relation between topological configurations and closed-form solution properties

拓扑构型	结式阶数	次数	解的个数
3-PPS 并联机构 ^[49]		8	8
3-URS 并联机构 ^[50]	6×6	16	16
PRR-3S 并联机构 ^[51]		16	16
PPR-3S 并联机构 ^[52]		12	12
3-3 平台型 Stewart 并联机构 ^[52]		16	16
4-4 平台型 Stewart 并联机构 ^[53] (T-T-Q-T-T-Q 构型)		16	16
4-4 平台型 Stewart 并联机构 ^[53] (T-T-T-Q-T-Q 构型)		8	16
4-4 平台型 Stewart 并联机构 ^[53] (T-T-T-T-Q-Q 构型)		24	24
5-4A 平台型 Stewart 并联机构 ^[54]		16	16
5-4Ba 平台型 Stewart 并联机构 ^[54]	16×16	24	24
5-4Bb 平台型 Stewart 并联机构 ^[54]		24	24
5-4C 平台型 Stewart 并联机构 ^[54]	16×16	32	32
5-5A 台体型 Stewart 并联机构 ^[55]	8×8	40	40
5-5B 台体型 Stewart 并联机构 ^[56]	10×10	24	24
6-3 平台型 Stewart 并联机构 ^[57]	6×6	8	16
6-3 台体型 Stewart 并联机构 ^[58]	6×6	16	16
6-4 平台型 Stewart 并联机构 ^[59]	10×10	16	32
6-4 台体型 Stewart 并联机构 ^[60]	10×10	32	32
6-5 平台型 Stewart 并联机构 ^[61]	15×15	20	40
6-6 平台型 Stewart 并联机构 ^[62] (对称且共圆)	15×15	14	28
6-6 平台型 Stewart 并联机构 ^[63]	15×15	20	40
	42×42	40	40
	68×68	40	40
	45×45	40	40
	28×28	40	40
6-6 台体型 Stewart 并联机构 ^[64-73]	28×28	40	40
	20×20	40	40
	18×18	40	40
	15×15	40	40
	13×13	40	40
	9×9	40	40

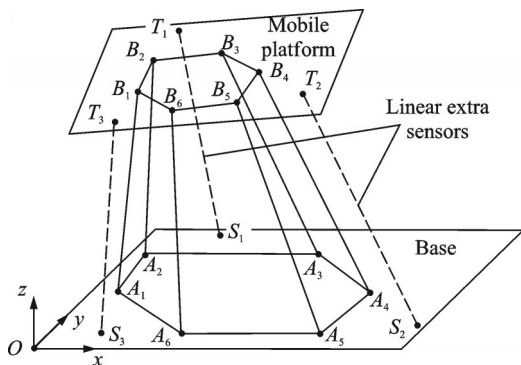


图 22 添加 3 个辅助位移传感器的 6-6 平台型 Stewart 并联机构
Fig.22 A 6-6 platform type Stewart parallel mechanism with three linear extra sensors

2.3 解析法

解析法是将并联机构的位置正解化简为关于输入变量的全解析表达式。换句话说,通过各种消元

方法,将位置正解问题化简为一元高次(次数≤4)方程或者多元一次方程组后可得到解析解,也称为符号解或根式解。解析解是位置正解求解中最优的、最渴望得到的结果,对后续的实时控制、误差补偿、故障诊断和动力学求解等工作极为重要^[5]。

陈子明等^[77]提出了一种新型 3-UPU 对称并联机构,具有两个转动自由度和一个移动自由度。由机构侧面为等腰梯形的特点,求得了该机构的解析式位置正解如下

$$\begin{cases} P = (B_1 + B_2 + B_3) / 3 \\ \alpha = \text{atan} 2(r_{23}, r_{13}) \\ \beta = \arccos r_{33} \end{cases} \quad (6)$$

式中: $B_i(i=1,2,3)$ 表示动平台上的铰链点在静坐标系中的坐标, P 表示动坐标系原点的坐标, r_{ij} 表示矩阵 R 的第 i 行第 j 列元素, $\text{atan} 2(y, x)$ 表示双变量反正切函数, α, β 表示动平台的姿态。

Russo 等^[78]分析了一种 3-UPR 并联机构,解析求解了该机构的位置正解。Chen 等^[79]提出了一种新型 3 自由度过约束并联机构,并推导出该机构位置正解的解析解。

机构耦合度揭示了机构拓扑结构的复杂程度,现有研究表明,机构位置正解的求解难度与机构耦合度指标有关,耦合度越低,位置正解求解越容易,反之则求解越难^[80]。鉴于此,尤晶晶等^[81]发明了一种耦合度为 1 的 12-6 台体型 Stewart 冗余并联机构,如图 23 所示,通过相容方程的同构运算,推导了位置正解的解析解。沈惠平等^[82]运用基于方位特征方程的并联机构拓扑结构设计理论和方法,设计了一种零耦合度的新型 3T 并联机构,求出了机构的符号式位置正解。Shen 等^[83]设计了一类零耦合度的两支链无伴随运动的 2T1R 并联机构,如图 24 所示,求解了机构的符号式位置正解。

由上述分析可知,虽然解析法能够获得方程在复数域内全部根的显式表达,但仅适用于低耦合度

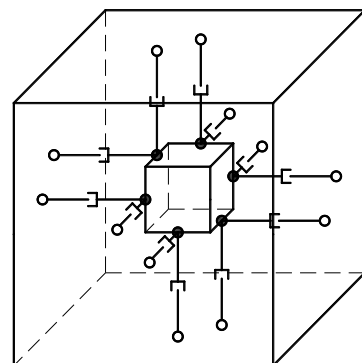


图 23 耦合度为 1 的 12-6 台体型 Stewart 冗余并联机构
Fig.23 12-6 in-parallel Stewart redundant parallel mechanism with one coupling degree

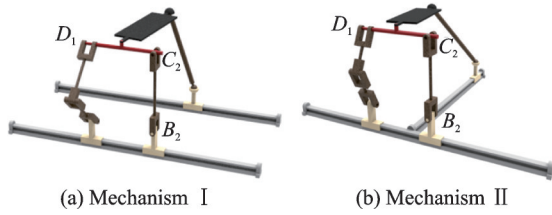


图 24 零耦合度 2T1R 并联机构

Fig.24 2T1R parallel mechanisms with zero coupling degrees

并联机构。因此对于耦合度为 2、3 的并联机构,一般不存在解析形式的位置正解。

3 位置正解求解方法的特性对比

位置正解求解方法的特性分析和对比结果分别如图 25 和表 4 所示。

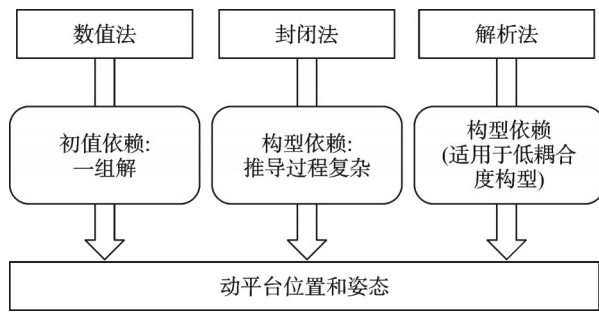


图 25 位置正解求解方法特性分析

Fig.25 Characteristic analysis of forward position solution methods

表 4 位置正解求解方法特性对比

Table 4 Characteristic comparison of forward position solution methods

特性	数值法	封闭法	解析法
初值依赖	是	否	否
全部解	否	是	是
稳定性	低	一般	高
程式化	简单	复杂	简单
通用性	好	差	差
复杂程度	低	高	一般

数值法具有较好的通用性,便于程式化处理,适用于高耦合度和低耦合度并联机构。然而,数值法在计算过程中需要给定初始迭代值,初值偏差过大就会造成算法发散,失去稳定性,而且该方法只能得到一组解,得不到全部可行的装配方式。

封闭法的求解过程无需给定初值,而且可计算出机构所有可能的位置解。然而,该方法推导过程涉及较多复杂的数学理论知识,求解过程非常繁琐,数值稳定性问题尚未得到完全证实,不利于程式化分析计算。另外,该方法对构型的依赖性较强,一种构型对应一种推导方法,通用性较差。

解析法的计算过程无需给定初值,可计算出所有可能的位置解,且便于程式化分析计算。然而,

该方法仅适用于低耦合度构型,对于高耦合度构型(如 6-6 SPS、6-5 SPS 等)并不适用,并且也是一种构型对应一种推导方法,通用性较差。

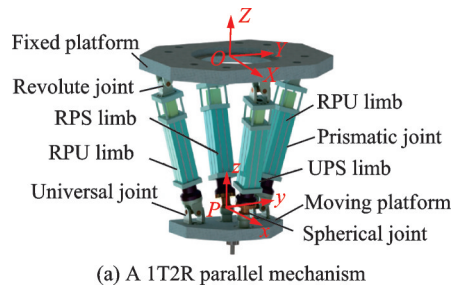
4 研究展望

本文详细阐述了并联机器人位置正解的研究进展,从并联机器人本体的研究现状引入,归纳总结了位置正解求解方法的思想及原理,对比分析了各种求解方法的特性。

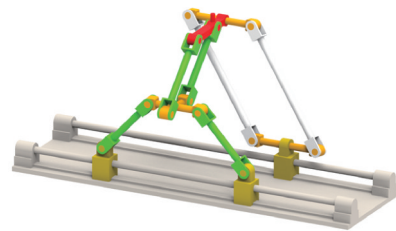
通过文献调研并结合本团队的研究经验,提出以下 3 点展望:

(1) 拓扑结构的低耦合性

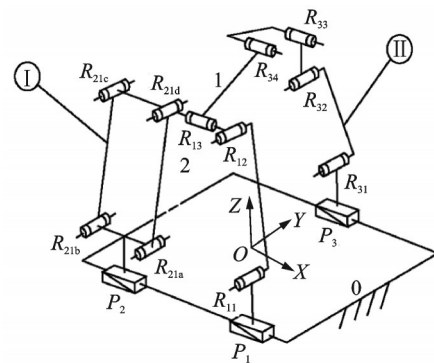
鉴于并联机器人位置正解解析解的优越性,新型低耦合度并联机器人的综合设计与研发是重要研究方向之一。文献[79,84-85]设计了低耦合度且具有解析式位置正解的并联机构,如图 26 所示,优异的运动性能使得这些机构具有较大的工业应用价值。针对现有的高耦合度构型,需要进一步探究通过拓扑降耦降低机构耦合度的方法,例如设计混合支链、设计复合运动副等方法。图 27 中列出了一种可供参考的研究思路,即首先通过添加虚拟



(a) A 1T2R parallel mechanism



(b) A 3T parallel mechanism



(c) A 2T1R parallel mechanism

图 26 低耦合度且具有解析式位置正解的并联机构

Fig.26 Parallel mechanisms with low coupling degree and analytical forward kinematics

支链的方法,将高耦合度并联机构重构为低耦合度并联机构。然后,基于铰链点之间的几何约束关系,建立机构的输入位移协调方程。接着,运用消元方法求解出虚拟支链长度,将其代入低耦合度构型的位置正解解析解中,即可计算出高耦合度并联机构的位置正解。该求解思路显著降低了高耦合度并联机构位置正解求解的复杂程度。

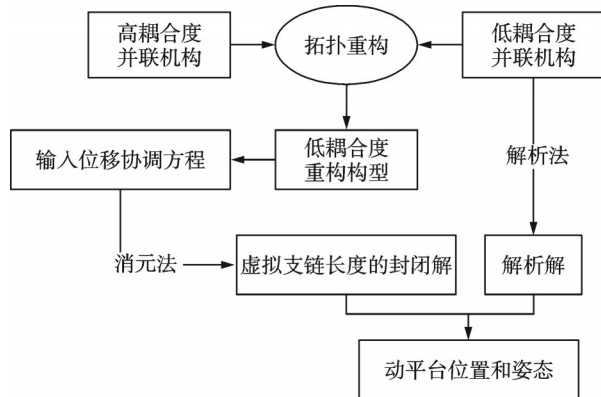


图 27 拓扑降耦思路求解位置正解的流程

Fig.27 Process of solving the forward position solution by topology coupling-reducing idea

(2)求解算法的融合性

如图 28 所示,目前非线性代数方程组的求解方法主要有数值迭代法、Gröbner 基方法、吴方法、结式消元法和智能算法等。运用单一方法求解会出现初值难确定、解的个数不确定、稳定性和通用性差等一系列问题。在诸多领域,对高精度、高效的正解算法需求迫切。比如,APAS-89 航天器对接机构正解算法的性能提升能够降低舱体对接过程中的相对速度和碰撞力^[86];6-移动副移动副球副

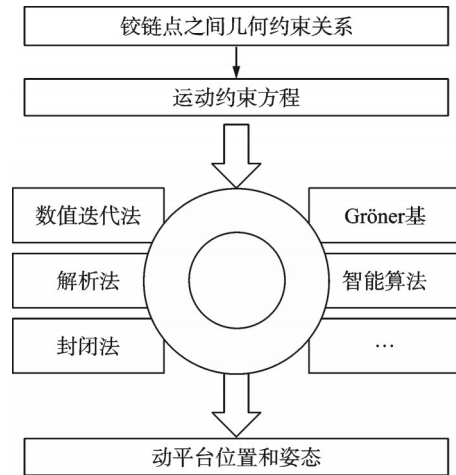


图 28 算法的融合

Fig.28 Fusion of algorithms

微操作机器人正解算法的性能提升能够提高机器人手术过程中的操作精度^[87];Hexapod 并联机床正解算法的性能提升能够提高加工过程中刀具的定位精度和响应速度^[88]。因此,将多种算法进行融合并取长补短,是一个重要的研究方向。

(3)正解个数的依赖性

准确获得并联机器人位置正解的个数有助于其轨迹规划、工作空间计算和奇异性能分析。并联机器人位置正解的个数与机构的几何结构和拓扑结构均有关,其依赖性关系如图 29 所示。

在几何结构方面,并联机构的支链布局、动铰链点位置关系以及动、静平台形状等因素均会影响位置正解的个数。根据动平台的形状,平台型并联机构可分为完全对称、半对称和非对称 3 种。完全对称类型根据动铰链点位置关系可分为 4 种情况

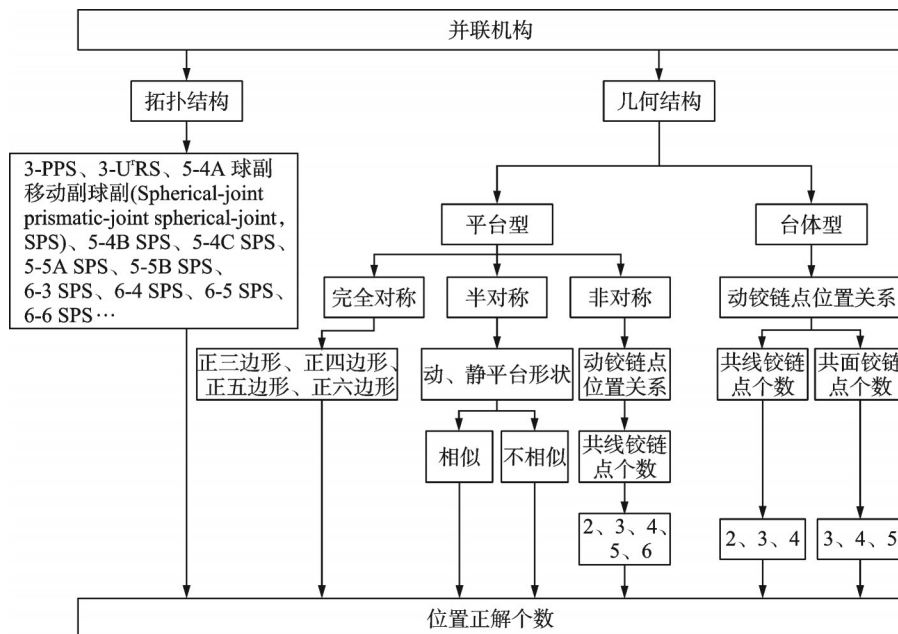


图 29 位置正解个数的依赖性

Fig.29 Dependence of the number of forward position solutions

进行分类探究:正三角形、正四边形、正五边形、正六边形;半对称类型可根据动、静平台形状是否相似进一步探究;非对称类型可根据共线动铰链点的个数进一步探究。根据动铰链点的位置关系,台体型并联机构可从共线动铰链点个数和共面动铰链点个数两个方向进行探究。

在拓扑结构方面,不同构型(如3-PPS、3-U^rRS、5-4A SPS、5-4B SPS、5-4C SPS、5-5A SPS、5-5B SPS、6-3 SPS、6-4 SPS、6-5 SPS、6-6 SPS等)所对应的位置正解的个数也不一样。从特殊拓扑构型出发,探究不同拓扑构型与位置正解个数之间的关联是一个可行的策略。因此,可从特殊结构到一般结构的研究思路出发,逐步建立机构构型与位置正解个数之间的关联。这对并联机构的尺度综合、构型综合和实际应用均具有重要意义。

参考文献:

- [1] 韩子航,陈力,韩大鹏.基于变论域模糊补偿的空间机器人自适应控制[J].南京航空航天大学学报,2024,56(3):424-431.
HAN Zihang, CHEN Li, HAN Dapeng. Adaptive control of space robot based on variable universe fuzzy compensation[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2024, 56(3): 424-431.
- [2] STEWART D. A platform with six degrees of freedom[J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, 1965, 180(15): 371-386.
- [3] 叶鹏达,尤晶晶,仇鑫,等.并联机器人运动性能的研究现状及发展趋势[J].南京航空航天大学学报,2020,52(3):363-377.
YE Pengda, YOU Jingjing, QIU Xin, et al. Status and development trend of motion performance in parallel robot[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2020, 52(3): 363-377.
- [4] 李喜先.21世纪100个交叉科学难题[M].北京:科学出版社,2005.
LI Xixian. 100 Interdisciplinary science puzzles of the 21st century[M]. Beijing: Science Press, 2005.
- [5] 尤晶晶,史浩飞,张显著.并联式六维加速度感知机构的操作性能研究进展[J].光学精密工程,2023,31(19):2867-2883.
YOU Jingjing, SHI Haofei, ZHANG Xianzhu. Research process on operation performances of parallel type six-axis acceleration sensing mechanisms[J]. Optics and Precision Engineering, 2023, 31(19): 2867-2883.
- [6] ANTONOV A, GLAZUNOV V. Position, velocity, and workspace analysis of a novel 6-DOF parallel manipulator with "piercing" rods[J]. Mechanism and Machine Theory, 2021, 161: 104300.
- [7] WANG Ke, LI Ju, SHEN Huiping, et al. Inverse dynamics of a 3-DOF parallel mechanism based on analytical forward kinematics[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2022, 35: 119.
- [8] SHI X, FENTON R G. Solution to the forward instantaneous kinematics for a general 6-DOF Stewart platform[J]. Mechanism and Machine Theory, 1992, 27(3): 251-259.
- [9] 金振林,赵现朝,范文刚.基于6-PSS正交并联机构的新微操作机器人的位置分析[J].燕山大学学报,2002,26(1):23-26.
JIN Zhenlin, ZHAO Xianchao, FAN Wengang. The position analysis for a novel micro-motion manipulator based on 6-PSS orthogonal parallel mechanism[J]. Journal of Yanshan University, 2002, 26(1): 23-26.
- [10] 刘艳梨,程世利,蒋素荣,等.带位移传感器的6-UPS并联机构运动学正解[J].机械工程学报,2018,54(5):1-7.
LIU Yanli, CHENG Shili, JIANG Surong, et al. Forward kinematics of 6-UPS parallel manipulators with one displacement sensor[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2018, 54(5): 1-7.
- [11] 耿明超,赵铁石,王唱,等.基于拟Newton法的并联机构位置正解[J].机械工程学报,2015,51(9):28-36.
GENG Mingchao, ZHAO Tieshi, WANG Chang, et al. Direct position analysis of parallel mechanism based on quasi-Newton method[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2015, 51(9): 28-36.
- [12] 赵铁石,陈江,王家春,等.4-UPU并联机器人机构及其运动学[J].中国机械工程,2005,16(22):2034-2038.
ZHAO Tieshi, CHEN Jiang, WANG Jiachun, et al. 4-UPU parallel manipulator mechanism and kinematics [J]. China Mechanical Engineering, 2005, 16(22): 2034-2038.
- [13] ROJAS N, THOMAS F. The forward kinematics of 3-RPR planar robots: A review and a distance-based formulation[J]. IEEE Transactions on Robotics, 2011, 27(1): 143-150.
- [14] 韩方元,赵丁选,李天宇.3-RPS并联机构正解快速数值算法[J].农业机械学报,2011,42(4):229-233.
HAN Fangyuan, ZHAO Dingxuan, LI Tianyu. A fast forward algorithm for 3-RPS parallel mechanism [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2011, 42(4): 229-233.
- [15] CANDELA V, PERIS R. A class of third order iterative Kurchatov-Steffensen (derivative free) methods for solving nonlinear equations[J]. Applied Mathematics and Computation, 2019, 350: 93-104.
- [16] CHEN Genliang, KANG Yezheng, LIANG Zhen-

- kun, et al. Kinetostatics modeling and analysis of parallel continuum manipulators[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2021, 163: 104380.
- [17] NABAVI N S, SHARIATEE M, ENFERADI J, et al. Parametric design and multi-objective optimization of a general 6-PUS parallel manipulator[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2020, 152: 103913.
- [18] SHEN Nanyan, GENG Liang, LI Jing, et al. Improved stiffness modeling for an Exechon-like parallel kinematic machine (PKM) and its application[J]. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2020, 33: 40.
- [19] REN J, LAN A. Compliance modeling and kinetostatic analysis of a generalized 3-PSS compliant parallel micro-motion platform[J]. *Micromachines*, 2024, 15: 354.
- [20] 李世其, 陈栋, 王峻峰. 并联机构实现舱段对接的姿态测量方法及试验研究[J]. *工程科学与技术*, 2021, 53(3): 150-158.
- LI Shiqi, CHEN Dong, WANG Junfeng. Pose measurement method and experimental study in the docking of cabins by parallel mechanism[J]. *Advanced Engineering Sciences*, 2021, 53(3): 150-158.
- [21] QIU Jiahao, WU Jun, ZHU Bin. Optimization design of a parallel surgical robot with remote center of motion [J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2023, 185: 105327.
- [22] CHENG Gang, XU Peng, YANG Dehua, et al. Stiffness analysis of a 3CPS parallel manipulator for mirror active adjusting platform in segmented telescope[J]. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, 2013, 29: 302-311.
- [23] GWINNETT J E. Amusement device: US1789680 [P]. 1931-01-20.
- [24] POLLARD W L G. Spray painting machine: US2213108[P]. 1940-08-27.
- [25] HUNT K H. Kinematic geometry of mechanisms[M]. Oxford, UK: Clarendon Press, 1978.
- [26] MACCALLION H, PHAM D T. The analysis of a six degree of freedom work station for mechanized assembly[C]//Proceedings of the 5th World Congress on Theory of Machines and Mechanisms. Montreal, Canada: ASME, 1979: 611-616.
- [27] 黄真, 孔令富, 方跃法. 并联机器人机构学理论与控制[M]. 北京: 机械工业出版社, 1997.
- HUANG Zhen, KONG Lingfu, FANG Yuefa. Mechanism theory and control of parallel robot[M]. Beijing: China Machine Press, 1997.
- [28] DAI Jiansheng, ZHANG Qixian. Metamorphic mechanisms and their configuration models[J]. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2000, 13(3): 212-218.
- [29] WOHLHART K. Kinematotropic linkages[C]//Proceedings of the 5th International Symposium on Advances in Robot Kinematics. Liberec, Czech Republic: Kluwer Academic Publishers, 1996: 359-368.
- [30] DAI Jiansheng, JONES R J. Mobility in metamorphic mechanisms of foldable/erectable kinds[J]. *Journal of Mechanical Design*, 1999, 121(3): 375-382.
- [31] KONG Xianwen, GOSSELIN C M, RICHARD P L. Type synthesis of parallel mechanisms with multiple operation modes[J]. *Journal of Mechanical Design*, 2007, 129(6): 595-601.
- [32] YE Wei, FANG Yuefa, GUO Sheng. Design and analysis of a reconfigurable parallel mechanism for multidirectional additive manufacturing[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2017, 112: 307-326.
- [33] GAN Dongming, DAI J S, DIAS J, et al. Reconfigurability and unified kinematics modeling of a 3rTPS metamorphic parallel mechanism with perpendicular constraint screws[J]. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, 2013, 29: 121-128.
- [34] KONG Xianwen, JIN Yan. Type synthesis of 3-DOF multi-mode translational/spherical parallel mechanisms with lockable joints[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2016, 96: 323-333.
- [35] YE Pengda, YOU Jingjing, XI Fengfeng, et al. An interval discretization method for workspace determination of parallel mechanisms[J]. *Arabian Journal for Science and Engineering*, 2022, 47: 8805-8827.
- [36] WANG Ke, LI Ju, SHEN Huiping, et al. Inverse dynamics of a 3-DOF parallel mechanism based on analytical forward kinematics[J]. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2022, 35: 119.
- [37] 车林仙. 6-CPS 正交并联机器人位置正解分析[J]. *农业机械学报*, 2009, 40(11): 212-218.
- CHE Linxian. Forward position analysis of 6-CPS orthogonal parallel manipulators[J]. *Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery*, 2009, 40(11): 212-218.
- [38] 张辉, 王启明, 叶佩青, 等. 通用 Stewart 平台运动学正向数值求解方法及应用[J]. *机械工程学报*, 2002, 38(S1): 108-112.
- ZHANG Hui, WANG Qiming, YE Peiqing, et al. Forward kinematics of general Stewart platform and the application[J]. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2002, 38(S1): 108-112.
- [39] 薛剑, 唐志勇, 裴忠才. 6-3 Stewart 平台位置正解的机构简化数值方法[J]. *北京航空航天大学学报*, 2014, 40(7): 921-926.
- XUE Jian, TANG Zhiyong, PEI Zhongcai. Numerical method of forward position solution for 6-3 Stewart

- platform based on mechanism simplification[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2014, 40(7): 921-926.
- [40] 韩旺,段学超,仇原鹰,等.基于线驱动并联机构的FAST馈源平台位姿测量方法[J].机械工程学报, 2017, 53(17): 43-49.
HAN Wang, DUAN Xuechao, QIU Yuanying, et al. Position-orientation measurement method for the FAST feed platform based on wire-driven parallel mechanism[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2017, 53(17): 43-49.
- [41] ZHAO Xinhua, PENG Shangxian. A successive approximation algorithm for the direct position analysis of parallel manipulators[J]. Mechanism and Machine Theory, 2000, 35: 1095-1101.
- [42] 强红宾,王力航,姜雪,等.基于调整步长牛顿法的Stewart并联机构位置正解[J].光学精密工程, 2018, 26(12): 2982-2990.
QIANG Hongbin, WANG Lihang, JIANG Xue, et al. Forward kinematics of Stewart parallel manipulator based on step-adjusting Newton method[J]. Optics and Precision Engineering, 2018, 26(12): 2982-2990.
- [43] GAO Changhong, YANG Zhidong, ZHENG Shupeng, et al. An algorithm for real-time forward kinematics of 6-degree-of-freedom parallel mechanisms [J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering, 2018, 232(2): 109-120.
- [44] GHORBANI L, OMURLU V E. Forward kinematics of a 6×6 UPU parallel mechanism by ANFIS method[C]//Proceedings of the 6th International Conference on Control Engineering & Information Technology. Istanbul, Turkey: IEEE, 2018.
- [45] 潘芳伟,段志善,贺利乐,等.基于遗传算法的新型六自由度并联机器人运动学分析[J].机械科学与技术, 2007, 26(6): 770-774.
PAN Fangwei, DUAN Zhishan, HE Lile, et al. Kinematics analysis of a novel 6-DOF parallel platform manipulator using genetic algorithm[J]. Mechanical Science and Technology for Aerospace Engineering, 2007, 26(6): 770-774.
- [46] ROLLAND L, CHANDRA R. The forward kinematics of the 6-6 parallel manipulator using an evolutionary algorithm based on generalized generation gap with parent-centric crossover[J]. Robotica, 2016, 31(1): 1-22.
- [47] 沈惠平,许可,杨廷力.基于单开链有序求解的机构正向运动学建模原理及其两种求解方法[J].中国机械工程, 2020, 31(14): 1647-1658.
SHEN Huiping, XU Ke, YANG Tingli. A novel forward position kinematics modelling principle for mechanisms based on ordered solutions for SOC units and its two solving methods[J]. China Mechanical Engineering, 2020, 31(14): 1647-1658.
- [48] 李文林.数学史概论[M].北京:高等教育出版社, 2011.
LI Wenlin. A history of mathematics[M]. Beijing: Higher Education Press, 2011.
- [49] HUANG Xiguang, MA Chaoyang, SU Haijun. A geometric algebra algorithm for the closed-form forward displacement analysis of 3-PPS parallel mechanisms[J]. Mechanism and Machine Theory, 2019, 137: 280-296.
- [50] 高征,高峰.6自由度3-U²RS并联机构的位置正解分析[J].机械工程学报, 2007, 43(12): 171-177.
GAO Zheng, GAO Feng. Forward position analysis of 6-DOF 3-U²RS parallel mechanism[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2007, 43(12): 171-177.
- [51] PARENTI-CASTELLI V, INNOCENTI C. Forward displacement analysis of parallel mechanisms: Closed form solution of PRR-3S and PPR-3S structures[J]. Journal of Mechanical Design, 1992, 114(1): 68-73.
- [52] GRIFFIS M, DUFFY J. A forward displacement analysis of a class of Stewart platforms[J]. Journal of Robotic Systems, 1989, 6(6): 703-720.
- [53] LIN W, GRIFFIS M, DUFFY J. Forward displacement analyses of the 4-4 Stewart platforms[J]. Journal of Mechanical Design, 1992, 114(3): 444-450.
- [54] LIN Wei, CRANE III C D, DUFFY J. Closed-form forward displacement analysis of the 4-5 in-parallel platforms[J]. Journal of Mechanical Design, 1994, 116(1): 47-53.
- [55] SU Haijun, LIAO Qizheng, LIANG Chonggao. Direct positional analysis for a kind of 5-5 platform in-parallel robotic mechanism[J]. Mechanism and Machine Theory, 1999, 34: 285-301.
- [56] ZHANG Ying, LIAO Qizheng, SU Haijun, et al. A new closed-form solution to the forward displacement analysis of a 5-5 in-parallel platform[J]. Mechanism and Machine Theory, 2012, 52: 47-58.
- [57] 程世利,吴洪涛,王超群,等.基于正交补的6-3 Stewart并联机构运动学正解[J].中国机械工程, 2011, 22(5): 505-509.
CHENG Shili, WU Hongtao, WANG Chaoqun, et al. Forward kinematics analysis of 6-3 Stewart parallel mechanisms based on orthogonal complement method [J]. China Mechanical Engineering, 2011, 22(5): 505-509.
- [58] INNOCENTI C, PARENTI-CASTELLI V. Direct position analysis of the Stewart platform mechanism

- [J]. Mechanism and Machine Theory, 1990, 25(6): 611-621.
- [59] WEN Fuan, LIANG Chonggao. Displacement analysis of the 6-6 Stewart platform mechanisms[J]. Mechanism and Machine Theory, 1994, 29(4): 547-557.
- [60] INNOCENTI C. Direct kinematics in analytical form of the 6-4 fully-parallel mechanism[J]. Journal of Mechanical Design, 1995, 117(1): 89-95.
- [61] 黄昔光, 李雷雷, 廖启征, 等. 一般 6-5 型平台并联机构位置正解[J]. 机械设计与研究, 2013, 29(S): 118-120.
HUANG Xiguang, LI Leilei, LIAO Qizheng, et al. Direct kinematics for a general 6-5 planar parallel mechanism[J]. Machine Design and Research, 2013, 29(S): 118-120.
- [62] HUANG Xiguang, LIAO Qizheng, WEI Shimin. Closed-form forward kinematics for a symmetrical 6-6 Stewart platform using algebraic elimination[J]. Mechanism and Machine Theory, 2010, 45: 327-334.
- [63] 黄昔光, 廖启征, 魏世民, 等. 一般 6-6 型平台并联机构位置正解代数消元法[J]. 机械工程学报, 2009, 45(1): 56-61.
HUANG Xiguang, LIAO Qizheng, WEI Shimin, et al. Forward kinematics analysis of the general 6-6 platform parallel mechanism based on algebraic elimination [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2009, 45(1): 56-61.
- [64] HUSTY M L. An algorithm for solving the direct kinematics of general Stewart-Gough platforms[J]. Mechanism and Machine Theory, 1996, 31(4): 365-380.
- [65] DHINGRA A K, ALMADI A N, KOHLI D. A Gröbner-Sylvester hybrid method for closed-form displacement analysis of mechanisms[J]. Journal of Mechanical Design, 2000, 122(4): 431-438.
- [66] INNOCENTI C. Forward kinematics in polynomial form of the general Stewart platform[J]. Journal of Mechanical Design, 2001, 123(2): 254-260.
- [67] LEE T Y, SHIM J K. Forward kinematics of the general 6-6 Stewart platform using algebraic elimination [J]. Mechanism and Machine Theory, 2001, 36: 1073-1085.
- [68] NAG A V S, BANDYOPADHYAY S. A uniform geometric-algebraic framework for the forward kinematic analysis of 6-6 Stewart platform manipulators of various architectures and other related 6-6 spatial manipulators[J]. Mechanism and Machine Theory, 2021, 155: 104090.
- [69] 庄育锋, 黄昔光, 廖启征. Stewart 台体并联机器人位置正解[J]. 北京航空航天大学学报, 2009, 35(1): 48-51.
ZHUANG Yufeng, HUANG Xiguang, LIAO Qizheng. Direct kinematics of Stewart mechanism robot [J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2009, 35(1): 48-51.
- [70] 黄昔光, 廖启征, 魏世民, 等. 基于 Gröbner-Sylvester 法的一般 6-6 型台体并联机构位置正解[J]. 西安交通大学学报, 2008, 42(3): 300-303.
HUANG Xiguang, LIAO Qizheng, WEI Shimin, et al. Forward kinematics of general 6-6 Stewart mechanisms based on Gröbner-Sylvester approach[J]. Journal of Xian Jiao Tong University, 2008, 42(3): 300-303.
- [71] LEE T Y, SHIM J K. Improved dialytic elimination algorithm for the forward kinematics of the general Stewart-Gough platform[J]. Mechanism and Machine Theory, 2003, 38: 563-577.
- [72] GAN D M, LIAO Q Z, DAI J S, et al. Forward displacement analysis of the general 6-6 Stewart mechanism using Gröbner bases[J]. Mechanism and Machine Theory, 2009, 44: 1640-1647.
- [73] WEI Feng, WEI Shimin, ZHANG Ying, et al. Algebraic solution for the forward displacement analysis of the general 6-6 Stewart mechanism[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2016, 29(1): 56-62.
- [74] CHIU Y J, PERNG M H. Forward kinematics of a general fully parallel manipulator with auxiliary sensors [J]. The International Journal of Robotics Research, 2001, 20(5): 401-414.
- [75] BONEV I A, RYU J, KIM S G, et al. A closed-form solution to the direct kinematics of nearly general parallel manipulators with optimally located three linear extra sensors[J]. IEEE Transactions on Robotics and Automation, 2001, 17(2): 148-156.
- [76] 卢文娟, 郑旭, 荣令魁, 等. 一种基于角度传感器的 6-UPS 机构正向运动学分析方法[J]. 机器人, 2020, 42(5): 550-556.
LU Wenjuan, ZHENG Xu, RONG Lingkui, et al. A method for forward kinematics analysis of 6-UPS mechanism based on angle sensor[J]. Robot, 2020, 42(5): 550-556.
- [77] 陈子明, 张扬, 黄坤, 等. 一种无伴随运动的对称两转一移并联机构[J]. 机械工程学报, 2016, 52(3): 9-17.
CHEN Ziming, ZHANG Yang, HUANG Kun, et al. Symmetrical 2R1T parallel mechanism without parasitic motion[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2016, 52(3): 9-17.
- [78] RUSSO M, HERRERO S, ALTUZARRA O, et al. Kinematic analysis and multi-objective optimization of a 3-UPR parallel mechanism for a robotic leg[J]. Mechanism and Machine Theory, 2018, 120: 192-202.
- [79] CHEN Miao, ZHANG Qing, QIN Xianrong, et al. Kinematic, dynamic, and performance analysis of a

- new 3-DOF over-constrained parallel mechanism without parasitic motion[J]. Mechanism and Machine Theory, 2021, 162: 104365.
- [80] 沈惠平,尹洪波,王振,等.基于拓扑结构分析的求解6-SPS并联机构位置正解的研究[J].机械工程学报,2013,49(21):70-80.
SHEN Huiping, YIN Hongbo, WANG Zhen, et al. Research on forward position solutions for 6-SPS parallel mechanisms based on topology structure analysis [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2013, 49 (21): 70-80.
- [81] 尤晶晶,符周舟,吴洪涛,等.12-6台体型Stewart冗余并联机构正向运动学研究[J].农业机械学报,2017,48(12):395-402.
YOU Jingjing, FU Zhouzhou, WU Hongtao, et al. Forward kinematics of general 12-6 Stewart redundant parallel mechanism[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2017, 48(12): 395-402.
- [82] 沈惠平,吉昊,许正骁,等.三平移机构设计与运动学符号解及性能评价[J].农业机械学报,2020,51(9):397-406.
SHEN Huiping, JI Hao, XU Zhengxiao, et al. Design, kinematic symbolic solution and performance evaluation of new three translation mechanism[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2020, 51(9): 397-406.
- [83] SHEN Huiping, TANG Yao, WU Guanglei, et al. Design and analysis of a class of two-limb non-parasitic 2T1R parallel mechanism with decoupled motion and symbolic forward position solution-influence of optimal arrangement of limbs onto the kinematics, dynamics and stiffness[J]. Mechanism and Machine Theory, 2022, 172: 104815.
- [84] SHEN Huiping, ZHAO Yinan, LI Ju, et al. A novel partially-decoupled translational parallel manipulator with symbolic kinematics, singularity identification and workspace determination[J]. Mechanism and Machine Theory, 2021, 164: 104388.
- [85] 沈惠平,孔祥超,李菊,等.正解符号化且运动解耦的2T1R并联机构拓扑设计及分析[J].农业机械学报,2024,55(5):449-458.
SHEN Huiping, KONG Xiangchao, LI Ju, et al. Topological design and analysis of novel 2T1R parallel mechanism with symbolic forward solutions and motion decoupling[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2024, 55(5): 449-458.
- [86] 张崇峰,姚建,刘志,等.我国载人航天器对接机构技术发展[J].航天器工程,2022,31(6):205-212.
ZHANG Chongfeng, YAO Jian, LIU Zhi, et al. Technical development of docking mechanism of manned spacecraft in China[J]. Spacecraft Engineering, 2022, 31(6): 205-212.
- [87] ZHENG Hao, LIANG Chenbo, GAO Feng, et al. Design of a novel macro-micro integrated brain surgery robot based on modular parallel mechanisms[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2024, 37: 130.
- [88] FRIEDRICH C, SCHLÜTER F, IHLENFELDT S. Spatial hybrid/parallel force control of a hexapod machine tool using structure-integrated force sensors and a commercial numerical control[J]. Mechatronics, 2023, 94: 103007.

(编辑:陈珺)