

DOI:10.16356/j.1005-2615.2025.06.018

基于螺旋理论的 Hexaglide 型并联机构奇异性分析

刘子晗, 李成刚, 苑嘉璇, 苏耀, 马潇阳

(南京航空航天大学机电学院, 南京 210016)

摘要: 以 Hexaglide 型并联机构为研究对象, 通过对并联机构的几何特性分析, 得到每条支链的单位力旋量, 结合并联机构的静力平衡条件, 推导出该并联机构的一阶力影响系数矩阵, 基于构造零列的方法使一阶力影响系数矩阵行列式奇异, 进而确定了使该并联机构发生奇异的几何条件, 通过构造行、列线性相关性的方法推导出 Hexaglide 型并联机构不会发生构型奇异的条件, 在此基础上, 将 3 类奇异条件统一转化为参数化表达式, 定义了可量化的几何安全距离指标, 可代入优化模型用于设计阶段的奇异规避, 为该机构的设计提供了理论支持和方法依据。

关键词: 并联机构; 奇异性; 几何特征; 螺旋理论; 静力平衡

中图分类号: TP242 文献标志码: A 文章编号: 1005-2615(2025)06-1222-07

Singularity Analysis of Hexaglide Parallel Mechanism Based on Screw Theory

LIU Zihan, LI Chenggang, YUAN Jiaxuan, SU Yao, MA Xiaoyang

(College of Mechanical and Electrical Engineering, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics,
Nanjing 210016, China)

Abstract: Taking the Hexaglide-type parallel mechanism as the research object, the unit wrench screw of each limb is obtained by analyzing the geometric characteristics of the mechanism, and the first-order force influence coefficient matrix is derived based on the static equilibrium conditions. Using a zero-column construction method, the determinant of this matrix is made singular, thereby identifying the geometric conditions under which the mechanism becomes singular. Furthermore, by constructing linear dependencies among rows and columns, the conditions under which the Hexaglide mechanism does not exhibit configuration singularity are derived. On this basis, three types of singularity conditions are unified into a parametric form, and a quantifiable geometric safety distance index is defined, which can be incorporated into an optimization model for singularity avoidance at the design stage. This work provides theoretical support and a methodological foundation for the design of such mechanisms.

Key words: parallel mechanism; singularity; geometric characteristics; screw theory; static equilibrium

相对于串联机构, 并联机构具有输出精度高、动态特性好、刚度大^[1]、累积误差小且结构稳定紧凑等优点, 是机构学研究领域的主要研究方向之一。

Hexaglide 型并联机构是瑞士苏黎世联邦理工

学院机床研究所提出的概念^[2], 它与 Stewart 型并联机构类似, 但动平台是通过 6 条固定长度的支撑杆和静平台上的滑块相连, 杆的两端可通过球铰或者虎克铰与动、静平台连接, 当使用虎克铰连接时, 为了保证每条支链的自由度为 6, 支撑杆应可以绕

收稿日期: 2025-03-10; 修定日期: 2025-09-19

通信作者: 李成刚, 男, 副教授, 硕士生导师, E-mail: lichenggang@nuaa.edu.cn。

引用格式: 刘子晗, 李成刚, 苑嘉璇, 等. 基于螺旋理论的 Hexaglide 型并联机构奇异性分析[J]. 南京航空航天大学学报(自然科学版), 2025, 57(6): 1222-1228. LIU Zihan, LI Chenggang, YUAN Jiaxuan, et al. Singularity analysis of hexaglide parallel mechanism based on screw theory[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics (Natural Science Edition), 2025, 57(6): 1222-1228.

自身轴线旋转。

该构型的并联机构将电机固定在静平台的直线导轨上,减轻了支撑杆的质量,也使得整个并联机构可以沿着导轨双向快速运动,因此非常适合进行高效、精确的操作^[3]。在海上风洞模拟^[4]、车辆运动仿真^[5]、航空航天、加工制造等领域^[6]都有广泛的应用前景。

自并联机构问世以来,其运动学正逆解、工作空间、动力学和奇异性等一系列问题就受到研究界的广泛关注,其中,奇异性对求解并联机构的有效工作空间、制定各项同性、灵活性等性能指标至关重要,对奇异性的分析可以有效地影响和指导并联机构的结构设计和应用^[7]。Slavutin等^[8]通过融合Aronhold-Kennedy定理和Assur图奇异特性分析提出了一种空间并联机构奇异性判据的新方法。Yang等^[9]在约束奇异性分类中引入微分流形及其空间理论,建立了一个关于约束奇异性分析的新体系并推导出并联机构的某些奇异性在特定工作场景下可转化为有益特性的结果。Cheng等^[10]通过单变量多项式方程建模与雅可比矩阵秩亏分析,揭示姿态角临界值对奇异轨迹形态转变及构型空间分类规律。Huo等^[11]借助几何代数将空间向量和旋转表示等几何对象与矩阵乘法、矢量外积等计算方式相结合,使得并联机构的空间几何问题统一在一个代数系统中进行处理,用于确定并联机构的运动、约束、自由度和奇异性。

本文以一种Hexaglide型并联机构为例,对并联机构的奇异进行分析,设计合理的平台铰点布局。

1 一阶力影响系数矩阵

1.1 机构与坐标系

本文研究的Hexaglide型并联机构简图以及建立的坐标系如图1所示。

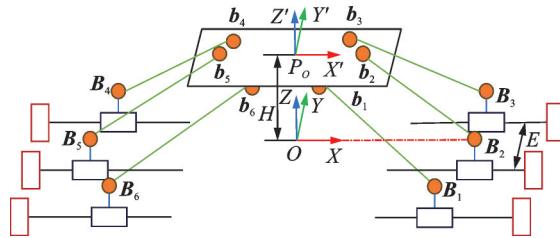


图1 并联机构简图与坐标系

Fig.1 Schematic and coordinate systems of parallel mechanism

建立世界坐标系 $\{O\}$,原点定义在6个下平台铰点中心所在的平面上,动平台局部坐标系 $\{P_o\}$ 的原点定义在6个上平台铰点中心所在的平面上。下平台的铰点坐标在世界坐标系 $\{O\}$ 下表示为 $B_i = [B_{i1}, B_{i2}, B_{i3}]$ $(i=1, 2, \dots, 6)$,上平台铰点坐

标在局部坐标系 $\{P\}$ 下表示为 $b_i = [b_{i1}, b_{i2}, b_{i3}]$ $(i=1, 2, \dots, 6)$,在世界坐标系下表示为 $s_i = [s_{i1}, s_{i2}, s_{i3}]$ $(i=1, 2, \dots, 6)$ 。则 $s_i = R \cdot b_i + P$,其中, R 为刚体旋转矩阵, P 为刚体平移矢量。6根完全相同的支撑杆长度均设为 l , E 为相邻两个直线导轨轴线的间距, H 为上平台与下平台在世界坐标系下 Z 方向上的初始偏置。

x_i $(i=1, 2, \dots, 6)$ 为上、下平台世界坐标系下铰点坐标 X 方向上的偏差,选取 $|B_{i1}| - |s_{i1}| > 0$ $(i=1, 2, \dots, 6)$,即如图1所示,最终可得

$$\begin{aligned} x_i = B_{i1} - s_{i1} &= \alpha_i \sqrt{l^2 - H^2 - (\delta_i E + \kappa_i s_{i2})^2} \\ i &= 1, 2, \dots, 6 \end{aligned} \quad (1)$$

式中: α_i 、 κ_i 均为符号系数, δ_i 为偏置系数,其取值如表1所示。

表1 各系数取值表格

Table 1 Values of each coefficient

i	α_i	δ_i	κ_i
1	+1	1	-1
2	+1	0	-1
3	+1	1	+1
4	-1	1	+1
5	-1	0	-1
6	-1	1	-1

设定并联机构的初始状态为:上、下平台平行,世界坐标系 $\{O\}$ 的 Z 轴与局部坐标系 $\{P\}$ 的 Z' 轴重合。此时,上平台的铰点在局部坐标系下坐标为

$$b_i = [b_{i1}, b_{i2}, 0]^T \quad (2)$$

在世界坐标系下坐标为

$$s_i = [b_{i1}, b_{i2}, H]^T \quad (3)$$

下平台的铰点在世界坐标系下坐标为

$$B_i = \begin{cases} [x_i + b_{i1}, -E, 0]^T & i=1, 6 \\ [x_i + b_{i1}, 0, 0]^T & i=2, 5 \\ [x_i + b_{i1}, E, 0]^T & i=3, 4 \end{cases} \quad (4)$$

需要注意的是,有对称特征的铰点布置具有稳定性、更加规则的工作空间等优势,因此大部分并联机构的动平台都采用等角半正六边形式铰点布置。为了保证Hexaglide型并联机构的工作性能,平台铰点布置应有一定的对称特征,并且应避免在机构工作过程中使各支链之间轻易发生干涉。

1.2 奇异判别矩阵

综合上文分析,Hexaglide型并联机构的一般构型及静力分析如图2所示。

图2中,上平台所承受的所有外力可以简化为通过上平台一点的力 F 和对该点的力矩 M ,将6个力表示为力旋量后,由上平台处于静止状态,可以得到螺旋方程

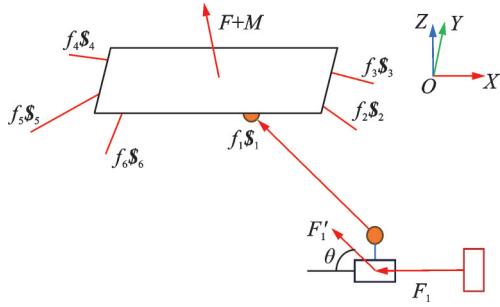


图 2 并联机构静力分析

Fig.2 Static analysis of parallel mechanisms

$$\sum_{i=1}^6 f_i \$_i = F + M \quad \$_i = V_i + \in V_{0i} \quad (5)$$

$$L' = \begin{bmatrix} H & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ H & EH & 0 & 0 & 0 & 0 \\ H & 2EH & b_{12} - 2b_{22} + b_{32} & 0 & 0 & 0 \\ H & 2EH & b_{12} - 2b_{22} + b_{42} & 2x_2 - x_1 - x_4 + \frac{A_1(b_{12} - 2b_{22} + b_{42})}{A_2} & 0 & 0 \\ H & EH & b_{52} - b_{22} & x_2 - x_5 - \frac{A_1(b_{22} - b_{52})}{A_2} & A_3 & 0 \\ H & 0 & b_{62} - b_{12} & x_1 - x_6 - \frac{A_1(b_{12} - b_{62})}{A_2} & A_4 & A_5 \end{bmatrix} \quad (8)$$

式中

$$\begin{cases} A_1 = x_1 - 2x_2 + x_3 \\ A_2 = b_{12} - 2b_{22} + b_{32} \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} A_3 &= H(b_{21} + x_2) - H(b_{51} + x_5) + \\ &\left(x_5 - x_2 + \frac{(b_{22} - b_{52})A_1}{A_2} \right) \cdot \\ &\left[H \cdot A_6 - \frac{H \cdot A_7(A_1 + A_8)}{A_2} \right] - \\ &A_9 - \frac{A_1 A_7}{A_2} \\ &\frac{H(b_{22} - b_{52})(A_1 + A_8)}{A_2} \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} A_4 &= H(b_{11} + x_1) - H(b_{61} + x_6) + \\ &\left(x_6 - x_1 + \frac{(b_{12} - b_{62})A_1}{A_2} \right) \cdot \\ &\left[H \cdot A_6 - \frac{H \cdot A_7(A_1 + A_8)}{A_2} \right] - \\ &A_9 - \frac{A_1 A_7}{A_2} \\ &\frac{H(b_{12} - b_{62})(A_1 + A_8)}{A_2} \end{aligned} \quad (11)$$

$$A_5 = E(b_{61} - b_{11}) - b_{12}(b_{11} + x_1) + b_{62}(b_{61} + x_6) + \Delta_1 \quad (12)$$

其中各个中间变量分别为

$$\begin{cases} A_6 = b_{11} + x_1 - 2(b_{21} + x_2) + b_{41} + x_4 \\ A_7 = b_{12} - 2b_{22} + b_{42} \\ A_8 = b_{11} - 2b_{21} + b_{31} \\ A_9 = x_1 - 2x_2 + x_4 \end{cases} \quad (13)$$

式中: f_i 为第 i 杆受到的轴向力, $\$_i$ 为单位力旋量。 V_i 为第 i 个支撑杆的单位向量, V_{0i} 为单位力旋量的偶部, “ \in ” 为对偶符号。

式(5)可简化表达为

$$V \cdot f = F \quad (6)$$

式中 V 为初始的一阶力影响系数矩阵。进一步化简得到最终的奇异判别矩阵

$$L = \begin{bmatrix} s_1 - B_1 & \cdots & s_6 - B_6 \\ s_1 \times B_1 & \cdots & s_6 \times B_6 \end{bmatrix} \quad (7)$$

将式(3、4)代入式(7)并经过计算后可以得到一个下三角矩阵

$$\text{矩阵中元素 } A_5 \text{ 的表达式非常复杂,但在后续计算中可以排除该元素会对判别矩阵行列式值为0发生作用的可能性,在此只显示后续需要证明的多项式,其他被忽略的多项式记为 } \Delta_1.$$

2 奇异性分析

当一阶力影响系数矩阵行列式为零时,可以判断并联机器人一定处于奇异位形。

观察 L' 发现,一阶力影响系数矩阵的行列式非常复杂和冗长,因此将其变化为更容易观察坐标关系的下三角矩阵形式。

通过 L' 可以清晰得到使 L' 行列式为 0 的条件,即令对角线上某一元素为 0。但得到的平台铰点坐标关系反代入式(3)后进行矩阵计算并不能使 L 秩亏,因为在 L 做高斯消元得到 L' 的过程中, L' 对角线元素为 0 得到的关系会使中间变换矩阵的某个主元为 0, 高斯消元失效, 做行列变换再继续消元后将得到不同于 L' 的下三角矩阵。

下面基于矩阵 L' 的结构特性,通过构造零列的方式推导出该矩阵的行列式为 0 的条件。

2.1 在前 5 列中构造零列

第 1 列和第 2 列只存在 E, H 两个常数项,无法使一整列的元素全为 0。第 3 列开始出现与上平台铰点坐标相关的变量,从中找出可以使整列为 0 的变量关系式即可,从第 3 列中可以得到关系式如下

$$\begin{cases} 2b_{22}=b_{12}+b_{32} \\ b_{32}=b_{42} \\ b_{52}=b_{22} \\ b_{62}=b_{12} \end{cases} \quad (14)$$

在第4列后3行中观察到每个元素中的 x_i 与 b_{i2} 能够一一对应,则式(15)可使第4列每一个元素都为0,则

$$x_i=b_{i2} \quad i=1, 2, \dots, 6 \quad (15)$$

第5列中 A_3 和 A_4 的表达式较长,但依然可以得到令其为0的关系式。首先要排除第3列和第4列得到的关系式,避免在高斯消元的过程中由于前一列主元为0而无法得到第5列的元素。其次,以前文所限定的平台铰点应有一定的对称特征,根据 A_3 、 A_4 的多项式为线索,假设一个关系式使线性项抵消或合并、令分式中的分子与分母形成对称结构、构成符号相异等,指定关系式(20),第5列会构成零列,则

$$\begin{cases} b_{i1}=-b_{(i+3)1} \\ b_{i2}=-b_{(i+3)2} \quad i=1, 2, 3 \\ x_i=-x_{(i+3)} \end{cases} \quad (16)$$

得到了可以约束12个自变量的关系式,但同时该矩阵还受到式(1)的约束,为了避免约束矛盾,将式(16)中 b_{i2} 代入式(1)后,得到关系式 $x_i=-x_{(i+3)}$, $i=1, 2, 3$,与式(16)的约束相同,第5列得到的上平台铰点坐标的关系式存在。

2.2 构造第6列为零列

第6列中 A_5 表达式复杂,设定其为0,得到上平台铰点坐标的关系非常困难,可以通过前三列的约束获取规律。

在式(8)中拥有12个自变量 b_{11} 和 b_{22} ,6个因变量 x_i 。在第3列中,使用4个方程得到了 b_{i2} 之间的关系式(14),通过该关系看出, b_{32} 、 b_{42} 、 b_{52} 和 b_{62} 可以用 b_{12} 和 b_{22} 表示,只要再添加2个约束 b_{12} 和 b_{22} 的方程,6个自变量就全部被约束。第4列能够得到 b_{i2} 与 x_i 之间的关系式(15),式(15)中 x_i 被替换为 b_{i2} ,此时式(1)关于每个组上、下平台铰点的 x_i 的等式变为一元二次方程,当方程满足一元二次方程有根判别式时,可以推导出 $x_i=b_{i2}=\text{常数}$,并根据 x_i 的符号得到唯一解,此时会呈现出一个新的关系式为

$$x_i=b_{i2}=-x_{i+3}=-b_{(i+3)2} \quad i=1, 2, 3 \quad (17)$$

结合式(1,17)就可以将6个自变量全部约束。第5列得到了12个自变量的关系式(16),只要给关系式(16)中的 b_{11} 、 b_{22} 提供约束,就可以约束全部12个自变量。

第5列的条件已经得到全部12个自变量之间的关系,只需要赋值就可以用尽矩阵的自由度。若第6列引入更多独立约束条件,在保证支链不轻易

发生干涉、有一定对称特征且不能满足前几列得到的关系式的前提下,更多独立的约束条件会导致矛盾。比如式(12)的3个多项式展示了第1组上、下平台铰点和第6组上、下平台铰点的关系,为了使该3项最终结果为0,需要 $b_{11}=b_{61}$, $b_{12}=b_{62}$, $x_1=x_6$,该关系式中的 $x_1=x_6$ 和式(1)矛盾,因此 $A_5=0$ 无法成立。

2.3 构造行的线性相关性

通过构造行之间的线性相关性找到平台铰点的布置特征。上一节已经通过使一列的每个元素都为0来判别矩阵行列式为0,本节需要设定一个前置条件,即矩阵的每一个有自变量的元素都不为0,通过确定某些自变量之间的关系并搭配确定的系数使该列的元素之和为0。

将行系数表示为 c_i ($i=1, 2, \dots, 6$),则只要满足

$$\sum_{i=1}^6 c_i f_i' = 0 \quad (c_i \neq 0) \quad (18)$$

式中 f_i' 为 L' 中的第*i*个行向量。通过式(8)的前两列常数每一列乘对应系数相加为0以及 $A_5 \neq 0$ 的条件可以得到前置限制条件如下

$$\begin{cases} c_2 + 2c_3 + 2c_4 + c_5 = 0 \\ \sum_{i=1}^6 c_i = 0 \\ c_6 = 0 \end{cases} \quad (19)$$

在第5列中构造等式如下

$$c_5 A_3 + c_6 A_4 = 0 \quad (20)$$

式中 $c_6=0$,则式(20)变为 $c_5 A_3 = 0$ 。在前面的限制中已知 $A_3 \neq 0$,则 $c_5=0$ 。同理在第4列构造等式如下

$$c_4 L'(4, 4) + c_5 L'(5, 4) + c_6 L'(6, 4) = 0 \quad (21)$$

因为 $c_5=c_6=0$,式(21)变为 $c_4 L'(4, 4)=0$,又 $L'(4, 4) \neq 0$,则 $c_4=0$ 。第1~3列重复此过程,最终得到

$$c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = c_5 = c_6 = 0 \quad (22)$$

该结论与线性相关的定义相悖,因此无法得到不全为0的系数标量使 L' 的6行元素之间线性相关,即 L' 在不满足上文铰点坐标关系的情况下下三角区元素都不为0,则Hexaglide型并联机构不会发生奇异。

3 结果分析与仿真

3.1 奇异条件的构型分析

经过第2章的分析可以得到3组有一定对称特征的上平台铰点坐标。

通过式(14)可以得到上、下平台铰点坐标为

$$\begin{cases} \mathbf{b}_1 = [b_{11}, b_{12}, 0]^T \\ \mathbf{b}_2 = \left[b_{21}, \frac{b_{12} + b_{32}}{2}, 0 \right]^T \\ \mathbf{b}_3 = [b_{31}, b_{32}, 0]^T \\ \mathbf{b}_4 = [b_{41}, b_{32}, 0]^T \\ \mathbf{b}_5 = \left[b_{51}, \frac{b_{12} + b_{32}}{2}, 0 \right]^T \\ \mathbf{b}_6 = [b_{61}, b_{12}, 0]^T \end{cases} \quad (23)$$

$$\begin{cases} \mathbf{B}_1 = [x_1 + b_{11}, -E, 0]^T \\ \mathbf{B}_2 = [x_2 + b_{21}, 0, 0]^T \\ \mathbf{B}_3 = [x_3 + b_{31}, E, 0]^T \\ \mathbf{B}_4 = [-x_3 + b_{41}, E, 0]^T \\ \mathbf{B}_5 = [-x_2 + b_{51}, 0, 0]^T \\ \mathbf{B}_6 = [-x_1 + b_{61}, -E, 0]^T \end{cases} \quad (23)$$

则上平台铰点布置不需要在 X 方向上有任何关系, 只要满足以上的铰点坐标特征, 即会出现奇异。计算出其每条支链的方向向量为

$$\begin{cases} \mathbf{s}_1 - \mathbf{B}_1 = [-x_1, b_{12} + E, H]^T \\ \mathbf{s}_6 - \mathbf{B}_6 = [x_1, b_{12} + E, H]^T \\ \mathbf{s}_2 - \mathbf{B}_2 = [-x_2, \frac{b_{12} + b_{32}}{2} + E, H]^T \\ \mathbf{s}_5 - \mathbf{B}_5 = \left[x_2, \frac{b_{12} + b_{32}}{2} + E, H \right]^T \\ \mathbf{s}_3 - \mathbf{B}_3 = [-x_3, b_{32} + E, H]^T \\ \mathbf{s}_4 - \mathbf{B}_4 = [x_3, b_{32} + E, H]^T \end{cases} \quad (24)$$

可以看出, $\mathbf{s}_i - \mathbf{B}_i$ 与 $\mathbf{s}_{i+3} - \mathbf{B}_{i+3}$ 关于 YOZ 平面对称。

通过式(15)可以得到上、下平台铰点坐标为

$$\begin{cases} \mathbf{b}_1 = [b_{11}, b_{12}, 0]^T \\ \mathbf{b}_2 = [b_{21}, b_{22}, 0]^T \\ \mathbf{b}_3 = [b_{31}, b_{32}, 0]^T \\ \mathbf{b}_4 = [b_{41}, -b_{12}, 0]^T \\ \mathbf{b}_5 = [b_{51}, -b_{22}, 0]^T \\ \mathbf{b}_6 = [b_{61}, -b_{32}, 0]^T \end{cases} \quad (25)$$

$$\begin{cases} \mathbf{B}_1 = [b_{12} + b_{11}, -E, 0]^T \\ \mathbf{B}_2 = [b_{22} + b_{21}, 0, 0]^T \\ \mathbf{B}_3 = [b_{32} + b_{31}, E, 0]^T \\ \mathbf{B}_4 = [-b_{12} + b_{41}, E, 0]^T \\ \mathbf{B}_5 = [-b_{22} + b_{51}, 0, 0]^T \\ \mathbf{B}_6 = [-b_{32} + b_{61}, -E, 0]^T \end{cases} \quad (25)$$

由上文推导出的式(17), 计算出其每条支链的方向向量为

$$\begin{cases} \mathbf{s}_i - \mathbf{B}_i = [-b_{i2}, b_{i2} + E, H]^T \\ \mathbf{s}_{i+3} - \mathbf{B}_{i+3} = [b_{i2}, -b_{(i+3)2} - E, H]^T \end{cases} \quad (26)$$

可以看出 $\mathbf{s}_i - \mathbf{B}_i$ 与 $\mathbf{s}_{i+3} - \mathbf{B}_{i+3}$ 关于 Z 轴中心对称。

通过式(16)可以得到上、下平台铰点坐标为

$$\begin{cases} \mathbf{b}_1 = [b_{11}, b_{12}, 0]^T \\ \mathbf{b}_2 = [b_{21}, b_{22}, 0]^T \\ \mathbf{b}_3 = [b_{31}, b_{32}, 0]^T \\ \mathbf{b}_4 = [-b_{11}, -b_{12}, 0]^T \\ \mathbf{b}_5 = [-b_{21}, -b_{22}, 0]^T \\ \mathbf{b}_6 = [-b_{31}, -b_{32}, 0]^T \end{cases} \quad (27)$$

$$\begin{cases} \mathbf{B}_1 = [x_1 + b_{11}, -E, 0]^T \\ \mathbf{B}_2 = [x_2 + b_{21}, 0, 0]^T \\ \mathbf{B}_3 = [x_3 + b_{31}, E, 0]^T \\ \mathbf{B}_4 = [-x_1 - b_{11}, E, 0]^T \\ \mathbf{B}_5 = [-x_1 - b_{21}, 0, 0]^T \\ \mathbf{B}_6 = [-x_1 - b_{31}, -E, 0]^T \end{cases} \quad (27)$$

计算出每条支链的方向向量

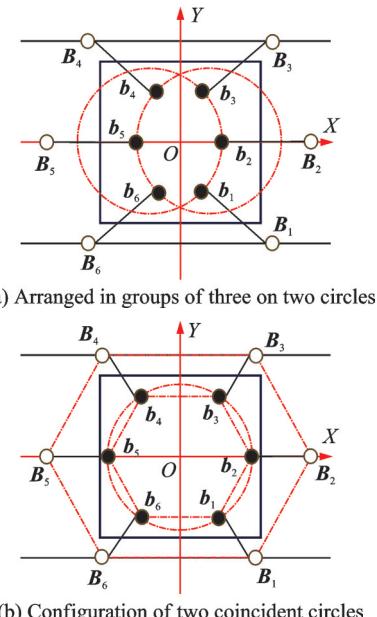
$$\begin{cases} \mathbf{s}_i - \mathbf{B}_i = [-x_i, b_{i2} + E, H]^T \\ \mathbf{s}_{i+3} - \mathbf{B}_{i+3} = [x_{i+3}, -b_{(i+3)2} - E, H]^T \end{cases} \quad (28)$$

可以看出, $\mathbf{s}_i - \mathbf{B}_i$ 与 $\mathbf{s}_{i+3} - \mathbf{B}_{i+3}$ 关于 Z 轴中心对称。

在满足第 5 列得到的关系式的前提下添加更多的约束条件

$$\begin{cases} b_{11} = b_{31} \\ b_{22} = 0 \\ b_{12} = -b_{32} \end{cases} \quad (29)$$

则会呈现如图 3(a)结构的上、下铰点布置, 6 个点以 Y 轴为分界, 3 个 1 组的分布两个圆心于 X 轴、关于 Y 轴对称的圆上。若再加一个约束条件, 即两个圆重合, 如图 3(b)所示。可以发现在初始静止状态下, 该配置的 Hexaglide 型并联机构可以明显等效为 Stewart 型并联机构, 同时也满足 Stewart 型并联机构上、下平台图形相似而各对应点相连就会发生构型奇异的结论^[12]。



(b) Configuration of two coincident circles

图 3 两种类 Stewart 型并联机构的布置

Fig.3 Two Stewart-like parallel mechanism configurations

3.2 仿真分析

分别建立符合 3、4、5 列铰点坐标关系的 Hexaglide 型并联机构进行仿真实验, 初始状态下保持

并联机构的上、下平台相对位置与图1所示基准状态一致,在所有滑块锁止且只有重力作用的工况下,其位姿参数时序响应如图4所示。可见图4中(a,b,c)三者趋势相似,均在0~2.5 s间,上平台位姿参数基本保持稳定,在3 s左右系统状态发生突变,其中位置变化非常小,速度发生一定变化,加速度出现急剧上升。该动力学行为表明,在现有构型条件下,并联机构出现了奇异现象,上平台在特定工况下产生非预期运动。

上述3种构型的并联机构在仿真期间均会出现在上平台即将运动的一瞬间,仿真软件报错的情况,查找原因后,得知该错误是因为在当前状况下,并联机构出现了雅可比矩阵奇异,机构自由度实际丧失,运动方程无法求解,约束不再满足,导致仿真软件无法继续求解运动方程,这种报错同样印证了这些构型会在初始状态下出现奇异现象。

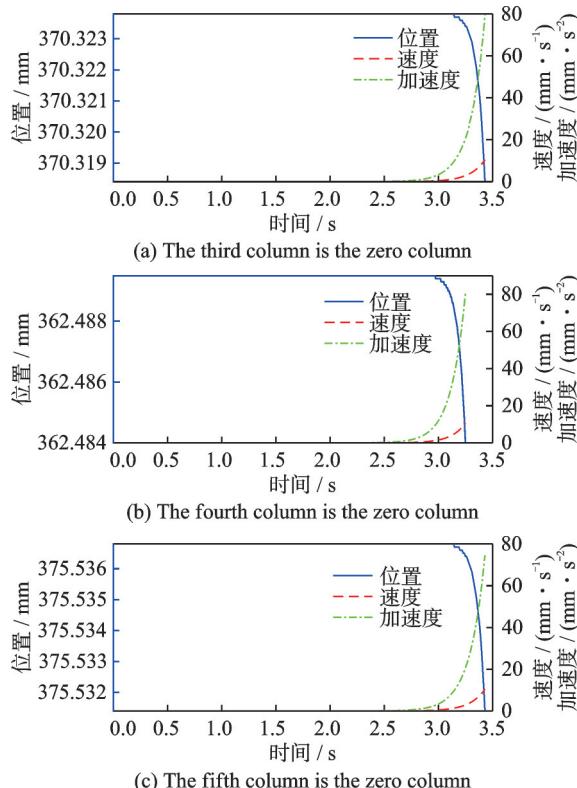


图4 每列构型上平台位置、速度、加速度随时间的变化
Fig.4 Variation of position, velocity, and acceleration of the upper platform over time obtained from each column

3.3 虎克铰在奇异中的影响

值得一提的是,如果所使用的并联机构支链中存在双端虎克铰,应注意上平台虎克铰的轴线方向问题,不同的布置方式会产生不同的自由度,从而可能导致机构发生奇异^[13]。特殊的布置方式在使用速度雅可比矩阵验证时并不能发现奇异^[14],而需要通过螺旋理论才可以找到^[15]。

4 奇异条件参数化与设计优化

为了便于在设计阶段直接使用,本文利用得到的上、下铰点坐标关系以及 $s_i - B_i$,将3类奇异条件进行参数化表达。

记支链方向向量为

$$j_i(p) = s_i(p) - B_i(p) \quad i=1, 2, \dots, 6 \quad (30)$$

式中: s_i 和 B_i 分别为上铰点、下铰点在世界坐标系中的位置; p 为设计参数, $p = [b_{ij}, B_{ij}, E, H, L], i=1, 2, \dots, 6, j=1, 2, 3$ 。

引入两个标准对称变换为

$$\begin{cases} R_{yz} = [-1, 1, 1] & YOZ \text{面镜像} \\ R_{xy} = [-1, -1, 1] & \text{绕} Z \text{轴旋转} 180^\circ \end{cases} \quad (31)$$

由式(23,24)可得到上铰点 b_{i2} 之间的关系,并发现3对支链方向向量关于 YOZ 平面对称,对应1和6、2和5、3和4,具体如下

$$\begin{cases} l_1 - R_{yz}l_6 = 0 \\ l_2 - R_{yz}l_5 = 0 \\ l_3 - R_{yz}l_4 = 0 \\ b_{22} - \frac{b_{12} + b_{32}}{2} = 0 \end{cases} \quad (32)$$

将式(32)合并记为 $S^{(3)}(p) = 0$ 。

由式(25,26)可得到3对支链方向向量中心对称或绕 Z 轴旋转 180° 时,即

$$\begin{cases} l_i - R_{xy}l_{i+3} = 0 & i=1, 2, 3 \\ x_i - b_{i2} = 0 & i=1, 2, \dots, 6 \\ b_{i2} + b_{(i+3)2} = 0 & i=1, 2, \dots, 6 \\ x_i + x_{(i+3)} = 0 & i=1, 2, \dots, 6 \end{cases} \quad (33)$$

将式(33)合并记为 $S^{(4)}(p) = 0$ 。

由式(28)同样可得到3对支链方向向量的成对对称关系为

$$\begin{cases} l_i - R_{xy}l_{i+3} = 0 \\ b_{i1} + b_{(i+3)1} = 0 \\ b_{i2} + b_{(i+3)2} = 0 \\ x_i + x_{(i+3)} = 0 \\ i=1, 2, 3 \end{cases} \quad (34)$$

将式(34)合并记为 $S^{(5)}(p) = 0$ 。

3类奇异判据可整体表达为

$$S^{(n)}(p) = 0 \quad \exists n \in \{3, 4, 5\} \quad (35)$$

为了在设计阶段系统规避奇异,将式(35)奇异判据代入机器人设计方法中。根据3类奇异设定几何安全距离为

$$\begin{cases} d^{(n)}(p) = \|S^{(n)}(p)\|_2 \\ d(p) = \min_{n \in \{3, 4, 5\}} d^{(n)}(p) \end{cases} \quad (36)$$

式中: $d^{(n)}(p)$ 为设计参数 p 到本文第 n 种奇异的距离, $d(p)$ 即为几何安全距离,取3种奇异中最小的

一个距离。在设计阶段施加 $d(p) \geq \delta$, δ 为最小安全距离,以此来保证远离这 3 类奇异。

实际优化过程中,在确定构型的前提下,将 3 类奇异条件转化为几何安全距离约束 $d(p) \geq \delta$ 并融入优化模型中,结合行程、转角等工程边界,可对设计参数进行优化。

5 结 论

本文基于螺旋理论,对 6 自由度的 Hexaglide 型并联机构建立了坐标系并设计自变量,推导出一阶力影响系数矩阵。通过分析该矩阵的三角形式,发现无法仅以对角线元素为 0 来判定 6 个向量的线性相关性。提出构造零列的方法,使下三角判别矩阵的行列式为 0,并由此推导出使整列元素为 0 的平台铰点坐标关系。进一步归纳出 3 种会导致机构发生奇异的铰点坐标特征。

在构造零列的基础上,又构造了行的线性相关性条件,推导出当不满足零行条件且上下三角区的元素均不为 0 时,机构不会发生构型奇异。仿真结果表明,在设定初始条件下,动平台位置、速度和加速度仍会变化;且在这些奇异构型中,各支链方向向量呈现两两关于某平面或某轴的对称关系,这为铰点布局设计提供了几何上的解释。

基于上述分析,本文将 3 类奇异条件统一转化为参数化表达式,定义了可量化的几何安全距离 $d(p)$,可通过设定最小安全距离 δ ,并将 $d(p) \geq \delta$ 代入优化模型中,直接用于设计阶段的奇异规避。

参考文献:

- [1] 黄宁宁, 尤晶晶, 叶鹏达, 等. 一种运动可解耦的 Stewart 型并联机构的正运动学及奇异性[J]. 中国机械工程, 2025, 36(9): 1951-1960, 1967.
HUANG Ningning, YOU Jingjing, YE Pengda, et al. Forward kinematics and singularity of a kinematically decoupled Stewart-type parallel mechanism[J]. China Mechanical Engineering, 2025, 36(9): 1951-1960, 1967.
- [2] WIEGAND A, HEBSACKER M, HONEGGER M. Parallele kinematik und linearmotoren: Hexaglide-ein neues, hochdynamisches werkzeugmaschinenkonzept [J]. Technische Rundschau, 1996, 88(25): 22-27.
- [3] HONEGGER M, CODOURAY A, BURDET E. Adaptive control of the Hexaglide, a 6DOF parallel manipulator[C]//Proceedings of International Conference on Robotics and Automation. Albuquerque, USA: IEEE, 1997: 543-548.
- [4] FERRARI D, GIBERTI H. A genetic algorithm approach to the kinematic synthesis of a 6-DOF parallel manipulator[C]//Proceedings of 2014 IEEE Conference on Control Applications (CCA). Antibes, France: IEEE, 2014: 222-227.
- [5] CHEN X, LI C, YANG J, et al. Kinematic influence coefficient based dynamic modeling of a 6-DOF parallel manipulator system[C]//Proceedings of 2019 WRC Symposium on Advanced Robotics and Automation (WRC SARA). Beijing, China: IEEE, 2019: 134-141.
- [6] 韩博, 贾子钊, 江源, 等. 基于自适应遗传算法的 3-PURU/S 并联稳定平台运动学标定[J]. 机械工程学报, 2025, 61(9): 264-276.
HAN Bo, JIA Zizhao, JIANG Yuan, et al. Kinematics calibration of 3-PURU/S parallel stabilized platform based on adaptive genetic algorithm[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2025, 61(9): 264-276.
- [7] 李艳文, 黄真, 高峰. 一种新的奇异研究方法及其应用实例[J]. 燕山大学学报, 2004(1): 40-44, 48.
LI Yanwen, HUANG Zhen, GAO Feng. A new method of singularity research and its example in application[J]. Journal of Yanshan University, 2004(1): 40-44, 48.
- [8] SLAVUTIN M, SHAI O, SHEFFER A, et al. A novel criterion for singularity analysis of parallel mechanisms[J]. Mechanism and Machine Theory, 2019, 137: 459-475.
- [9] YANG S, LI Y. Classification and analysis of constraint singularities for parallel mechanisms using differential manifolds[J]. Applied Mathematical Modelling, 2020, 77: 469-477.
- [10] CHENG G, LI Y, LODEWIJKS G, et al. Configuration and singularity analysis of a parallel hip joint simulator based on the forward kinematics[J]. Applied Mathematical Modelling, 2016, 40(15/16): 7281-7292.
- [11] HUO X, SUN T, SONG Y. A geometric algebra approach to determine motion/constraint, mobility and singularity of parallel mechanism[J]. Mechanism and Machine Theory, 2017, 116: 273-293.
- [12] 黄真, 曲义远. 空间并联机器人机构的特殊位形分析[J]. 东北重型机械学院学报, 1989(2): 1-6.
HUANG Zhen, QU Yiyuan. Special configuration analysis of spatial parallel robot mechanisms[J]. Journal of Northeast Institute of Heavy Machinery, 1989 (2): 1-6.
- [13] HUANG Z, LI Q C. Construction and kinematic properties of 3-UPU parallel mechanisms[C]//Proceedings of the 27th Biennial Mechanisms and Robotics Conference. Montreal, Canada: American Society of Mechanical Engineers, 2002: 1027-1033.
- [14] ZLATANOV D, BONEV I A, GOSSELIN C M. Constraint singularities of parallel mechanisms[C]//Proceedings of 2002 IEEE International Conference on Robotics and Automation. Washington, DC, USA: IEEE, 2002: 496-502.
- [15] MERLET J P, JACOBIAN M. Condition number, and accuracy of parallel robots[J]. Journal of Mechanical Design, 2006, 128(1): 199-206.