

可正交旋转的二维切割排样问题研究： 基于启发式分组策略

李云飞¹, 徐吉辉¹, 赵向领²

(1. 空军工程大学装备管理与无人机工程学院, 西安 710051;

2. 中国民航大学空中交通管理学院, 天津 300300)

摘要: 飞机货舱中非集装器的配载是重要的运输环节,而如何保障非集装器的配载,是亟须研究的重要内容。其中二维矩形切割排样问题是解决非集装器运输的重要理论方法。二维矩形切割排样理论在原材料切割、装箱等问题中有着广泛应用,但尚无很好的求解算法。该方法会因求解速度而拖累整个实际生产作业进度。因此,本文提出了二维切割排样的混合整数线性规划(Mixed-integer linear programming, MILP)模型,模型目标是以矩形板面积利用率和切割排样价值最大为目标,模型考虑了不超边界、不重叠、可正交旋转等限制。设计了启发式分组策略的求解算法:首先基于启发式把矩形块分组为不同组别的小矩形块,降低变量和计算规模;其次,采用混合整数规划精确算法对每个小矩形块进行切割排样。以经典 Benchmark 实验数据为例,将 Gurobi 分组与 Gurobi、CutLogic2D、基于遗传算法和最低水平线算法的混合算法对比。实验结果表明,CutLogic2D 综合求解质量和速度较好;Gurobi 分组方法是一种启发式算法,总体上要稍差于 CutLogic2D;遗传算法和最低水平线算法因是启发式算法且未使用分组策略,和 Gurobi 分别在部分算例上求解时间相对较长,达到了 7 200 s,这是无法接受的。

关键词: 物流工程;航空运输;二维切割排样;混合整数线性规划模型;分组策略

中图分类号:O221;TP391.72;V271.2

文献标志码:A

文章编号:1005-2615(2025)05-0984-15

A Study on Orthogonally Rotatable Two-Dimensional Cutting Stock Problem: Heuristic Grouping Strategy

LI Yunfei¹, XU Jihui¹, ZHAO Xiangling²

(1. Equipment Management and Unmanned Aerial Vehicle Engineering College, Air Force Engineering University, Xi'an 710051, China; 2. College of Air Traffic Management, Civil Aviation University of China, Tianjin 300300, China)

Abstract: The loading of non-unit load device in aircraft holds is crucial to air cargo transportation, and ensuring efficient loading of such cargo remains an important and urgent problem. Among the theoretical approaches to address this problem, the two-dimensional rectangular cutting stock problem serves as a key methodology. Although the two-dimensional rectangular cutting stock theory is widely applied to problems such as raw material cutting and packing, the lack of efficient solving algorithms hinders practical implementation, as their computational speed often impedes the whole production procedure. Therefore, this paper proposes a mixed-integer linear programming (MILP) model for the two-dimensional cutting stock problem, aiming to maximize both the utilization rate of the rectangular plane area and the value of the cutting stock. The model incorporates constraints such as boundary adherence, non-overlapping, and orthogonal

基金项目: 国家自然科学基金项目(72461013, 52272356)。

收稿日期: 2024-11-16; **修订日期:** 2025-08-18

通信作者: 徐吉辉,男,教授,博士生导师, E-mail: 1241775743@qq.com。

引用格式: 李云飞,徐吉辉,赵向领. 可正交旋转的二维切割排样问题研究:基于启发式分组策略[J]. 南京航空航天大学学报(自然科学版), 2025, 57(5): 984-998. LI Yunfei, XU Jihui, ZHAO Xiangling. A study on orthogonally rotatable two-dimensional cutting stock problem: Heuristic grouping strategy[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics(Natural Science Edition), 2025, 57(5): 984-998.

rotation. A heuristic grouping strategy-based solving algorithm is designed. First, heuristic methods are used to partition the rectangular items into smaller subsets, thereby reducing the variable scale and computational complexity. Second, an exact MILP algorithm is employed to solve the cutting stock problem for each subset. Using classic Benchmark experimental data, the proposed Gurobi grouping method is compared with Gurobi, CutLogic2D, and a hybrid algorithm combining genetic algorithms and the lowest horizontal line algorithm. The experimental results show that CutLogic2D performs well in terms of both solution quality and speed. The Gurobi grouping method, as a heuristic algorithm, generally shows slightly inferior performance than CutLogic2D. In contrast, the genetic algorithm and the lowest horizontal line algorithm, as the heuristic methods without grouping strategies, along with Gurobi, exhibit relatively long solving times in some cases, reaching up to 7 200 s, which is unacceptable for practical applications.

Key words: logistics engineering; air transport; two-dimensional cutting stock; mixed-integer linear programming (MILP) model; group strategy

随着航空物流运输业的快速发展,集装箱器的应用显著提升了运输效率,但大尺寸非集装箱货物因无法适配集装箱,其装载和配载成为航空物流的难点。非集装箱的配载问题在广义上属于装箱问题范畴,若将飞机货舱视为平面、非集装箱视为矩形块,则可转化为装箱与装载平衡相结合的问题,核心可归结为二维矩形装箱及其变体问题的研究。

二维矩形装箱问题需在特定约束下将货物放入给定尺寸的容器中,按容器类型和目标函数可分为二维条形装箱、二维装箱、二维背包及二维正交装箱4类,其变体二维切割下料问题(Two-dimensional cutting stock problem, 2D-CSP)则关注矩形板的高效切割,二者在本质上均为按约束划分空间供货物放置,且均属于经典NP(Non-deterministic polynomial)难问题,求解复杂度随问题规模呈指数增长。

现有研究中,求解方法可分为精确方法与近似方法。精确方法中数学规划(如整数线性规划^[1]、混合整数线性规划)、分支定界^[2-6]、树搜索、Benders分解^[7]能提供最优解或近似最优解。但这些算法受限于计算复杂度,仅适用于小规模问题,并考虑多种切割约束和实际的几何约束,以切割价值最大或者使用矩形板材数目最少为目标。近似方法以启发式算法(如左下角算法^[8-10]、天际线算法^[11]、渐进多项式方法^[12])和元启发式算法(如自适应搜索算法^[13]、遗传算法^[14]、粒子群优化^[15]、禁忌搜索算法^[11,16-17])为主,虽能快速处理大规模问题,但解的质量依赖算法设计。同时,现有研究对矩形块可正交旋转的约束关注不足,且大规模问题的求解效率仍有提升空间。尤其在二维单一大型矩形板放置问题(2D-single large object placement problem, 2D-SLOPP)中,如何平衡利用率、价值与求解速度尚未得到充分解决,且未将精确方法和启发式方法相结合。

综上所述,本文聚焦2D-SLOPP,考虑矩形块

正交旋转、不重叠、不超边界等约束,构建混合整数线性规划模型,并设计启发式分组策略以减少待处理矩形块数量、提升求解效率。研究旨在实现矩形板面积利用率与切割排样价值最大化,为飞机非集装箱货物的装载配平提供理论基础。因非集装箱货物尺寸各异,无法直接利用集装箱装载策略与方法为非集装箱确定装载位置,而2D-SLOPP的研究可直接支撑非集装箱货物位置的确定和优化,助力提升航空物流装载效率。

本文研究贡献如下:(1)针对二维切割排样问题的变体2D-SLOPP问题,考虑了正交旋转和不重叠、不超边界的约束,建立了混合整数线性规划数学模型。(2)为提升求解速度,将Gurobi与提出的启发式分组策略结合,经矩形块分组形成大矩形块,相比直接切割排样减少了矩形块的数量。

1 模型构建

1.1 模型概述

二维切割排样问题可描述为:以矩形板面积利用率和切割排样总价值最大为目标^[18],在考虑矩形块不超出矩形板的边界、不重叠、可正交旋转放置等约束条件下,决策不同长宽的矩形块 i 是否分配到矩形板中和要分配到矩形板中的矩形块 i 的放置位置左下角坐标 (x_i, y_i) ,实现矩形板面积利用率最大。

设待分配矩形块为 $R=\{1, 2, 3, 4, \dots, n\}$,长宽分别为 $\{l_1, l_2, \dots, l_n\}, \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$,价值为 $V=\{V_1, V_2, \dots, V_n\}$,假设质心在矩形块的中心。为了明确清晰表示所排矩形块在矩形板中的位置,以矩形板的长 L 为横轴 x 轴,宽 W 为纵轴 y 轴,左下角为坐标原点,矩形块在板中的位置以左下角坐标点 (x_i, y_i) 表示,如图1所示。模型中矩形块放置方向的不固定为进一步提高矩形板面积利用率提供了可能,矩形块可以横向或者纵向放置。图1是

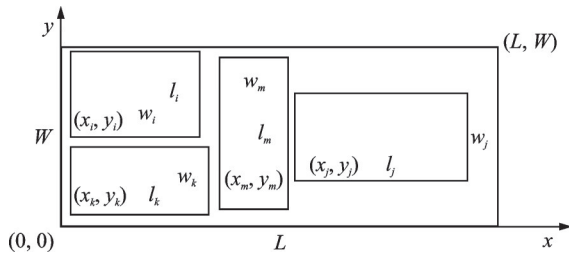


图 1 矩形板平面坐标系

Fig.1 Coordinate system rectangular sheet plane

其中一种假想矩形块排列方案。矩形块的边缘必须平行于矩形板的边缘排列放置。

1.2 矩形块切割排样模型

为实现矩形块的切割排样,模型中使用到了 9 个 0-1 变量和 2 个连续变量,后续依次详细介绍。

考虑矩形块 i 是否分配到矩形板中,设一维决策变量 t_i ,如果是则为 1,否则为 0,即

$$t_i = \begin{cases} 1 & \text{第 } i \text{ 个矩形块分配到矩形板中} \\ 0 & \text{第 } i \text{ 个矩形块没有分配到矩形板中} \end{cases} \quad (1)$$

引入辅助变量公式(2~5)用于表示矩形块可以正交旋转放置

$$l_{xi} = \begin{cases} 1 & \text{矩形块 } i \text{ 的 } l \text{ 边平行于 } x \text{ 轴} \\ 0 & \text{矩形块 } i \text{ 的 } l \text{ 边不平行于 } x \text{ 轴} \end{cases} \quad (2)$$

$$w_{xi} = \begin{cases} 1 & \text{矩形块 } i \text{ 的 } w \text{ 边平行于 } x \text{ 轴} \\ 0 & \text{矩形块 } i \text{ 的 } w \text{ 边不平行于 } x \text{ 轴} \end{cases} \quad (3)$$

$$l_{yi} = \begin{cases} 1 & \text{矩形块 } i \text{ 的 } l \text{ 边平行于 } y \text{ 轴} \\ 0 & \text{矩形块 } i \text{ 的 } l \text{ 边不平行于 } y \text{ 轴} \end{cases} \quad (4)$$

$$w_{yi} = \begin{cases} 1 & \text{矩形块 } i \text{ 的 } w \text{ 边平行于 } y \text{ 轴} \\ 0 & \text{矩形块 } i \text{ 的 } w \text{ 边不平行于 } y \text{ 轴} \end{cases} \quad (5)$$

图 1 中默认矩形块放置方向为长边 l 平行于 x 轴,宽边 w 平行于 y 轴,如果放置方向发生变化即长边 l 平行于 y 轴,宽边 w 平行于 x 轴,表明矩形块发生正交旋转。

为防止任意矩形块 i 和 j 两两间重叠,引入辅助变量如下

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{矩形块 } i \text{ 在矩形块 } j \text{ 的左边} \\ 0 & \text{矩形块 } i \text{ 不在矩形块 } j \text{ 的左边} \end{cases} \quad (6)$$

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{矩形块 } i \text{ 在矩形块 } j \text{ 的右边} \\ 0 & \text{矩形块 } i \text{ 不在矩形块 } j \text{ 的右边} \end{cases} \quad (7)$$

$$c_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{矩形块 } i \text{ 在矩形块 } j \text{ 的下边} \\ 0 & \text{矩形块 } i \text{ 不在矩形块 } j \text{ 的下边} \end{cases} \quad (8)$$

$$d_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{矩形块 } i \text{ 在矩形块 } j \text{ 的上边} \\ 0 & \text{矩形块 } i \text{ 不在矩形块 } j \text{ 的上边} \end{cases} \quad (9)$$

因此,矩形块切割排样模型为

$$\begin{cases} \max f_1 = \sum_{i=1}^n l_i w_i t_i \\ \max f_2 = \sum_{i=1}^n V_i t_i \end{cases} \quad (10)$$

$$x_i + l_i l_{xi} + w_i w_{xi} \leq x_j + (1 - a_{ij})M \quad (11)$$

$$x_j + l_j l_{xj} + w_j w_{xj} \leq x_i + (1 - b_{ij})M \quad (12)$$

$$y_i + w_i w_{yi} + l_i l_{yi} \leq y_j + (1 - c_{ij})M \quad (13)$$

$$y_j + w_j w_{yj} + l_j l_{yj} \leq y_i + (1 - d_{ij})M \quad (14)$$

$$a_{ij} + b_{ij} + c_{ij} + d_{ij} \geq t_i + t_j - 1 \quad (15)$$

$$a_{ij} + b_{ij} \leq 1 \quad (16)$$

$$c_{ij} + d_{ij} \leq 1 \quad (17)$$

$$\begin{cases} x_i + l_i l_{xi} + w_i w_{xi} \leq L + (1 - t_i)M \\ y_i + l_i l_{yi} + w_i w_{yi} \leq W + (1 - t_i)M \end{cases} \quad (18)$$

$$\begin{cases} l_{xi} + l_{yi} = 1 \\ w_{xi} + w_{yi} = 1 \\ l_{xi} + w_{xi} = 1 \\ l_{yi} + w_{yi} = 1 \end{cases} \quad (19)$$

$$\sum_{i=1}^n l_i w_i t_i \leq L W \quad (20)$$

$$t_i M > x_i \quad (21)$$

$$\begin{cases} 0 \leq x_i \leq L \\ 0 \leq y_i \leq W \end{cases} \quad (22)$$

式(10)为目标函数,要求最小化平面切割面积的浪费,提高矩形板面积利用率,同时实现矩形块切割排样价值最大。式(11)和式(12)为矩形块 i 与 j 在 x 轴方向两两间不重叠, M 为一个的大数。式(13)和式(14)为矩形块 i 与 j 在 y 轴方向两两间不重叠。式(15)中左侧变量 a_{ij} 、 b_{ij} 、 c_{ij} 、 d_{ij} 至少有一个等于 1,则两个小矩形块 i 和 j 在 x 轴和 y 轴上都不会重叠;式(15)右侧表示只有当第 i 、 j 两个矩形块都被切割排样到矩形板中,才会发生重叠。式(16)为矩形块 i 只能在 j 的左边或右边。式(17)为矩形块 i 只能在 j 的上边或下边。式(18)确保切割排样的矩形块,位于矩形板内,使得矩形块不超出矩形板的长与宽。式(19)松弛了矩形块放置方向固定的约束,使得矩形块可以正交旋转,即长边 l 可以平行于 x 轴或者 y 轴,宽边亦是如此。式(20)保证切割排样到矩形板上的矩形块面积之和小于矩形板的面积。式(21)确保切割排样到矩形板上的矩形块均可以有位置放置。式(22)为矩形块左下角坐标区间范围。矩形块 i 左下角横坐标为 x_i ,范围为 0 到 L ;矩形块 i 左下角纵坐标为 y_i ,范围为 0 到 W 。

2 基于启发式分组策略的设计

已有文献证明,2D-CSP 是 NP 难问题之一。分析所建立的数学规划模型,首先需要选定待切割

排样矩形块,并确定其是否分配到矩形板上。这一过程属于是一维背包问题。另外需要确定待分配矩形块的位置(坐标)及方向,这一问题属于是指派问题。因此本模型所解决的2D-CSP是一种组合优化问题。

针对长宽固定的矩形板,如果待切割排样矩形块数量较多,直接求解计算模型复杂度较高,将导致程序运行时间较长,这在实际生产中是无法接受的,故而也难以使用精确算法在有限时间内求得最优解。本文为降低计算复杂度和提高模型求解速度,设计了一种基于启发式方法的分组策略,即将问题按照“先分组后切割排样”的思路解决。同时将矩形板和矩形块平均分组,然后独立计算各组的切割排样模型,达到减少切割排样数量、提高计算程序运行的资源利用率的目的。

启发式分组策略是指在使用Gurobi求解器的过程中加入到程序运算中的一种策略方法。具体地,将待切割排样的矩形块和矩形板平均划分数量和大小。如某算例,有60个矩形块,需要将这些矩形块放置到长宽均为200的矩形板中,那么可将矩形块和矩形板分为4组,每组15个矩形块将其分配到4组长宽均为100的小矩形板中。分组完成后使用求解器Gurobi计算完成排样,之后将各组的排样结果组合为大矩形板。至此完成矩形板的切割排样。

在大矩形板的切割排样过程中,关键是确定各组矩形块的数量,以提高求解速度。本文使用Gurobi多次求解计算矩形块分组,结果发现,Gurobi在计算10~15个矩形块时,求解时间维持在10 s内。因此,选择10~15个的矩形块作为分组单位。

确定各组矩形块的数量后,将矩形板分割为与分组后矩形块面积相适应的小矩形板,形成与Gurobi互相匹配易求解的组别。

通过将矩形块和矩形板进行合适的分组后,利用所建立的模型和求解器Gurobi完成计算,实现模型的嵌套计算。即将分组后每一组矩形块按照二维切割排样的模型约束条件,使用Gurobi求解计算。然后将各组矩形块计算完成的结果合并为与大矩形板长与宽相一致的矩形板。通过多次求解计算,得到在长宽固定的矩形板中,矩形块数量越少,求解时间越短。

矩形块数量与矩形板的大小有高度耦合关系。组内矩形块数量较多,则求解时间较长,难以实现计算求解;如果数量较少,则浪费求解资源。因此应该降低这种高耦合的关系。启发式分组策略重点考虑的是如何将各组待分配的矩形块与各矩形板互相匹配,使得每组的切割排样求解时间均可接受。这样既可以在接受的时间内得到矩形块

的放置结果,又可以减少计算性能的浪费。

针对矩形块的分组切割排样策略,利用求解器Gurobi求解混合整数线性规划(Mixed-integer linear programming, MILP)模型的具体算法如下。

算法1 基于启发式分组策略的矩形块数据顺序切割排样算法

(1) Begin

(2) Benchmark数据准备,获取矩形块和矩形板数据,得到矩形块的长宽(l_i, w_i)和数量 n ,以及矩形板的长宽(L, W)。

(3) 确定各组矩形块数量;使用Gurobi试算获取各组矩形块的数量,选择计算时间在 $T(n) \leq 10$ s内的矩形块数量 $n_g = \operatorname{argmin} n \{T(n) \leq 10\}$ 为各组矩形块的数量。

(4) 利用得到的各组矩形块数量单位 n_g ,将测试算例的矩形块平均分组,如果不能被分组矩形块数量单位整除,那么一些组可能会比其他组多1个或几个块。

(5) 确定小矩形板的长宽;依据划分组数 $G = n/n_g$,按照面积平均划分大矩形板形成长为 $L_g = L/\sqrt{G}$,宽为 $W_g = W/\sqrt{G}$ 小矩形板;如果不能被分组数整除,那么允许将一些小矩形板的长和宽比其他的矩形板长或短。

(6) 计算结果;针对各组矩形块使用Gurobi求解计算1.2节中的二维切割排样MILP模型,得到各组矩形块的放置结果。

(7) 组合大矩形板;将长宽为(L_g, W_g)的各小矩形板合并组合为长宽为(L, W)的大矩形板。

(8) 检查大矩形板的长宽是否正确。

(9) 输出得到每个矩形块在大矩形板中最终位置左下角坐标及放置方向,可视化切割排样结果,以便后续分析。

(10) End

3 试验与算例分析

模型求解使用Anaconda 3 Spyder 5.3基于Python语言Gurobi 10.0实现,测试计算机系统配置为第8代英特尔酷睿1.6 GHz i5处理器,运行内存为8 GB,操作环境为Win10。同时对比分析了专用切割下料软件CutLogic2D和基于遗传算法与最低水平线算法的混合算法等多种方法。遗传算法与最低水平线算法基于Matlab2020b编程实现。所有方法都采用与Gurobi相同的程序运行环境。随着矩形块数量的增加为防止程序无限时间运行,针对每个算例设置求解时间为7 200 s。如果在7 200 s内得到最优解,则接受该解;如果没有,则取程序在截止时间自动结束时的解。

在遗传算法和最低水平线算法的混合算法^[19]中,遗传算法的使用将货物的切割排放顺序进行优化,然后使用最低水平线算法确定切割排样的位置。最低水平线算法的基本思想为:(1) 寻找高度最低的水平线,并将货物分配到最低水平线上,同时更新最低水平线;(2) 如果该最低水平线无法放置当前的货物,则判断与最低水平线左右相邻的水平线,选择最低的一条更新最低水平线的高度;(3) 如若仍无法放置货物,则不断执行提升最低水平线的步骤,直到货物可被装载分配。算法流程如图 2 所示。

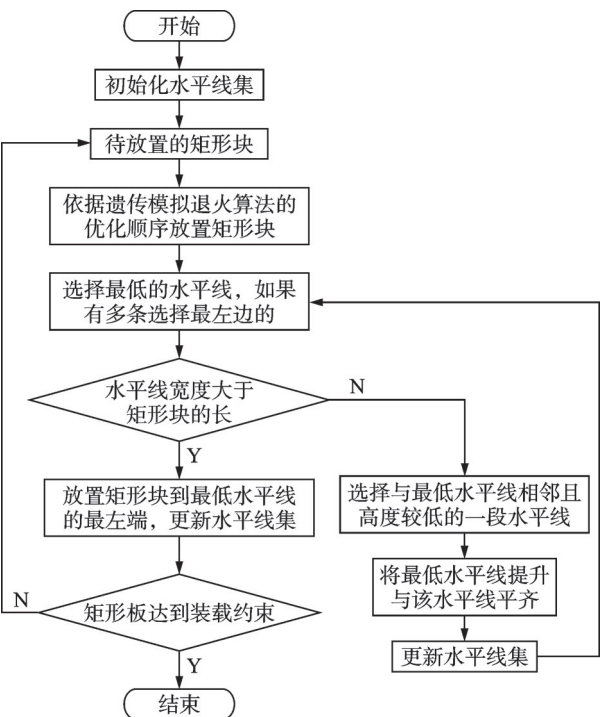


图 2 最低水平线算法

Fig.2 Lowest horizontal line algorithm

3.1 算例数据

为验证模型的有效性采用了博洛尼亚大学运筹学网站的 Benchmark 切割与装箱实例(<https://site.unibo.it/operations-research/en/research/library-of-codes-and-instances-1>)。按照待切割排样矩形块数量选择了 GCUT、BENG、N_T(n)、BKW、HT 这 5 种不同规模的 Benchmark 算例数据用于测试计算模型和验证分组策略。

3.2 确定多目标权重

在算例仿真测试中,将双目标函数转化为单目标函数,同时去量纲化,即

$$f=\max\left[\alpha\frac{\sum_{i=1}^n l_i w_i t_i}{L W}+\beta\frac{\sum_{i=1}^n V_i t_i}{\sum_{i=1}^n V_i}\right] \quad (23)$$

式中: α 和 β 为权重, LW 为矩形板的面积, $\sum_{i=1}^n V_i$ 为矩形块价值的总和。

不同的权重对应不同的目标函数值,有着不同的矩形板使用面积和切割排样价值,如表 1 所示。

表 1 不同权重对应的目标函数值

Table 1 Objective function values corresponding to different weights

(α, β)	f	f_1	f_2
$(1f_1, 0f_2)$	0.835 8	246 143.10	2 303.99
$(0.9f_1, 0.1f_2)$	0.852 3	249 448.05	2 467.99
$(0.8f_1, 0.2f_2)$	0.852 6	250 976.31	2 315.00
$(0.7f_1, 0.3f_2)$	0.875 7	249 448.05	2 467.99
$(0.6f_1, 0.4f_2)$	0.864 5	249 834.72	2 307.70
$(0.5f_1, 0.5f_2)$	0.882 5	247 964.30	2 394.99
$(0.4f_1, 0.6f_2)$	0.910 9	249 448.05	2 467.99
$(0.3f_1, 0.7f_2)$	0.903 3	238 408.95	2 437.99
$(0.2f_1, 0.8f_2)$	0.949 6	251 495.63	2 512.83
$(0.1f_1, 0.9f_2)$	0.917 3	230 515.40	2 403.98
$(0f_1, 1f_2)$	0.932 9	226 390.58	2 403.98

由表 1 可知,当 α 为 1 时,目标函数值 f 最小。由图 3 可知随着 α 的减小,目标函数值 f 呈增大趋势,矩形板面积利用率 f_1 呈减小趋势,表明开始注重切割排样价值 f_2 的计算,牺牲了矩形板面积利用率 f_1 。当 α 为 0.1 和 0 时,切割排样价值 f_2 不变,表明切割排样价值趋于收敛。经分析,考虑矩形板使用经济效益更重要,即矩形板面积利用率 f_1 为主要目标函数,切割排样价值 f_2 为次要目标函数,在后续的算例计算中选取 $\alpha=0.8, \beta=0.2$ 。

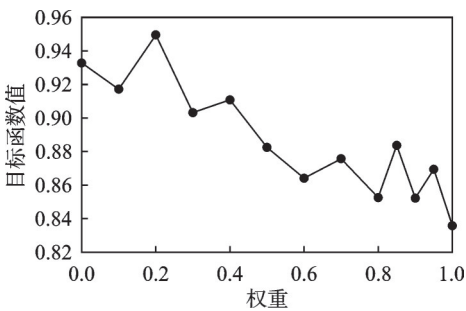


图 3 权重目标函数值趋势分析

Fig.3 Trend analysis of weight objective function values

3.3 算例分析

本文建立的是二维矩形切割排样整数规划模型,可以直接应用商业求解器 Gurobi 的剪枝分解技术求解。模型中的多目标函数可以使用 Gurobi 中的加权组合法,转化为单目标函数,如式(23)所示;设计的基于启发式分组策略,可以在 Gurobi 中求解模型,即 Gurobi 分组;专业切割下料软件 Cut-Logic2D 是基于遗传算法和模糊逻辑所开发的商业软件,可以直接计算 Benchmark 数据,其中切割

价值依据矩形块的切割结果计算得到;遗传算法与最低水平线算法属于是启发式算法,即 GA+LHL 方法,通过概率搜索获得可行解,为此可将每组 Benchmark 算例数据计算 10 次,取平均值作为结果分析。

3.3.1 GCUT 算例

GCUT 共有 13 组算例数据,使用 4 种方法计

算数据验证模型。表 2 为 GCUT 算例结果,其中 S 为矩形板的面积利用率, V_1 为矩形板的切割排样总价值, T 为求解时间,单位为 s。Gurobi 分组方法是将各组小矩形板切割排样程序运行时间累加求和。从表 2 面积利用率平均值可知,Gurobi 分组策略方法要优于 Gurobi 和 GA+LHL,弱于 CutLog-ic2D。

表 2 GCUT 算例结果
Table 2 Results of the GCUT arithmetic example

算例	Gurobi 分组			Gurobi			CutLogic2D			GA+LHL		
	$S/\%$	V_1	T/s	$S/\%$	V_1	T/s	$S/\%$	V_1	T/s	$S/\%$	V_1	T/s
1-1	64.39	1 340.00	0.14	64.39	1 340	0.28	64.39	1 340.00	32.00	64.39	1 340.00	5.03
1-2	92.53	2 577.00	1.47	92.53	2 577	0.53	92.52	2 577.00	39.00	84.85	2 306.70	430.72
1-3	90.61	3 928.00	10.67	90.44	3 928	1 276.27	90.43	3 928.00	31.00	82.13	3 595.90	683.08
1-4	91.79	5 904.00	36.61	92.52	5 862	7 207.73	94.50	5 804.00	99.00	81.00	5 723.50	1 082.77
1-5	85.67	1 489.00	1.85	85.67	1 489	3.12	85.67	1 489.00	17.00	79.39	1 368.00	250.37
1-6	93.97	2 375.00	18.57	92.57	2 375	77.44	93.97	2 375.00	51.00	82.86	2 110.50	486.44
1-7	85.44	4 153.00	43.57	85.44	4 153	53.40	85.43	4 153.00	43.00	68.69	3 430.70	590.97
1-8	88.27	6 106.00	22.63	91.69	6 444	7 221.39	93.81	6 261.00	137.00	80.69	5 881.50	1 077.38
1-9	87.26	1 209.00	0.33	87.26	907	7.51	87.26	1 209.00	15.00	82.21	1 082.33	307.51
1-10	83.01	2 613.00	18.77	89.80	2 803	5 758.76	89.79	2 803.00	36.00	72.64	2 438.20	511.45
1-11	92.05	4 145.00	24.07	89.45	4 034	7 219.61	93.88	4 140.00	70.00	84.29	3 657.80	756.72
1-12	83.70	6 856.00	12.24	83.70	6 856	180.56	83.70	6 856.00	43.00	75.05	6 329.30	1 355.77
1-13	93.14	3 576.00	332.99	84.46	3 603	0.48	93.12	3 344.00	43.00	92.95	3 530.30	834.16
均值	87.06	3 559.31	40.30	84.46	3 567	2 231.31	88.34	3 559.92	50.46	79.32	3 291.90	644.03

在求解时间上,Gurobi 分组策略要优于其他 3 种方法,整体求解时间相比于直接使用 Gurobi 有较大提升,有效提高了求解速度。在切割排样价值上,Gurobi 分组、Gurobi、CutLogic2D 这 3 种方法大致相同,且明显优于 GA+LHL 算法。

图 4 是矩形板面积利用率箱线图。结合表 2 可知,Gurobi 分组方法要优于 Gurobi 和 GA+LHL,弱于 CutLogic2D;虽与 Gurobi 相比数据稍有分散,但部分算例如 1-1、1-2、1-3、1-5、1-6、1-7、1-9、1-12 和 1-13 面积利用率接近于 CutLogic2D,表明 Gurobi 分组方法可行。

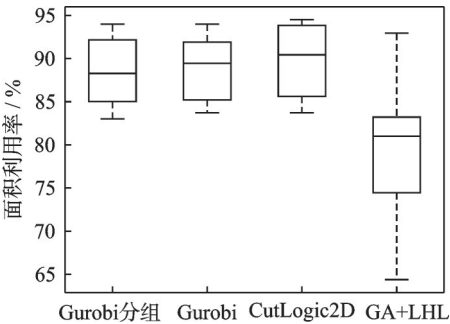


图 4 GCUT 面积利用率
Fig.4 Area utilization of GCUT

图 5 是切割排样相对价值箱线图。结合表 2 可知:Gurobi 分组要稍弱于 Gurobi 和 CutLogic2D,但要优于 GA+LHL 算法,部分算例如 1-4,Gurobi 分组要优于 Gurobi 和 CutLogic2D,验证了 Gurobi 分组策略方法的可行性。

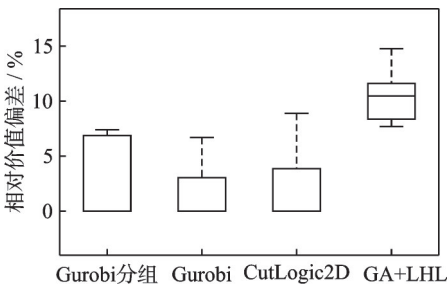


图 5 GCUT 相对价值偏差
Fig.5 Relative value deviation of GCUT

图 6 是算例运行求解时间箱线图。可知与直接使用 Gurobi 方法相比,在分组策略下 Gurobi 分组的求解时间明显缩短;Cutlogic2D 作为专业的切割下料软件,在求解时间上与 Gurobi 分组几乎相等;GA+LHL 启发式方法略慢于 Gurobi 分组和 Cutlogic2D。

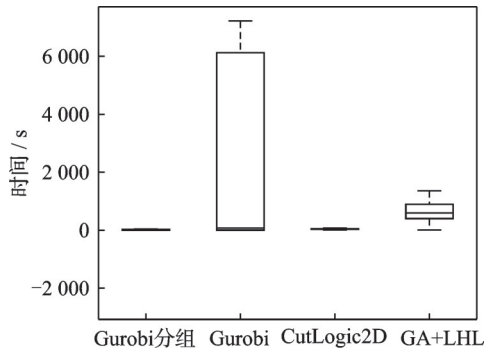


图6 GCUT 求解时间

Fig.6 Solving time of GCUT

图7是算例1-3使用Gurobi分组策略方法后所得到的切割排样结果。两组小矩形板各由15个小矩形块构成,两组小矩形板组合形成一个大矩形板。图8为未使用分组策略的Gurobi方法。两种方法未造成矩形块重叠,面积利用率分别为90.61%、90.44%,使用分组策略后求解时间仅为10.67 s,而未使用分组策略的Gurobi求解时间为1 276.27 s,相比而言,分组策略的使用大大降低了矩形板切割数量和计算复杂度,提高了求解速度。图9为未使用分组策略且不含旋转约束的Gurobi方法矩形块切割排样结果,其面积利用率为83.60%,切割价值为3 764,求解时间为7 203.25 s。在图8中矩形块7、9、17、18、19、20、25、26、28、29发生正交旋转,与图9相比,正交旋转增加了矩形板面积利用率。

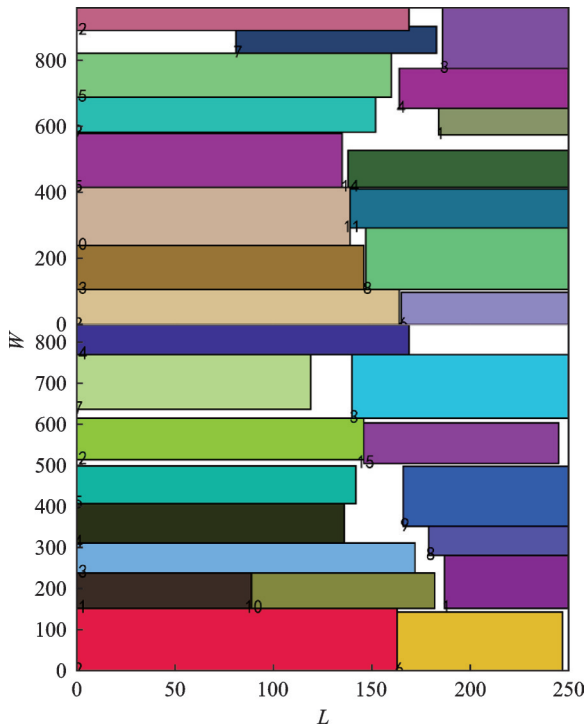


图7 GCUT算例1-3 Gurobi分组

Fig.7 Gurobi group of test 1-3 of GCUT

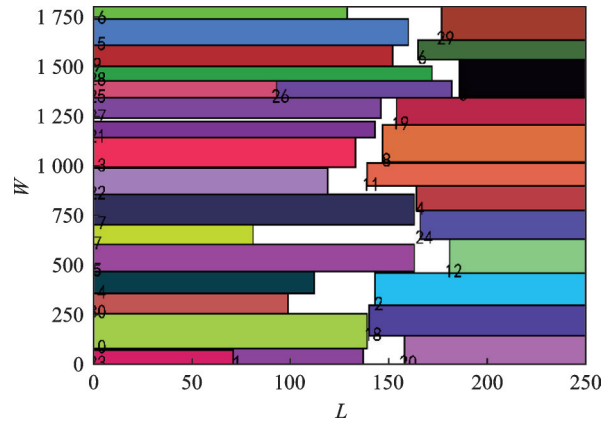


图8 GCUT算例1-3 Gurobi

Fig.8 Gurobi of test 1-3 of GCUT

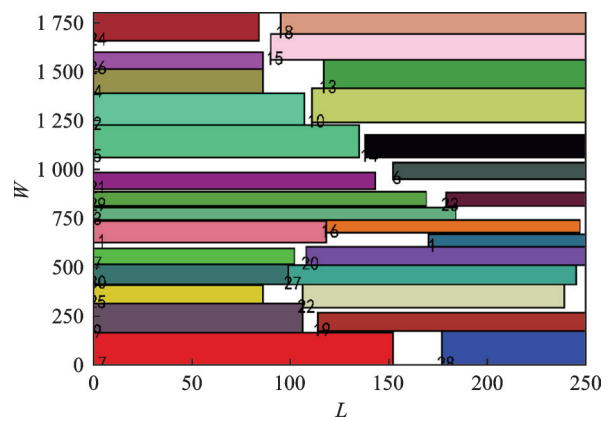


图9 GCUT算例1-3常规Gurobi

Fig.9 Conventional Gurobi of test 1-3 of GCUT

3.3.2 BENG算例

本组共有10组算例数据。表3为BENG算例结果。由表3可知,Gurobi分组策略方法要稍优于Gurobi和GA+LHL,弱于CutLogic2D。求解时间上,Gurobi分组与CutLogic2D、GA+LHL这3种方法所需求解时间较小,可满足生产实际需要;而Gurobi达到了所设置的求解运算终止时间7 200 s,且Gap值随矩形块数量的增加呈增大趋势,表明Gurobi未在规定时间内达到最优解即便结束程序运行。在切割排样价值上,Gurobi分组方法与CutLogic2D大致相同,且优于Gurobi和GA+LHL。

由图10矩形板面积利用率箱线图可知:随着待排样矩形块数量的增加,Gurobi和GA+LHL方法的面积利用率均呈现下降的趋势,且GA+LHL算法下降速率快于Gurobi。Gurobi分组弱于Gurobi和CutLogic2D,优于GA+LHL算法,部分算例如1-5 Gurobi分组方法在面积利用率上要优于其他3种方法。

由图11的矩形块切割排样相对价值偏差箱线图可知:Gurobi分组方法要稍优于其他3种方法。图12是求解时间的箱线图,可知Gurobi分组方法、Cutlogic2D和GA+LHL几乎接近,能够快速求解

表 3 BENG 算例结果

Table 3 Results of the BENG arithmetic example

算例	Gurobi 分组			Gurobi			CutLogic 2D			GA+LHL		
	S/%	V ₁	T/s	S/%	V ₁	T/s	S/%	V ₁	T/s	S/%	V ₁	T/s
1-1	88.66	1 585.00	43.27	97.60	1 681.00	7 320.39	98.80	1 801.00	35	93.73	1 706.00	13.31
1-2	94.56	2 758.00	48.72	96.34	2 810.00	7 217.33	97.26	2 720.00	59	87.97	2 715.00	27.41
1-3	94.00	4 563.00	106.98	95.12	4 293.00	7 210.25	96.38	4 433.00	123	81.37	4 217.00	40.27
1-4	92.51	5 614.00	110.96	90.61	5 447.00	7 203.25	96.93	5 575.00	104	77.18	5 302.30	52.37
1-5	96.14	7 310.00	71.94	90.00	6 919.00	7 242.72	95.31	6 579.00	47	72.54	6 517.40	63.89
1-6	89.85	2 607.00	12.23	95.78	2 512.00	7 201.30	97.84	2 642.00	46	91.15	2 597.10	24.51
1-7	88.51	4 564.00	24.70	89.34	4 235.00	7 520.56	95.78	4 468.00	110	85.22	4 531.40	41.22
1-8	86.22	6 108.00	38.92	87.21	6 262.00	7 241.22	93.41	6 146.00	44	81.08	6 187.70	56.91
1-9	80.92	7 762.00	65.91	75.08	7 077.00	7 219.74	93.98	8 304.00	29	78.36	7 906.00	73.32
1-10	85.27	7 228.00	59.39	73.67	6 382.00	7 202.49	94.26	7 714.00	43	75.74	7 271.30	94.51
均值	89.66	5 009.92	58.30	89.08	4 761.80	7 257.93	96.00	5 038.20	64	82.43	4 895.12	48.77

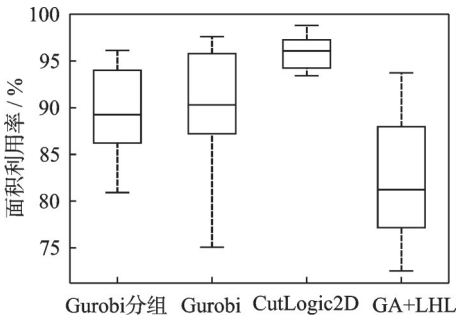


图 10 BENG 面积利用率

Fig.10 Area utilization of BENG

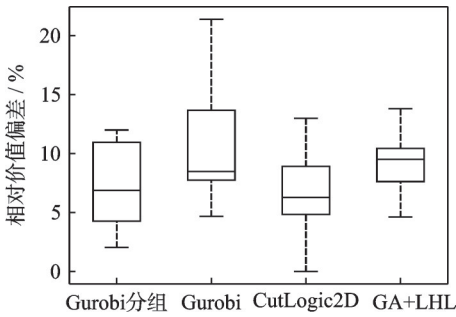


图 11 BENG 相对价值偏差

Fig.11 Relative value deviation of BENG

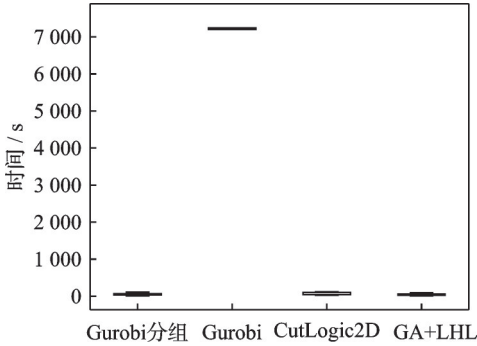


图 12 BENG 求解时间

Fig.12 Solving time of BENG

模型算例,且远快于 Gurobi。

图 13 是算例 1-2 使用 Gurobi 分组策略后得到的组合图,在分组策略下被分为了宽固定 25,长分别为 17、13、10、17,共 4 组。

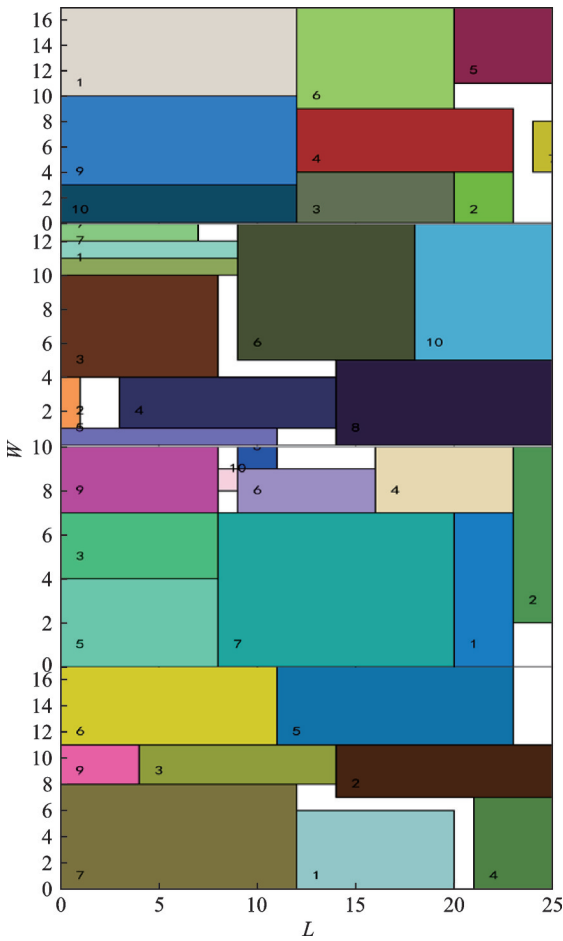


图 13 BENG 算例 1-2 Gurobi 分组

Fig.13 Gurobi group of test 1-2 of BENG

图 14 是未使用分组策略的 Gurobi 方法,两种方法下矩形块均未出现重叠,两种方法面积利用率分别为 94.56%、96.34%,求解时间为分别为 48.72 和 7 217.33 s,可见 Gurobi 分组在求解时间上有较好的效果。

图 15 是未使用分组策略且不含旋转约束的切割图,面积利用率为 93.33%,切割排样价值为 2 638,求解时间为 7 235.59 s。图 14 中矩形块 1、2、4、5、6、7、9、10、11、12、13、14、15 等发生旋转,与图 15 相比,增加了面积利用率。

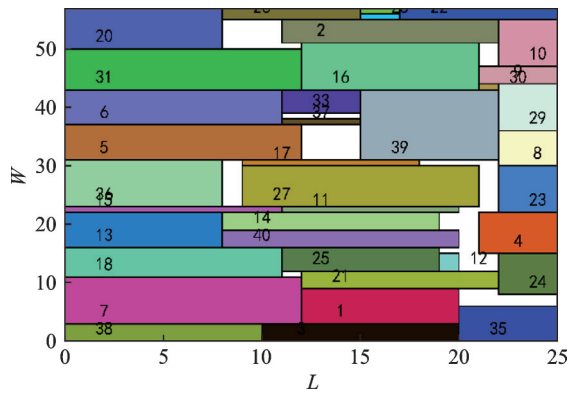


图 14 BENG 算例 1-2 Gurobi

Fig.14 Gurobi of test 1-2 of BENG

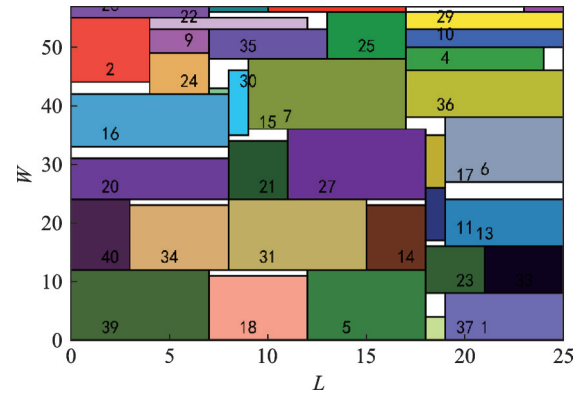


图 15 BENG 算例 1-2 常规 Gurobi

Fig.15 Conventional Gurobi of test 1-2 of BENG

3.3.3 N_T(n)算例

本组共有 35 个算例数据,矩形板的长/宽固定为 200/200,且待切割排样矩形块面积之和与矩形板面积恰好相同。N_T(n)算例数据依据待切割排样矩形块的数量可分为 7 组,各组别的待切割排

样矩形块数量分别为 17、25、29、49、73、97、197,每个组别分别使用 A~G 7 个字母来表示,其中每组中含有 5 个算例使用数字 1、2、3、4、5 来表示。

表 4 为 N_T(n)算例结果,可知:在面积利用率方面,4 种方法平均分别为 91.20%、88.06%、

表 4 N_T(n)算例结果

Table 4 Results of the N_T(n) arithmetic example

算例	Gurobi 分组			Gurobi			CutLogic2D			GA+LHL		
	S/%	V ₁	T/s	S/%	V ₁	T/s	S/%	V ₁	T	S/%	V ₁	T/s
A-1	90.51	2 115.00	4.80	93.44	2 075.00	510.12	96.96	2 185.00	53	94.89	2 072.00	580
A-2	95.87	1 636.00	3.25	92.43	1 435.00	14.75	96.56	1 614.00	28	94.69	1 622.10	489
A-3	92.71	1 848.00	6.60	88.56	1 743.00	73.62	97.81	1 680.00	31	93.95	1 652.80	465
A-4	91.29	2 286.00	5.80	97.34	2 013.00	6.95	97.41	2 209.00	27	93.56	2 263.90	422
A-5	88.21	2 211.00	19.69	97.63	2 277.00	7 201.07	96.64	2 233.00	22	93.81	2 353.50	436
B-1	93.64	2 728.00	11.85	92.28	2 732.00	4 724.41	94.25	2 603.00	90	95.47	2 665.00	668
B-2	92.71	2 955.00	9.49	94.32	2 994.00	217.33	96.20	2 589.00	43	95.64	2 367.60	666
B-3	94.76	2 822.00	10.41	98.85	3 059.00	7 200.53	94.12	2 516.00	24	94.61	2 268.50	723
B-4	93.68	3 036.00	13.89	98.17	3 192.00	7 200.59	95.92	2 821.00	44	94.75	3 062.30	613
B-5	98.21	2 788.00	141.70	95.40	2 667.00	7 200.76	97.53	2 699.00	56	94.00	2 620.50	616
C-1	93.32	3 921.00	2.34	97.15	3 733.00	7 200.31	96.45	3 560.00	70	94.57	3 487.50	682
C-2	92.16	3 375.00	8.82	88.45	3 241.00	534.05	94.83	2 718.00	43	94.46	3 266.70	715
C-3	87.06	3 521.00	10.29	97.44	3 593.00	7 200.26	93.83	3 148.00	30	95.27	3 499.20	743
C-4	92.00	3 462.00	7.83	97.67	3 669.00	7 200.46	95.21	3 240.00	61	95.75	3 410.90	762
C-5	90.94	2 989.00	13.11	97.43	3 141.00	7 201.68	95.62	2 664.00	52	95.34	2 947.50	679
D-1	99.28	6 127.00	13.24	93.18	5 827.00	7 208.44	94.81	5 026.00	159	94.78	5 805.30	1 273
D-2	85.37	5 732.00	7.95	97.23	6 103.00	7 372.03	94.22	5 371.00	97	95.07	6 000.90	1 218
D-3	86.93	5 704.00	8.63	97.74	6 033.00	7 205.80	95.56	5 246.00	115	95.89	5 824.70	1 382
D-4	91.62	6 050.00	4.61	94.52	5 916.00	7 203.20	94.44	5 270.00	71	95.28	5 958.00	1 365
D-5	85.99	5 960.00	2.70	97.74	5 850.00	7 201.05	94.53	5 313.00	113	94.52	5 834.60	1 383
E-1	87.42	9 129.00	18.33	92.26	9 629.00	7 217.86	94.24	8 778.00	118	94.36	9 914.60	2 239
E-2	89.93	9 505.00	14.23	90.22	9 136.00	7 214.48	94.58	8 734.00	110	96.75	9 504.00	1 750
E-3	94.20	9 241.00	35.88	87.79	9 017.00	7 212.14	93.43	8 522.00	128	96.14	9 343.00	1 672
E-4	86.86	8 804.00	54.72	86.25	8 704.00	7 273.37	93.75	8 444.00	153	95.31	9 323.00	2 508
E-5	87.98	8 531.00	19.74	79.56	8 506.00	7 210.76	95.43	8 549.00	124	93.30	8 876.00	1 687
F-1	94.90	11 261.00	39.42	84.66	11 600.00	7 296.43	92.07	10 643.00	49	95.81	11 500.00	2 715
F-2	90.62	1 133.00	92.39	79.69	11 641.00	7 255.43	94.85	10 729.00	76	93.17	11 980.00	2 747
F-3	87.49	12 986.00	50.51	75.78	12 134.00	7 208.19	93.88	11 810.00	55	96.44	13 104.00	2 462
F-4	87.44	12 036.00	26.46	80.29	12 426.00	7 203.38	94.13	11 536.00	76	94.82	12 684.00	3 033
F-5	90.38	11 905.00	46.22	82.79	11 625.00	7 223.41	93.51	11 202.00	91	96.84	11 695.00	2 624
G-1	92.55	24 987.00	40.44	62.83	22 751.00	7 232.15	92.51	23 788.00	77	94.77	25 500.00	5 947
G-2	93.56	24 765.00	38.56	64.95	23 410.00	7 224.17	92.31	24 673.00	59	93.62	25 854.00	5 674
G-3	94.33	25 054.00	70.94	70.17	22 204.00	7 219.00	92.14	22 867.00	66	94.19	24 707.00	5 290
G-4	87.69	24 012.00	28.43	69.74	22 792.00	7 222.29	92.14	23 362.00	81	94.32	25 131.00	5 274
G-5	90.44	24 197.00	30.68	68.17	23 516.00	7 260.00	91.97	23 811.00	38	93.90	24 714.00	6 182
均值	91.20	8 543.17	26.11	88.06	8 296.69	5 952.87	94.68	8 061.51	72.29	94.86	8 651.80	1 933

94.68%、94.86%。在求解时间方面,Gurobi 分组方法在求解时间上要优于其他 3 种方法,而未使用分组策略的 Gurobi 方法求解时间较长,这是不可接受的。在切割排样价值上,Gurobi 分组和 GA+LHL 两种方法大致相同,Gurobi 方法次之,CutLogic2D 相对较差。

由图 16 的分组面积利用率可知:在 A~D 组 Gurobi 分组要弱于直接使用 Gurobi;但在 E~G 组 Gurobi 分组要优于 Gurobi,并且随着待切割排样矩形块数量的增加,Gurobi 方法的面积利用率不断下降;而 CutLogic2D 和 GA+LHL 方法的面积利用率趋于稳定,且集中于 91% 以上。

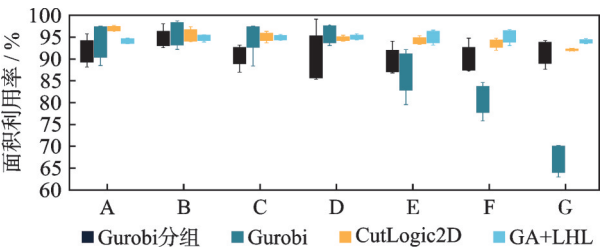


图 16 $N_T(n)$ 面积利用率
Fig.16 Area utilization of $N_T(n)$

由图 17 的切割排样价值偏差分组箱线图可知:在 A~C 组 Gurobi 分组方法要弱于 Gurobi 方法;Gurobi 方法的相对价值偏差最小,Gurobi 要优于 CutLogic2D 和 GA+LHL;Gurobi 分组方法要优于 CutLogic2D,Gurobi 分组方法数据相对集中,而 CutLogic2D 方法数据相对分散;随着待切割排样矩形块数量的增加,在 D~G 组 Gurobi 分组和 GA+LHL 两种方法计算效果较好,相对价值偏差均较小;在 D~F 组 Gurobi 要优于 CutLogic2D,在 G 组要弱于 CutLogic2D;CutLogic2D 方法在 A~G 组所呈现的相对价值偏差较大。总体上 A~G 组 Gurobi 分组方法在切割排样价值方面相对可行。

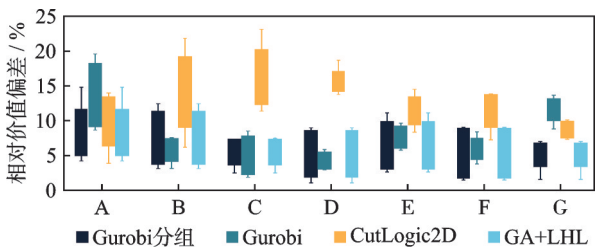


图 17 $N_T(n)$ 相对价值偏差
Fig.17 Relative value deviation of $N_T(n)$

图 18 是各组别求解时间箱线图,可知 Gurobi 分组方法和 CutLogic2D 方法相对较小稳定且集中,优于 Gurobi 方法;待切割排样矩形块数量的增加,导致 Gurobi 和 GA+LHL 方法的求解时间快速增加,在 A~D 组 GA+LHL 求解时间相对可接受,平均约为 794.49 s,E~G 组求解时间达到了

2 000 s 以上;Gurobi 在 A~C 组求解时间部分算例为 100 s 之内,其余组别为 7 200 s 左右,运算时间相对较长,这表明问题复杂度也随之不断增加。

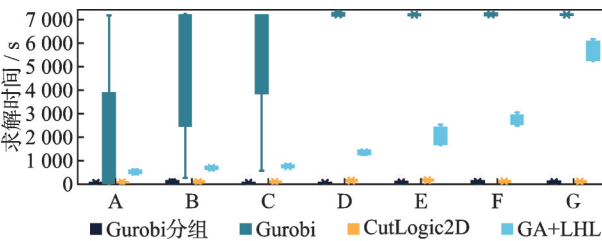


图 18 $N_T(n)$ 求解时间
Fig.18 Solving time of $N_T(n)$

图 19 是算例 E-4 使用 Gurobi 分组方法所计算得到的结果。共分为 7 块小矩形板,为减少启发式分组策略在切割排样过程中的不确定性,1~6 组各矩形块数量为 10 个,第 7 组为 13 个。虽然小矩形板的面积利用率并不高,但较少的矩形块数量减少了求解时间,仅为 54.72 s,远远优于图 20 中直接使用 Gurobi 方法的 7 273.37 s,矩形板面积利用率为 86.86%,略高于图 20 中的 86.25%,切割排样价值为 8 804,同样略高于图 20 中的 8 704。图 21

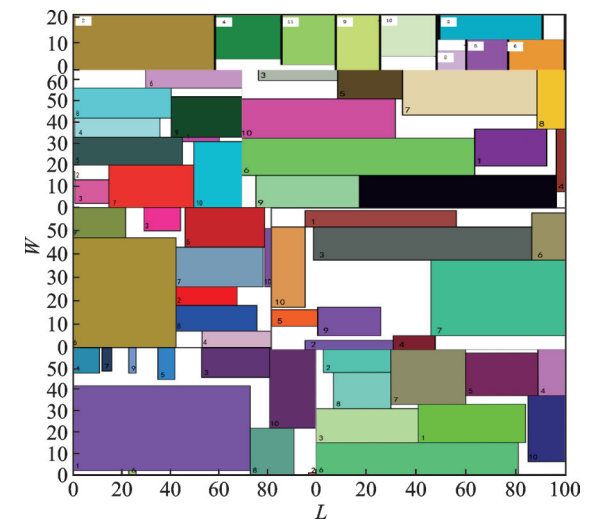


图 19 $N_T(n)$ 算例 E-4 Gurobi 分组
Fig.19 Gurobi group of test E-4 of $N_T(n)$

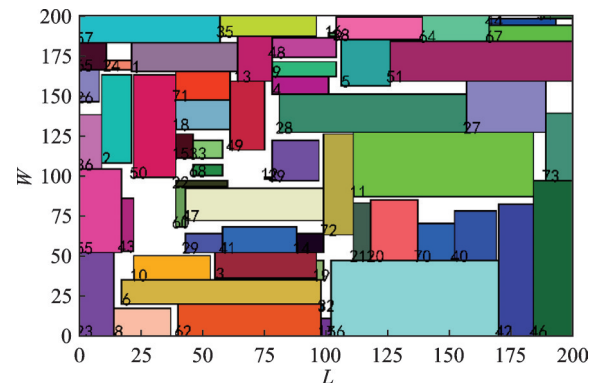
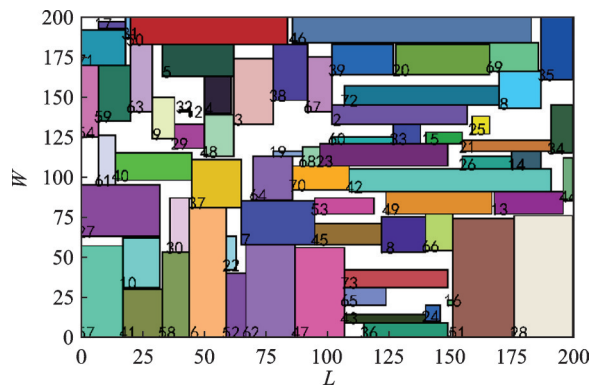


图 20 $N_T(n)$ 算例 E-4 Gurobi
Fig.20 Gurobi of test E-4 of $N_T(n)$

图 21 N_T(n)算例 E-4 常规 GurobiFig.21 Conventional Gurobi of test E-4 of N_T(n)

是不含分组策略和旋转约束的 Gurobi 方法求解计算得到的切割排样结果,面积利用率为 80.57%,切

割排样价值为 9 352,求解时间为 7 203.44 s,与含正交旋转约束的图 20 相比,多数矩形块发生了正交旋转,增加了面积利用率。

3.3.4 BKW 算例

本组共有 13 组算例数据,待切割排样矩形块面积之和恰好为矩形板的面积。

表 5 为 BKW 算例结果。4 种方法的矩形板面积平均利用率分别为 91.78%、78.98%、94.95%、98.75%;其中使用 Gurobi 计算的算例 1-9 到 1-13 发生了内存不足的现象,使得算例程序提前结束;在切割排样价值上,4 种方法平均值分别为 220 027.33、146 860、256 413.08、262 727;在求解时间上,4 种方法平均值分别为 104.87、3 865.98、390.00 和 6 902.34 s。

表 5 BKW 算例结果

Table 5 Results of the BKW arithmetic example

算例	Gurobi 分组			Gurobi			CutLogic2D			GA+LHL		
	S/%	V ₁	T/s	S/%	V ₁	T/s	S/%	V ₁	T/s	S/%	V ₁	T/s
1-1	95.00	7 233	2.45	93.25	6 679	0.75	100.00	7 950	4	100.00	7 950	309.90
1-2	90.80	17 068	1.20	87.07	16 329	0.22	98.66	17 227	75	100.00	17 770	613.76
1-3	92.40	21 329	8.32	98.07	22 840	7 208.74	98.93	23 241	62	100.00	23 936	686.54
1-4	94.14	25 879	10.02	98.30	26 784	7 201.49	98.18	27 580	77	100.00	28 033	1 282.71
1-5	94.33	33 304	15.72	95.56	33 359	7 206.66	90.64	30 938	79	96.31	33 105	1 384.68
1-6	93.22	24 983	26.46	96.58	25 423	7 203.47	97.70	24 688	104	98.80	26 690	1 425.14
1-7	95.85	49 494	24.73	92.67	47 684	7 201.30	93.30	51 302	58	98.61	52 209	2 836.67
1-8	90.59	55 365	28.19	85.55	53 754	7 206.85	95.25	56 091	134	96.49	57 963	2 787.18
1-9	89.66	72 360	30.22	64.19	55 456	2 163.74	96.97	71 140	142	100.00	76 381	2 212.23
1-10	90.98	139 824	59.66	54.55	109 233	1 500.06	91.73	149 005	98	99.35	137 494	4 586.17
1-11	91.35	227 853	76.94	56.37	146 922	1 400.44	89.77	226 826	135	95.84	229 995	6 590.80
1-12	88.33	321 097	135.65	55.33	210 951	1 006.74	91.73	365 369	429	100.00	370 347	15 014.59
1-13	86.43	1 864 566	943.78	49.30	1 153 760	957.24	91.55	2 282 013	3 673	98.35	2 353 578	72 000.90
均值	91.78	220 027.33	104.87	78.98	146 860	3 865.98	94.95	256 413.07	390.00	98.75	262 727	8 594.71

由图 22 矩形板面积利用率箱线图可知 Gurobi 分组稍弱于 CutLogic2D 和 GA+LHL 算法;而 Gurobi 方法因内存不足导致部分算例如 1-9 到 1-13 在面积利用率上显著弱于其他 3 种方法,从而在整体上也要弱于其他 3 种方法。

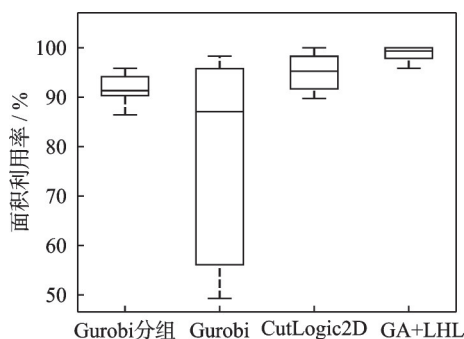


图 22 BKW 面积利用率

Fig.22 Area utilization of BKW

由图 23 的矩形块切割排样相对价值偏差箱线图可知 Gurobi 分组方法要稍优于 Gurobi 方法。由图 24 的求解时间箱线图可知,使用了分组策略的 Gurobi 方法要明显优于 Gurobi 方法。

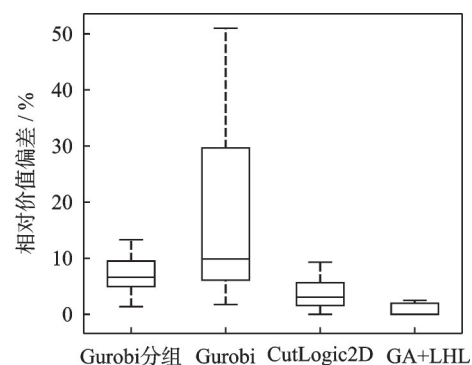


图 23 BKW 相对价值偏差

Fig.23 Relative value deviation of BKW

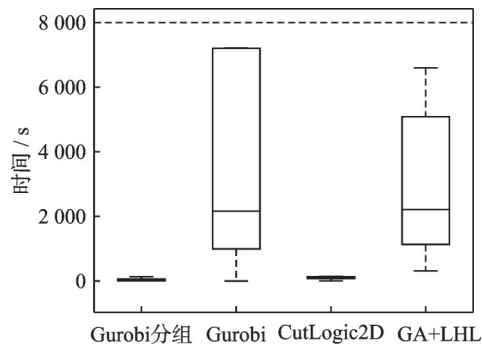


图 24 BKW 求解时间

Fig.24 Solving time of BKW

图 25 是算例 1-3 使用 Gurobi 分组策略后得到的结果,在分组策略下,分为宽固定 30、长分别为 15 和 35 的两组。矩形板面积利用率为 92.40%,切割排样价值为 21 329,求解时间为 8.32 s。图 26 是

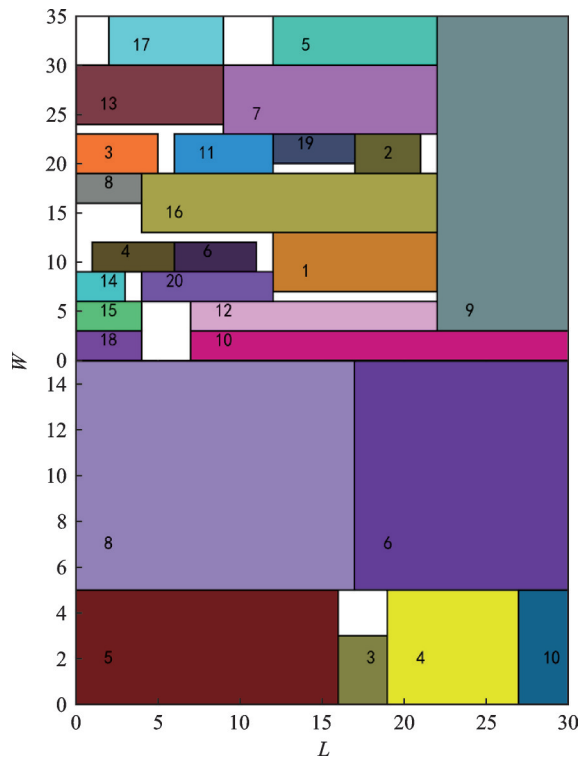


图 25 BKW 算例 1-3 Gurobi 分组

Fig.25 Gurobi group of test 1-3 of BKW

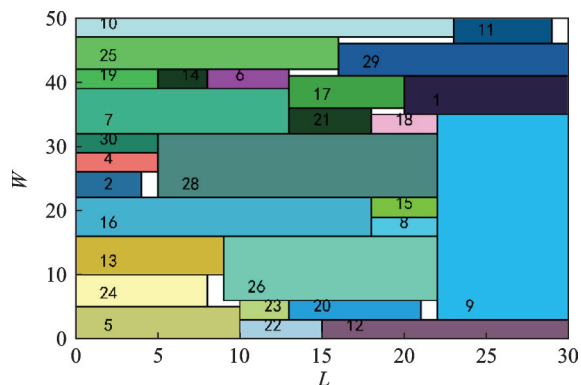


图 26 BKW 算例 1-3 Gurobi

Fig.26 Gurobi of test 1-3 of BKW

未使用分组策略的 Gurobi 方法,矩形板面积利用率为 98.07%,切割排样价值为 22 840,求解时间为 7 208.74 s。图 27 为常规 Gurobi 方法,即没有使用分组策略和不含正交旋转约束。矩形板面积利用率为 93.93%,切割排样价值为 23 378。求解时间为 7 219.84 s。

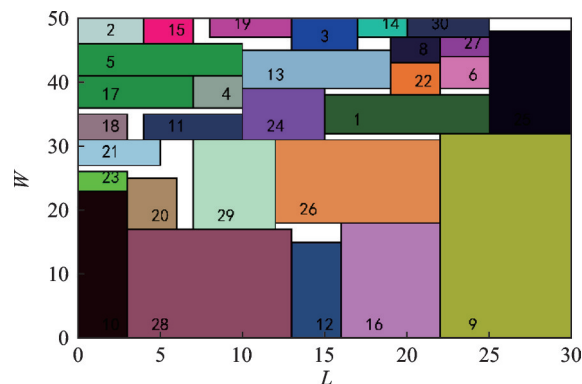


图 27 BKW 算例 1-3 常规 Gurobi

Fig.27 Conventional Gurobi of test 1-3 of BKW

由图 25、26 可知,分组策略的使用可以有效提高求解速度;由图 26、27 可知,正交旋转能够提升矩形板面积利用率。

3.3.5 HT 算例

本组共有 9 组算例数据,每个算例矩形块的面积之和与矩形板的面积相同。

表 6 为 HT 算例结果,可知 4 种方法的矩形板面积平均利用率为 92.78%、98.52%、98.99%、97.90%;在切割排样价值上平均值分别为 8 257.38、8 584.63、8 566.11、8 697.00;在求解时间上平均值分别为 16.84、4 546.32、27.69 和 744.21 s。

由图 28 矩形板面积利用率箱线图可知,Gurobi 分组要弱于 Gurobi、CutLogic2D 和 GA+LHL 算法,但 Gurobi 要数据分散,没有其他 3 种方法集中。由图 29 的矩形板切割排样价值偏差箱线图可知,Gurobi 分组方法在部分算例上要稍优于 Gurobi 方法,Gurobi、CutLogic2D 和 GA+LHL 在总体上基本保持一致,最小为 0%,最大不超过 10%。由图 30 的求解时间箱线图可知,Gurobi 分组方法要明显优于 Gurobi 方法,略优于 GA+LHL 算法,与 CutLogic2D 几乎接近,Gurobi 方法分散,部分求解时间达到了 7 200 s。

图 31 是算例 1-9 使用 Gurobi 分组策略后得到的结果,在分组策略下,分为宽固定 30、长分别为 16、24 和 20 的 3 组。矩形板面积利用率为 89.66%,切割排样价值为 11 158,求解时间为 4.13 s。图 32 是算例 1-9 未使用分组策略的 Gurobi 方法,矩形板面积利用率为 98.44%,切割排样价值为 11 835,求解时间为 2 163.74 s。图 33 为常规 Gurobi 方法,即没有使用分组策略和不含正交旋转约束。矩形板

表 6 HT 算例结果

Table 6 Results of the HT arithmetic example

算例	Gurobi 分组			Gurobi			CutLogic2D			GA+LHL		
	S/%	V_1	T/s	S/%	V_1	T/s	S/%	V_1	T/s	S/%	V_1	T/s
1-1	94.36	4 946	2.45	98.50	5 018	7 200.27	100.00	5 325	5	100.00	5 325	523.29
1-2	94.81	4 528	2.66	99.00	4 670	7 200.36	98.00	4 477	16	100.00	4 814	515.06
1-3	95.23	4 863	8.32	100.00	5 178	27.8	100.00	5 178	3	100.00	5 178	520.51
1-4	96.84	7 642	19.55	98.30	7 824	7 200.41	99.66	7 850	77	100.00	8 195	808.32
1-5	94.36	8 695	18.36	100.00	9 215	2 182.26	99.50	8 829	51	82.67	8 580	827.49
1-6	97.91	10 616	22.78	100.00	10 944	538.87	100.00	10 944	40	100.00	10 944	776.36
1-7	95.51	9 696	39.68	94.67	9 521	7 201.3	98.00	9 668	5.25	100.00	10 528	931.39
1-8	95.36	12 637	33.65	97.78	13 048	7 201.85	96.11	13 190	46	99.78	12 958	911.04
1-9	89.66	11 158	4.13	98.44	11 835	2 163.74	99.63	11 634	5.99	98.67	11 751	884.45
均值	92.78	8 257.38	16.84	98.52	8 584.63	4 546.32	98.99	8 566.11	27.69	97.90	8 697.00	744.21

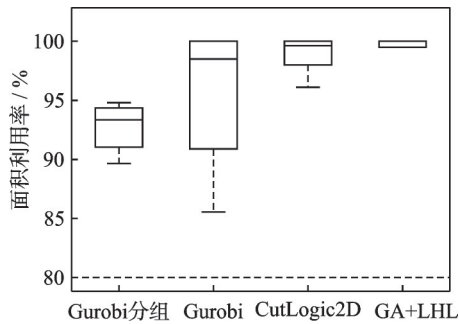


图 28 HT 面积利用率

Fig.28 Area utilization of HT

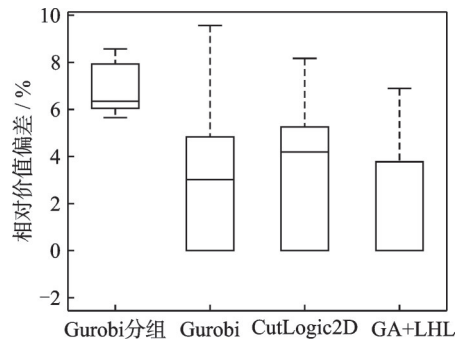


图 29 HT 相对价值偏差

Fig.29 Relative value deviation of HT

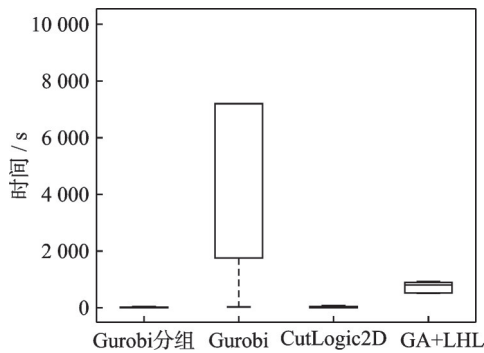


图 30 HT 求解时间

Fig.30 Solving time of HT

面积利用率 97.78%,分切割排样价值为 10 861,求解时间 7 201.71 s。

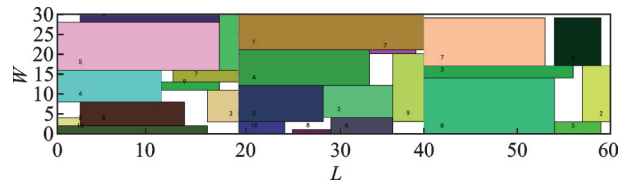


图 31 HT 算例 1-9 Gurobi 分组

Fig.31 Gurobi group of test 1-9 of HT

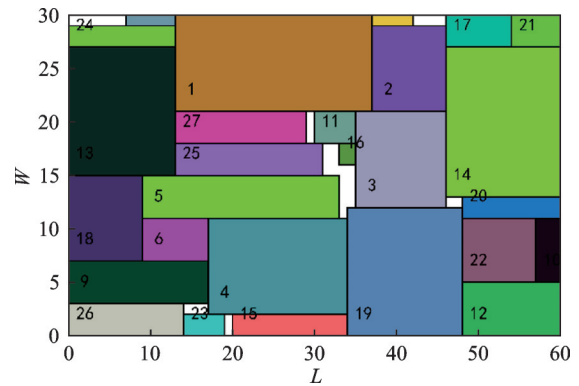


图 32 HT 算例 1-9 Gurobi

Fig.32 Gurobi of test 1-9 of HT

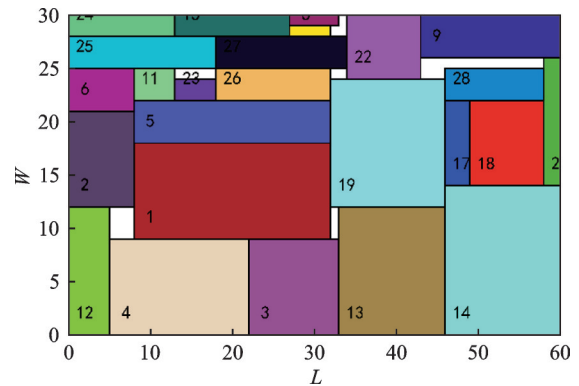


图 33 HT 算例 1-9 常规 Gurobi

Fig.33 Conventional Gurobi of test 1-9 of HT

由图 31、32 可知,分组策略的使用可以有效提高求解速度;由图 32、33 可知,正交旋转能够提升矩形板面积利用率。

3.3.6 综合分析

表 7 是 5 组算例在面积利用率、切割排样价值、求解时间的各平均值,其中 $N_T(n)A \sim N_T(n)G$ 是算例 $N_T(n)$ 的 7 组分算例。结合 3.3.1~3.3.5 节可知,专业的切割下料软件 CutLogic2D 综合求解效果较好,可快速完成矩形块的位置分配,具有较高的面积利用率和切割排样价值;Gurobi 分组因含有分组策略,是求解器和启发式的组合方法,因此计算效果次之;Gurobi 和 GA+LHL 因需要耗费

较长的求解时间,这在实际的生产中是无法接受的。其中具有分组策略的 Gurobi 分组方法和直接应用 Gurobi 求解模型的两种实验条件下,平均求解时间分别为 35.63 和 5 418.19 s,这表明 Gurobi 分组方法的使用减少了 99.33% 的计算时间,矩形块分组策略的使用将问题规模减小,降低了计算资源的消耗,使得求解性能大幅提升。从而证明启发式分组策略具有一定的有效性,可以提高求解速度。

表 7 综合分析
Table 7 Comprehensive analysis

算例	Gurobi 分组			Gurobi			CutLogic2D			GA+LHL		
	S/%	V_1	T/s	S/%	V_1	T/s	S/%	V_1	T/s	S/%	V_1	T/s
GCUT	87.06	3 559.31	40.30	84.46	3 567.00	2 231.31	88.34	3 559.92	50.46	79.32	3 291.90	644.03
BENG	89.66	5 009.92	58.30	89.08	4 761.80	7 257.93	96.00	5 038.20	64.00	82.43	4 895.12	48.77
$N_T(n)A$	91.72	2 019.20	8.03	93.88	1 908.60	1 561.30	97.08	1 984.20	32.20	94.18	1 992.86	479.02
$N_T(n)B$	94.60	2 865.80	37.47	95.80	2 928.80	5 308.72	95.60	2 645.60	51.40	94.90	2 596.78	657.61
$N_T(n)C$	91.09	3 453.60	8.48	95.63	3 475.40	5 867.35	95.19	3 066.00	51.20	95.08	3 322.36	716.71
$N_T(n)D$	89.84	5 914.60	7.43	96.08	5 945.80	7 238.10	94.71	5 245.20	111.00	95.11	5 884.70	1 324.62
$N_T(n)E$	89.28	9 042.00	28.58	87.22	8 998.40	7 225.72	94.29	8 605.40	126.60	95.17	9 392.12	1 971.64
$N_T(n)F$	90.16	11 904.00	51.00	80.64	11 885.20	7 237.37	93.69	11 184.00	69.40	95.42	12 192.60	2 716.68
$N_T(n)G$	90.44	24 197.00	30.68	68.17	23 516.00	7 260.00	91.97	23 811.00	38.00	93.90	24 714.00	5 673.93
BKW	91.76	219 923.87	104.87	78.98	146 860.57	3 865.98	94.95	256 413.08	390.00	98.75	262 727.00	8 594.71
HT	95.63	8 350.80	20.96	98.52	8 583.63	4 546.32	98.99	8 566.11	27.69	97.90	8 697.00	744.21
均值	90.76	31 964.55	35.63	88.04	20 220.93	5 418.19	94.62	30 010.79	92.00	92.92	30 882.40	2 142.90

4 结 论

本文为研究飞机装载非集装箱的载重平衡问题,研究了矩形块二维切割排样问题,得到了以下结论。

- (1) 建立了单矩形板长宽固定的二维切割排样整数规划模型,以矩形板面积利用率最大和切割排样价值最大为目标,考虑了实际切割过程中矩形块不超边界、两两间不重叠、不超矩形板面积、可正交旋转的约束。
- (2) 依据“分而治之”的策略,基于嵌套整数规划模型设计了多目标分组策略的启发式分组方法。同时,将含有分组策略的 Gurobi 分组方法与直接使用 Gurobi 方法相比可知,分组方法有效降低了问题的复杂度和程序运行时间,提高了矩形板面积利用率,数据适应能力强,适合求解大规模没有明显规律的切割排样问题。
- (3) 分组过程中考虑了求解计算时间,确定每组矩形块的数量,确保每组问题在可接受时间内得到高质量的解。
- (4) 矩形板和矩形块同步分组,将大矩形板划分为与矩形块分组数量相匹配的小矩形板,确保了

- 分组的一致性和匹配性。
 - (5) 使用 Gurobi 精确求解与启发式分组结合参与二维矩形块切割排样问题,分组策略减小了问题规模,求解器提高了算法求解效率。
 - (6) 分别从矩形板面积利用率、排样价值、求解时间 3 方面对比分析了 5 种不同数据特征的 Benchmark 算例,与 GA+LHL 相比,Gurobi 在求解时间上具有显著优势,验证了模型的正确性和算法的可行性。
 - (7) 通过实验结果可知,整数规划模型中矩形块可正交旋转约束的加入,放宽了前期文献中固定方向放置的约束,提升了矩形板切割的灵活性,提高了面积利用率。
- 在航空货运行业,未来为实现民航货机、民转军运输机、军用运输机精准装载大型货物,确定货物的位置及放置方向,可将二维切割排样理论和分组策略应用到飞机货物装载中,与飞机的重量与平衡理论相结合,建立基于二维切割排样的非集装箱载重平衡数学优化模型。精准的装载方案不仅可以实现较好的重心和荷载,还可以确保飞机高效安全运行,是一种有效降低飞机运输货物安全风险的

理论方法。同时基于数学模型的分组策略也可以应用到三维切割问题、二维金属零件排样、二维装箱、不规则货物装箱等典型运筹学问题。

参考文献:

- [1] CASTRO P M, OLIVEIRA J F. Scheduling inspired models for two-dimensional packing problems[J]. *European Journal of Operational Research*, 2011, 215(1): 45-56.
- [2] PUCHINGER J, RAIDL G R. Models and algorithms for three-stage two-dimensional bin packing[J]. *European Journal of Operational Research*, 2007, 183(3): 1304-1327.
- [3] BELOV G, SCHEITHAUER G. A branch-and-cut-and-price algorithm for one-dimensional stock cutting and two-dimensional two-stage cutting[J]. *European Journal of Operational Research*, 2006, 171(1): 85-106.
- [4] PISINGER D, SIGURD M. The two-dimensional bin packing problem with variable bin sizes and costs [J]. *Discrete Optimization*, 2005, 2(2): 154-167.
- [5] PISINGER D, SIGURD M. Using decomposition techniques and constraint programming for solving the two-dimensional bin-packing problem[J]. *INFORMS Journal on Computing*, 2007, 19(1): 36-51.
- [6] BETTINELLI A, CESELLI A, RIGHINI G. A branch-and-price algorithm for the two-dimensional level strip packing problem[J]. *4OR*, 2008, 6(4): 361-374.
- [7] CÔTÉ J F, DELL'AMICO M, IORI M. Combinatorial benders' cuts for the strip packing problem[J]. *Operations Research*, 2014, 62(3): 643-661.
- [8] BAKER B S, COFFMAN J, RIVEST R L. Orthogonal packings in two dimensions[J]. *SIAM Journal on Computing*, 1980, 9(4): 846-855.
- [9] HOPPER E, TURTON B C H. An empirical investigation of meta-heuristic and heuristic algorithms for a 2D packing problem[J]. *European Journal of Operational Research*, 2001, 128(1): 34-57.
- [10] CHAZELLE B. The bottomn-left bin-packing heuristic: An efficient implementation [J]. *IEEE Transactions on Computers*, 1983, C-32(8): 697-707.
- [11] WEI L J, OON W C, ZHU W B, et al. A skyline heuristic for the 2D rectangular packing and strip packing problems[J]. *European Journal of Operational Research*, 2011, 215(2): 337-346.
- [12] KENYON C, RÉMILA E. A near-optimal solution to a two-dimensional cutting stock problem[J]. *Mathematics of Operations Research*, 2000, 25(4): 645-656.
- [13] ALVAREZ-VALDES R, PARREÑO F, TAMARIT J M. Reactive GRASP for the strip-packing problem[J]. *Computers & Operations Research*, 2008, 35(4): 1065-1083.
- [14] GONÇALVES J F, WÄSCHER G. A MIP model and a biased random-key genetic algorithm based approach for a two-dimensional cutting problem with defects[J]. *European Journal of Operational Research*, 2020, 286(3): 867-882.
- [15] AYADI O, MASMOUDI M, BEN AMEUR M, et al. A new PSO-based algorithm for two-dimensional non-guillotine non-oriented cutting stock problem[J]. *Applied Artificial Intelligence*, 2017, 31(4): 376-393.
- [16] ALVAREZ-VALDÉS R, PARAJÓN A, TAMARIT J M. A tabu search algorithm for large-scale guillotine (un) constrained two-dimensional cutting problems[J]. *Computers & Operations Research*, 2002, 29(7): 925-947.
- [17] ALVAREZ-VALDES R, PARREÑO F, TAMARIT J M. A tabu search algorithm for a two-dimensional non-guillotine cutting problem[J]. *European Journal of Operational Research*, 2007, 183(3): 1167-1182.
- [18] SILVA E F, TOFFOLO T A M, WAUTERS T. Exact methods for three-dimensional cutting and packing: A comparative study concerning single container problems[J]. *Computers & Operations Research*, 2019, 109: 12-27.
- [19] 黄红兵. 矩形件下料优化排样的遗传算法[D]. 桂林: 广西师范大学, 2005.
HUANG Hongbing. Genetic algorithm for optimal layout of rectangular parts[D]. Guilin: Guangxi Normal University, 2005.

(编辑:张蓓)