

DOI:10.16356/j.1005-2615.2025.04.006

小 Pr 数液桥的浮力-热毛细对流线性稳定性分析

吴玉龙^{1,2}, 漆文凯¹

(1. 南京航空航天大学能源与动力学院, 南京 210016; 2. 中国航发成都发动机有限公司, 成都 610500)

摘要: 为研究小 Pr 数液桥的浮力-热毛细对流线性稳定性, 在常重力条件下(更贴合实际条件), 结合两个不同的加热方式对 $Pr=0.011$ 的硅液桥的浮力-热毛细对流稳定性进行了研究, 并与零重力时液桥的流动稳定性进行比较。结果显示: 重力存在和零重力时流动的失稳类型均为由剪切机制导致的波数为 2 的静态失稳, 重力的引入并没有改变流动的失稳模式和失稳机制。重力存在时, 加热方向的不同对液桥流动稳定性的影响不同, 考虑自由液面变形时, 底部加热时液桥流动的稳定性强于顶部加热时液桥流动的稳定性, 不考虑自由液面变形时则与之相反。常重力时, 液桥流动的稳定性并不总是强于零重力时液桥流动的稳定性, 与加热方式相关; 当 Bo 不大于 0.34(底部加热)或 Bo 不大于 3.05(顶部加热)时可以忽略重力对液桥流动稳定性的影响。

关键词: 液桥; 浮力-热毛细对流; 稳定性; 能量分析

中图分类号: O368

文献标志码: A

文章编号: 1005-2615(2025)04-0640-09

Linear Stability Analysis of Buoyancy-Thermocapillary Convection of Liquid Bridge with Small Pr Number

WU Yulong^{1,2}, QI Wenkai¹

(1. College of Energy and Power Engineering, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing 210016, China;

2. Aero Engine Corporation of China Chengdu Engine Co., Ltd., Chengdu 610500, China)

Abstract: To study the linear stability of the buoyancy-thermocapillary convection in a small Prandtl number liquid bridge, the buoyancy-thermalcapillary convection stability of silicon liquid bridge with $Pr=0.011$ is studied under constant gravity combined with two different heating methods, and compared with the flow stability of liquid bridge under zero gravity (real-world applicability). The results show that: The instability type of flow in the presence of gravity and zero gravity is static instability with wave number 2, and the instability of flow is caused by shear mechanism. The introduction of gravity has not changed the instability mode and mechanism of flow. While gravity exists, different heating directions have different effects on the flow stability of the liquid bridge. When considering the free surface deformation, the stability of the liquid bridge flow under bottom heating is stronger than that under top heating, and the opposite is true when not considering the deformation of free surface. The stability of liquid bridge flow in the presence of constant gravity is not always stronger than that in zero gravity, which is related to the heating mode. When $Bo \leq 0.34$ (bottom heating) or $Bo \leq 3.05$ (top heating), the effect of gravity on the flow stability of the liquid bridge can be neglected.

Key words: liquid bridge; buoyancy-thermocapillary convection; stability; energy analysis

热毛细对流和浮力-热毛细对流广泛存在于许多工业生产和技术研究中, 浮区法制备高质量单晶

硅^[1]就是其中很重要的一个应用。在空间微重力环境下, 可以生产出较大尺寸的晶体, 但由于其

收稿日期: 2024-12-10; 修订日期: 2025-06-11

通信作者: 吴玉龙, 男, 工程师, E-mail: 913365945@qq.com。

引用格式: 吴玉龙, 漆文凯. 小 Pr 数液桥的浮力-热毛细对流线性稳定性分析[J]. 南京航空航天大学学报(自然科学版), 2025, 57(4): 640-648. WU Yulong, QI Wenkai. Linear stability analysis of buoyancy-thermocapillary convection of liquid bridge with small Pr number[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics (Natural Science Edition), 2025, 57(4): 640-648.

特殊的生产条件,难以实现工业化的大规模生产,实际的晶体工业化生产仍以地面为主。在地面的浮区法生产单晶体过程中,由于重力的存在,熔体中存在的均匀的静压容易使得熔区塌陷,此外重力引起的非稳定的浮力流和由流体温度梯度引起的界面上的热毛细流的综合流动使得液桥熔区的流动更为复杂,其流动失稳可能造成比微重力条件下更大的晶体生长条纹,从而影响晶体生长质量。因此,对常重力条件下浮区法制备单晶体过程中熔区的浮力-热毛细流动稳定性的研究显得尤为重要。

液桥模型是被广泛用于研究浮区法晶体生长中熔体流动的简化模型。早期主要集中于对微重力条件下液桥中热毛细对流的研究,在微重力环境下,热毛细流在液桥流体流动中占据主导地位^[2],液桥的自由液面被近似为直圆柱面,使得研究更为方便。Schwabe等^[3-4]通过实验证实了热毛细流失稳会导致对流振荡。随后,Levenstam等^[5]对硅熔体($Pr=0.011$)浮区内的热毛细对流的数值研究表明二维轴对称的热毛细对流失稳会先转化为三维定常流动。Wanschura等^[6]更是结合线性稳定性分析和能量分析,揭示了液桥流动失稳的两种失稳机制,即当 $Pr \ll 1$ 时,流动失稳为静态失稳,由剪切机制造成,当 $0.5 < Pr < 5$ 时,为振荡失稳,由热毛细机制造成。

在重力环境下,液桥的自由液面不再是标准直圆柱面,而是上下不对称的“S”形曲面^[7],这给重力条件下液桥模型的数值计算增加了难度。早期对重力环境下液桥流动稳定性的研究主要以实验的方式进行,而由于小 Pr 液体熔点高、易挥发、不透明等特性,非常不利于实验研究,因此对液桥流动稳定性的实验研究也主要针对比较大 Pr 的液体。Barthel等^[8]和Chun等^[9-10]分别在液桥的地面实验中观测到了液桥中流动从稳态到失稳过程中的过渡现象。Cao等^[11]的实验研究发现自由液面形状参数 $d_{\min}/d_0$ 对液桥内热毛细对流起振非常关键。Hu等^[12]通过地面实验研究了液桥体积比对液桥流动稳定性的影响,获得了具有“胖桥”(Fat bridge)和“瘦桥”(Thin bridge)两个分支的稳定性曲线,并且在两个分支之间出现了一个稳定性趋于无穷大的“gap”区。随后,Masud等^[13]在常重力条件下对多种硅油液桥中热毛细对流由稳态向振荡转变的临界温差随液桥体积比变化的实验研究中也得到了与Hu等^[12]类似的结果。Wang等^[14]在高普朗特数($Pr=28.1$)液桥的地面实验中成功捕捉到了浮力-热毛细对流的失稳临界条件。Shevtsova等^[15]通过对5个不同小组发表的9组高普朗特数($Pr=68$)液桥的地面实验的基础数据进行统计分析,给

出了可用于数值模拟验证用的基准数据。

早期很多学者认为重力环境下小尺寸液桥的界面变形对液桥流动稳定性的影响是可以忽略不计的,因而对重力存在时液桥内浮力-热毛细流的研究是在标准的直圆柱液桥模型上进行的。Wanschura等^[16]在研究 $Pr=4$ 的直圆柱液桥内热毛细管-浮力流的稳定性时指出从底部加热液桥内的流动稳定性比从顶部加热时强。首先在数值上对考虑自由液面变形的液桥进行研究的是Kozhoukharova等^[17],但其研究的液面变形很小。Li等^[18-20]则对具有大变形自由液面的液桥进行了数值研究,但只对液桥内的流动结构进行了简单的研究。Lappa等^[21]则在使用三维直接数值模拟对重力条件下低普朗特数($Pr=0.01, 0.02$)液桥的稳定性进行研究时指出,当忽略液桥自由液面变形,顶部加热时液桥内的流动稳定性强于零重力时液桥内的流动稳定性,底部加热时液桥内的流动稳定性则弱于零重力时液桥内的流动稳定性,这与Wanschura等^[16]的结论相反;而当考虑液桥自由液面变形时,无论哪种加热方式,重力环境下液桥的流动稳定性总是强于零重力时液桥内的流动稳定性。Nienhüser等^[22]在重力环境下对小普朗特数($Pr=0.02$)和大普朗特数($Pr=4$)的液桥进行数值研究时指出,小普朗特数液桥由重力引起的自由液面变形对流动稳定性的影响大于重力引起的浮力对流动稳定性的影响;而大普朗特数液桥则相反。Li等^[23]则在使用三维直接数值模拟对另一低普朗特数($Pr=0.009$)液桥进行研究时进一步指出,重力引起的自由液面变形对液桥内流动的第一次和第二次失稳均占主导作用。最近,Le等^[24]同样使用三维直接数值模拟对重力环境下 $Pr=0.01$ 液桥的流动稳定性进行研究时得出了与Nienhüser等^[22]相同的结论,并指出,重力引起的自由液面变形在从液桥底部加热时对流动的第二次失稳过程起稳定作用,而从液桥顶部加热时则表现为失稳作用。

到目前为止,在重力环境下,以硅为代表的低普朗特数材料无论在实验上还是数值上的研究都很有限,而在地面进行单晶体的大规模工业化生产时重力的影响是个绕不开的话题,硅作为单晶生长的原材料,研究它所形成的液桥在重力条件下的流动稳定性对提高单晶生长质量有很现实的指导意义。本文结合不同的加热方式,对有无重力存在下液桥内流动的稳定性以及相关的失稳机制进行了对比研究。首先,使用高精度的谱元方法精确计算了二维轴对称流动的基态解,然后,使用线性稳定性分析技术对流动失稳的临界参数进行捕捉,最后,使用扰动能量分析揭示了流动失稳的潜在机制。

1 问题描述与数值方法

1.1 数学和物理模型

本文所研究的液桥模型如图 1 所示,顶部为热端(冷端),底部为冷端(热端),热端温度标识为 T_h ,冷端标识为 T_c ,两端圆盘的半径相等且同心,标识为 R ,两个圆盘距离为 H (特征尺寸),熔体保持在两个圆盘之间,熔体边缘与盘的边缘完全贴合,记熔区自由液面上一点到对称轴的垂直距离 $r=f(z)$,其为纵坐标 z 的单值函数。所研究的熔体为硅熔体,其相关的物性参数如表 1 所示。为了方便对液桥模型的描述,定义高径比 $\Gamma=H/R$,体积比 $\nu=V/V_0$,其中 V 为熔区体积, V_0 为与两圆盘等半径的标准直圆柱的体积。

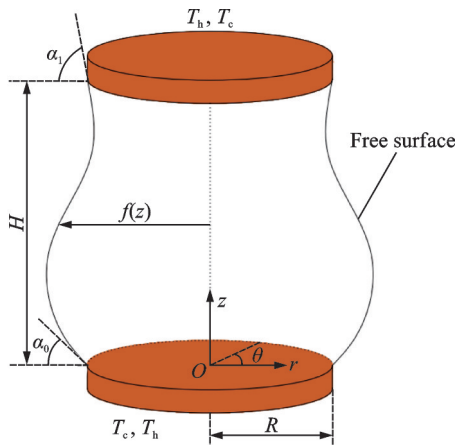


图 1 重力环境下的半浮区液桥模型

Fig.1 Semi-floating zone liquid bridge model under terrestrial gravity

表 1 硅熔体的相关物性参数

Table 1 Relevant physical property parameters of molten silicon

参数	数值
普朗特数 Pr	0.011
密度 $\rho/(\text{kg}\cdot\text{m}^{-3})$	2 530
表面张力系数 $\gamma/(\text{N}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1})$	7×10^{-5}
基础表面张力 $\sigma_0/(\text{N}\cdot\text{m}^{-1})$	1.83×10^{-2}
热扩散系数 $\kappa/(\text{m}^2\cdot\text{s}^{-2})$	2.53×10^{-5}
运动学黏度 $\nu/(\text{m}^2\cdot\text{s}^{-2})$	2.767×10^{-7}
热膨胀系数 β/K^{-1}	1.5×10^{-4}

首先,针对所研究的液桥模型有以下几个基本假设:(1)液桥的上下壁面以及自由液面均绝热;(2)硅熔体为不可压缩的牛顿流体;(3)采用布辛涅司克近似(Boussinesq approximation)的 Navier-Stokse 方程;(4)自由液面上表面张力为温度的线性函数,其函数关系式为 $\sigma(T)=\sigma_0-\gamma(T-T_0)$,其中 σ_0 是参考温度 T_0 下的表面张力, $\gamma=-\partial\sigma/\partial T|_{T=T_0}$ 为线性表面张力系数;(5)液桥无旋

转,即周向速度为 0;(6)所有的固-液接触面均是无滑移的。

基于以上假设,选择用于对长度、时间、速度、压力进行无量纲化的参数分别为 $H, H^2/\nu, \nu/H, \rho\nu^2/H^2$,并定义无量纲的温度 $T^*=(T-T_c)/\Delta T$,其中 $\Delta T=T_h-T_c$ 。重力存在时,基于轴对称坐标系 (r, θ, z) ,控制模型中流体流动的无量纲化的 Navier-Stokse 方程(此处略去了无量纲量的上标“*”,后续无量纲量均略去上标“*”)为

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \nabla^2 \mathbf{u} + Gr Te_z \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T = \frac{1}{Pr} \nabla^2 T \quad (3)$$

式中: $\mathbf{u}=(u, v, w)$ 为速度矢量, e_z 代表 z 方向的单位矢量, p 为压力, T 为温度, t 为时间, ∇ 为梯度算子, ∇^2 为拉普拉斯算子, $Gr=g\beta\Delta TH^3/\nu^2$ 为 Grashof 数, $Pr=\nu/\kappa$ 为 Prandtl 数。

上下固壁边界条件为

$$\begin{cases} z=0: \mathbf{u}=0, T=0 \text{ (顶部加热) 或 } T=1 \text{ (底部加热)} \\ z=\Gamma: \mathbf{u}=0, T=1 \text{ (顶部加热) 或 } T=0 \text{ (底部加热)} \end{cases} \quad (4)$$

自由液面的运动、切向应力平衡以及绝热边界条件为

$$r=f(z): \begin{cases} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \\ \tau_z \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}) = -\frac{Ma}{Pr} \tau_z \cdot \nabla T \\ \tau_\theta \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}) = -\frac{Ma}{Pr} \tau_\theta \cdot \nabla T \\ \mathbf{n} \cdot \nabla T = 0 \end{cases} \quad (5)$$

式中: $\mathbf{n}=\left(\frac{1}{N_f}, 0, \frac{-f'}{N_f}\right)$ 为自由液面曲线上一点的法向量, $\tau_z=\left(\frac{f'}{N_f}, 0, \frac{1}{N_f}\right)$ 为该点在 (r, z) 平面内的切向量, $\tau_\theta=(0, 1, 0)$ 为该点在 (r, θ) 平面内的切向量,其中, $N_f=\sqrt{1+f'^2}$, $f'=\frac{\partial f}{\partial z}$; $\mathbf{S}=\nabla \mathbf{u}+(\nabla \mathbf{u})^T$; $Ma=\gamma\Delta TH/\rho\nu\kappa$ 为 Marangoni 数。

由于重力的存在,液桥自由液面将发生较大变形。自由液面一点到对称轴的垂直距离 $r=f(z)$ 会随着时间动态变化,根据文献[25-26]中的介绍,其形状方程由自由液面处的法向应力平衡确定,其具体表达式为

$$\frac{CaPr}{Ma} P_s = Boz - \frac{1}{N_f} \left(\frac{f''}{N_f^2} - \frac{1}{f} \right) \quad (6)$$

式中 $Ca=\gamma\Delta T/\sigma_0$, 为 Capillary 数。

相应的边界条件为

$$f(0)=f(\Gamma)=1 \quad (7)$$

该方程含 P_s, ν 两个未知变量,因此还需要补充一个控制方程才能对该问题进行求解。基于流体的不可压特性,可引入体积守恒公式

$$\nu = \Gamma^{-1} \int_0^R f^2(z) dz \quad (8)$$

作为补充控制方程,这里以底部半径长为单位“1”长度, ν 为体积比。

本文使用高精度的谱元方法对式(6~8)进行离散求解以得到自由液面的形状,使用时间分裂法形式的谱元方法对式(1~5)进行离散求解以得到轴对称的二维基态解。

1.2 线性稳定性分析

通过对求得的二维基态解施加一个无穷小的三维扰动可以对基态流动的线性稳定性进行研究,将 $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \hat{\mathbf{u}}, p = p_0 + \hat{p}, T = T_0 + \hat{T}$ 代入式(1~3)并舍去二阶小量,可得扰动控制方程如下

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial t} + (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla) \hat{\mathbf{u}} + (\hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \mathbf{u}_0 = -\nabla \hat{p} + \nabla^2 \hat{\mathbf{u}} + Gr \hat{T} \mathbf{e}_z \quad (9)$$

$$\nabla \cdot \hat{\mathbf{u}} = 0 \quad (10)$$

$$\frac{\partial \hat{T}}{\partial t} + (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla) \hat{T} + (\hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla) T_0 = \frac{1}{Pr} \nabla^2 \hat{T} \quad (11)$$

式中: $\mathbf{u}_0, p_0, T_0$ 分别为基态速度、压力和温度, $\hat{\mathbf{u}}, \hat{p}, \hat{T}$ 分别为扰动速度、压力和温度。

扰动边界条件为

$$\begin{cases} z=0: \hat{u}=\hat{v}=\hat{w}=0, \hat{T}=0 \\ z=H: \hat{u}=\hat{v}=\hat{w}=0, \hat{T}=0 \\ r=1: \hat{u}=\hat{w}=f' \\ \frac{\partial \hat{v}}{\partial n} = \frac{1}{N_i} \left(\frac{\hat{v}}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \theta} + f' \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \theta} \right) - \frac{Ma}{Pr} \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{T}}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \hat{w}}{\partial n} = -N_i \frac{Ma}{Pr} \frac{\partial \hat{T}}{\partial \tau} + f' \frac{\partial \hat{w}}{\partial \tau} - \left(f' \frac{\partial \hat{u}}{\partial n} + \frac{\partial \hat{u}}{\partial \tau} \right) \\ \frac{\partial \hat{T}}{\partial n} = -Bi \hat{T} \end{cases} \quad (12)$$

式中 Bi 表示毕渥数,表征导热热阻与换热热阻的比值。

扰动可以用正则模态表达,其表达式为

$$\hat{\phi}(r, \theta, z, t) = \tilde{\phi}(r, z) e^{\lambda t + ik\theta} + \text{c.c} \quad (13)$$

式中: ϕ 代表 $\mathbf{u}, p, T$ 等变量; $\tilde{\phi}(r, z)$ 代表扰动变量场; c.c 代表式(13)右端项中复数虚部项的共轭; $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i$ 为一个复数, λ_r 为线性增长率, λ_i 为振荡频率; k 表示周向失稳波数。将式(13)代入式(11)和(12)并使用 $P_N \times P_{N-2}$ 形式的谱元方法对方程进行离散,可得到一个形如 $\mathbf{A}\tilde{\mathbf{X}} = \lambda \mathbf{B}\tilde{\mathbf{X}}$ 的广义特征值问题,其中 $\mathbf{A}$ 为离散后得到的带状非奇异矩阵, $\mathbf{B}$ 为离散后得到的对角奇异矩阵,其奇异性由对连续性方程的离散引起, $\tilde{\mathbf{X}}$ 表示待求解的扰动变量场。

对该广义特征值问题使用基于 ARPACK 程序包内的隐式重启 Arnoldi 方法 (Implicitly restarted Arnoldi method) 进行求解^[27],随着 $Ma(Re)$ 增加,当求得相应的特征值 λ 后,就可以对流动是否失稳做出判断。当 $\lambda_r < 0$ 时,意味着随着时间的推移,扰动量最终将趋于 0,则流动处于稳定状态;当 $\lambda_r > 0$ 时,意味着随着时间的推移,扰动量最终将趋于无穷大,则流动处于失稳状态;当 $\lambda_r = 0$ 时,则流动处于第一次失稳状态的临界点,此时的 λ 即为线性稳定性分析需要捕捉的临界特征值,对应的 $Ma(Re)$ 为临界 $Ma(Re)$ 。在求得临界特征值后,若与之对应的 $\lambda_i = 0$,则流动属于静态失稳,若与之对应的 $\lambda_i \neq 0$,则流动属于振荡失稳,其中 $\lambda_i > 0$ 表示振荡向顺时针方向传播, $\lambda_i < 0$ 表示振荡向逆时针方向传播。

1.3 能量分析

为了理解具体的流动失稳机制,对临界状态的扰动能量进行分析是非常有必要的。

对扰动动量方程(9)两边点乘扰动速度 $\hat{\mathbf{u}}$,并在整个计算区域内进行积分,可得扰动动能 E_{kin} 的变化率

$$\frac{1}{D_k} \frac{\partial}{\partial t} E_{\text{kin}} = -1 + M_r + M_\theta + M_z + I_v + B_u \quad (14)$$

式中: $D_k = \int_V (\nabla \times \hat{\mathbf{u}})^2 dV$ 表示单位时间内扰动产生的黏性耗散; $M_r = \frac{1}{D_k} \int_S n_z \hat{\mathbf{u}} \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial z} - \frac{\partial \hat{w}}{\partial r} \right) dS$ 表示单位时间内扰动热毛细力在自由液面径向做的功与 D_k 的比值; $M_\theta = \frac{1}{D_k} \int_S \hat{v} \left[n_r \left(\frac{\partial \hat{v}}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \theta} + \frac{\hat{v}}{r} \right) + n_z \left(\frac{\partial \hat{v}}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \theta} \right) \right] dS$ 表示单位时间内扰动热毛细力在自由液面周向做的功与 D_k 的比值; $M_z = \frac{1}{D_k} \int_S n_r \hat{w} \left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial r} - \frac{\partial \hat{u}}{\partial z} \right) dS$ 表示单位时间内扰动热毛细力在自由液面轴向做的功与 D_k 的比值; $I_v = -\frac{1}{D_k} \int_V \hat{\mathbf{u}} \cdot (\hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \mathbf{u}_0 dV = I_{v1} + I_{v2} + I_{v3} + I_{v4} + I_{v5} = -\frac{1}{D_k} \left[\hat{u} \frac{\partial u_0}{\partial r} + \hat{u} \frac{\partial u_0}{\partial z} + \frac{\hat{v} u_0}{r} + \hat{w} \frac{\partial w_0}{\partial r} + \hat{w} \frac{\partial w_0}{\partial z} \right] dV$ 表示单位时间内从基态速度场向扰动速度场传递的能量与 D_k 的比值; $B_u = \frac{Gr}{D_k} \int_V \hat{T} dV$ 表示单位时间内扰动热浮力所做的功与 D_k 的比值。这里, V 表示熔区体积, S 表示自由液面。

上述各能量项用高斯积分近似计算,若值为正表示失稳效应,值为负则表示稳定效应。为了便于

对各能量项的相对大小进行比较,用相应的耗散项 D_k 对各能量项进行了归一化处理。

2 结果与讨论

为进一步验证本研究计算所使用的代码的有

效性,将基于本文代码所计算的临界参数与几个已经发表的文献数据进行了对比,如表 2 所示。可以看到,使用本文代码计算出的 Re_c 与几个已经发表的文献数据的偏差在 2% 以内,保持了很好的一致性,充分证明了本文数值结果的有效性。

表 2 不同普朗特数的液桥 ($\Gamma=1, \nu=1$) 在常重力/零重力下的临界失稳参数

Table 2 Critical instability parameters for liquid bridges with different Prandtl numbers ($\Gamma=1, \nu=1$) under normal/microgravity conditions

Pr	Bo	文献结果				本文结果		
		作者	Re_c	k_c	m_c	Re_c	k_c	m_c
0.01	0(0g)	Lappa 等 ^[28]	1 927	0	2	1 909	0	2
0.01	0(0g)	Wang 等 ^[29]	1 902	0	2			
0.02	5.33(1g)	Nienhüser 等 ^[22]	2 200	0	2	2 240	0	2

根据 Slobozhanin 等^[30],在重力存在的情况下,当液桥的体积比 ν 、高径比 Γ 和 Bo 数的组合关系超出一定界限时轴对称稳定的液桥会发生断裂或者从圆盘边缘剥离,这不属于本文探讨的范畴。根据文献^[30],在 $\Gamma=1, \nu=1$ 时, Bo 数应不大于 5。本文研究的液桥选定 $\Gamma=1, \nu=1$,经计算,要保证硅熔体液桥不发生上述断裂和剥离现象,则该液桥的特征长度 H 应不大于 2 mm。本文选定液桥的特征长度 $H=2$ mm。

选择 $\Gamma=1, \nu=1, Bo=5.42$ 对网格收敛性进行验证。分别使用 $41^\circ \times 49^\circ$ (径向 10 个单元,轴向 12 个单元,单元内采用四阶多项式插值)、 $51^\circ \times 61^\circ$ (径向 10 个单元,轴向 12 个单元,单元内采用五阶多项式插值)、 $61^\circ \times 73^\circ$ (径向 10 个单元,轴向 12 个单元,单元内采用六阶多项式插值) 3 套网格对选定参数的液桥模型的临界 Ma 进行了计算,相对 $61^\circ \times 73^\circ$ 的临界 Ma , $41^\circ \times 49^\circ$ 的临界 Ma 与其偏差不超过 2%, $51^\circ \times 61^\circ$ 的临界 Ma 与其偏差不超过 1%,兼顾计算精度与效率,本文选择 $51^\circ \times 61^\circ$ 进行后续计算。

本文研究的等径液桥固定 $\Gamma=1, \nu=1, H=2$ mm ($Bo=5.42$)。根据加热方式的不同,笔者分两个组别对 8 个工况进行了计算,具体如下:

组别 1 底部加热

- (1) $Bo=0, Gr=0$; (2) $Bo=0, Gr \neq 0$;
(3) $Bo \neq 0, Gr=0$; (4) $Bo \neq 0, Gr \neq 0$

组别 2 顶部加热

- (1) $Bo=0, Gr=0$; (2) $Bo=0, Gr \neq 0$;
(3) $Bo \neq 0, Gr=0$; (4) $Bo \neq 0, Gr \neq 0$

通过计算,上述 8 个工况下的临界参数见表 3。以下将对有无重力存在时流动的失稳机制以及加热方向对流动稳定性的影响进行重点讨论。

2.1 失稳模态和机制

由表 3 可以明确看出,重力存在 ($Bo \neq 0$,

表 3 不同工况下临界参数 ($\Gamma=1, \nu=1$)

Table 3 Critical parameters under different operating conditions ($\Gamma=1, \nu=1$)

参数	底部加热			顶部加热		
	Ma_c	f_c	k_c	Ma_c	f_c	k_c
$Bo=0, Gr=0$	21.0	0	2	21.0	0	2
$Bo=0, Gr \neq 0$	20.8	0	2	21.1	0	2
$Bo \neq 0, Gr=0$	28.7	0	2	24.3	0	2
$Bo \neq 0, Gr \neq 0$	28.7	0	2	24.3	0	2

$Gr \neq 0$) 时,无论底部加热还是顶部加热,流动的失稳均为波数为 2 的静态失稳,这与零重力 ($Bo=0, Gr=0$) 时表现是一样的。重力并没有改变液桥的失稳模式和失稳波数,所不同的是,在重力存在的情况下,液桥流动失稳的临界 Ma_c 数相较于零重力时有了较为明显的提升。

自由液面上扰动温度模式与扰动速度分布如图 2 所示。重力存在 (图 2(c,d)) 和不存在 (图 2(a,b)) 时在自由表面上扰动温度均形成了 2 对冷热

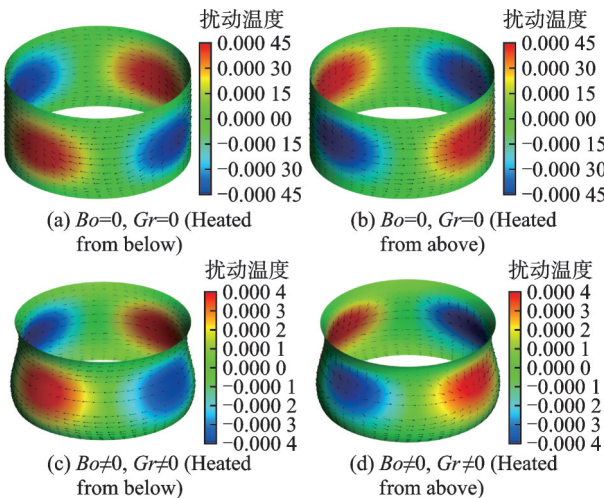


图 2 临界条件下自由液面上的扰动温度模式与扰动速度分布

Fig.2 Disturbance temperature mode and velocity distribution on the free surface under critical conditions

极,这与流动失稳的周向波数为2相对应,且自由液面上的扰动速度从冷极流向热极,与基态温度从热端流向冷端方向相反,这说明无论重力是否存在,流动失稳均属于纯水动力学现象,并不依赖热毛细机制,此时热毛细力只起到驱动热毛细对流的作用。

利用扰动能量分析可以充分揭示流动失稳的机制。重力存在和不存在时的扰动能平衡如图3所示。不管重力是否存在,在扰动动能平衡中都是 I_{v4} 占据主导地位, $I_{v4} = -\int_V \hat{w} \hat{u} \partial_r w_0 dV / D_k$ 表征由

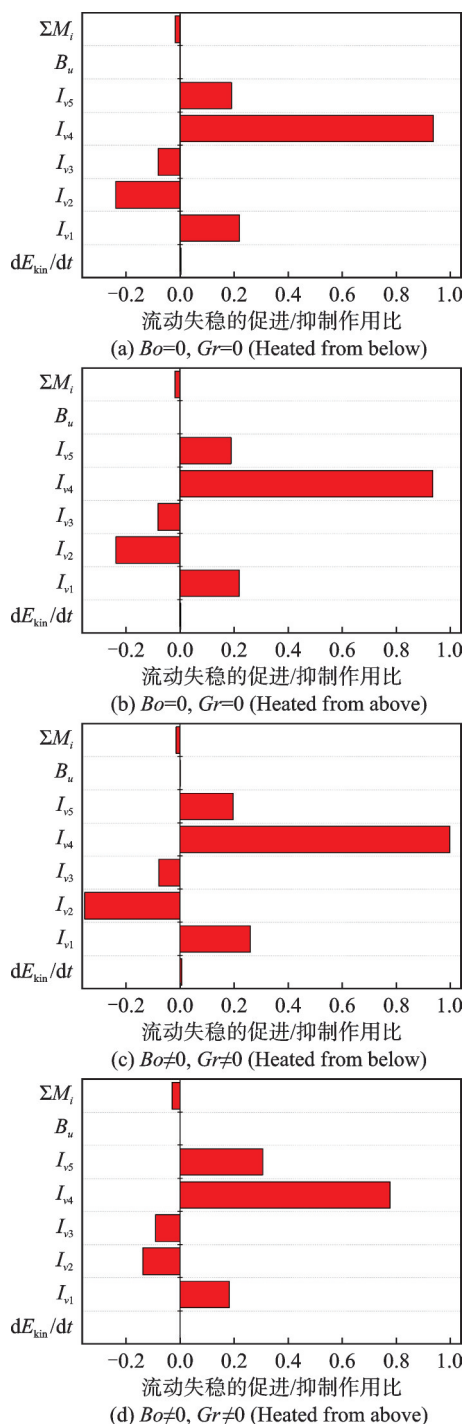


图3 临界条件下扰动动能平衡柱状图

Fig.3 Disturbance kinetic energy budget bar chart under critical conditions

基态流的轴向剪切所引起的从基态流到扰动流场的能量传递。由图4(a~d)左边可以看出,在液桥中部靠近自由液面($r=0.8$)和靠近对称轴($r=0.4$)处轴向速度的径向梯度很大,扰动速度(图4(a~d)右边)在这两处也比较大,使得局部扰动动能 I_{v4} 在这两处产生两个极值。此外,从图4(a~d)右边可以看到,局部扰动总动能 I_v 所形成的两个极值恰能很好地被 I_{v4} 捕捉,进一步说明了使流动失稳的主要能量来自 I_{v4} 。因此,上述流动失稳均是由剪切机制导致的,相同的失稳机制在文献[28]中也被提及。

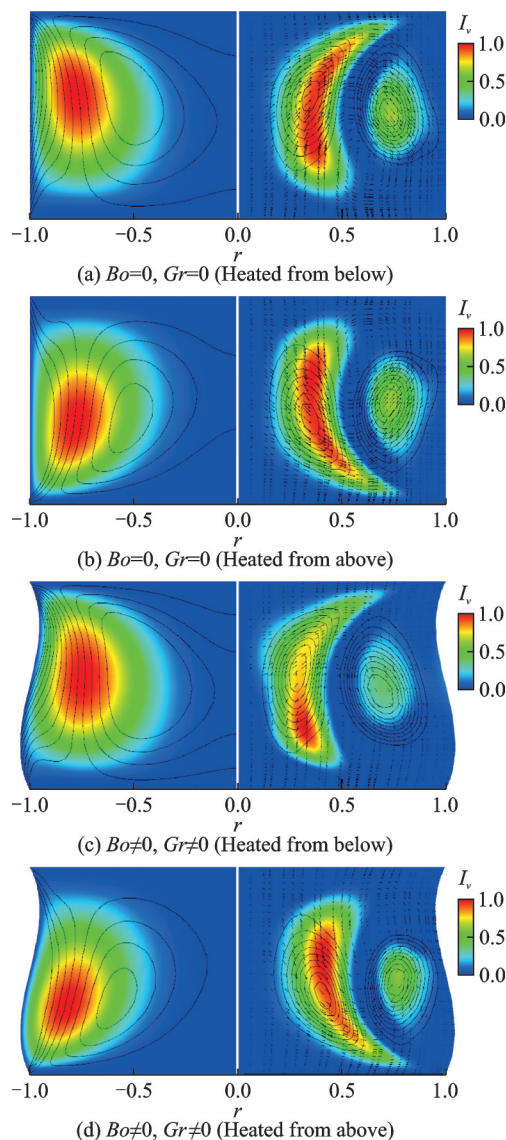


图4 临界条件下流场特征(基态流线(color)、轴向速度(vectors)(左)与扰动速度(isolines)(右)与扰动能量分布(局部能量项 I_{v4} (isolines)与局部扰动总动能 I_v 的极大值的等值面(color)(右))

Fig.4 Flow characteristics (base flow streamlines (color), axial velocity (vectors) on left; perturbation velocity (isolines) on right) and disturbance energy distribution (isolines of local energy term I_{v4} and isosurfaces of maximum local disturbance kinetic energy I_v (color) on right) under critical conditions

2.2 加热方向对流动稳定性的影响

由表 3 可知,重力条件下,不考虑自由液面变形时($Bo=0, Gr \neq 0$),液桥从顶部加热时的临界 Ma 比零重力时的临界 Ma 高约 0.5%,而液桥从底部加热时的临界 Ma 比零重力时的临界 Ma 低约 1%,这与 Lappa 等^[21]使用三维数值模拟对 $Pr=0.01$ 的不变形液桥稳定性进行研究所得出的结论一致。Lappa 等^[21]指出,重力存在时,对直圆柱液桥顶部加热时,流体区域有稳定的热分层,因而其稳定性强于零重力时流动的稳定性,而底部加热由于不稳定的热分层,其稳定性低于零重力时流动的稳定性。

重力存在时,考虑自由液面变形($Bo \neq 0, Gr \neq 0$)时,根据表 3,底部加热时液桥流动的稳定性强于顶部加热时的稳定性,这与 Lappa 等^[21]使用三维数值模拟对 $Pr=0.011$ 的变形液桥稳定性进行研究所得出的结论一致,在很多液桥的地面实验中也得到了类似的结论,与上述直圆柱液桥的结论有所不同。

2.3 重力对流动稳定性的影响

根据表 3,重力存在时, $Pr=0.011$ 的液桥流动的稳定性明显高于零重力时液桥流动的稳定性,这与很多文献的研究结果相同。

相较于零重力时的液桥,重力的引入给液桥带来了两个可能影响其流动稳定性的因素,一个是浮力效应,其强度可由 Gr 数的大小来表征,另外一个使自由液面发生变形,变形的程度可由 Bo 数大小表征。通过对比同一个加热方向下液桥在 $Bo \neq 0, Gr=0$ 与 $Bo \neq 0, Gr \neq 0$ 时的临界 Ma 值,可以发现流动失稳的临界 Ma 值跟 Gr 数是否为零无关,这说明重力存在使液桥稳定性得到提升主要来自其引起的自由液面变形效应,其引起的浮力效应对流动的稳定性影响可以忽略不计。由图 3 也可以很明显地看出重力引起的扰动浮力做功几乎为零,其对流动失稳几乎没有任何能量贡献,再次证明了重力存在时 $Pr=0.011$ 的液桥稳定性的提升主要来自其引起的自由液面变形效应。根据 Nienhüser 等^[22]的研究,由于自由液面的凸形状,涡中心的应变减小,从而增大了对流的稳定性。

以往的研究普遍认为在液桥特征尺寸很小时重力的影响是可以忽略的,然而,尚没有文献明确地量化这个特征尺寸,为此,本文对重力存在时不同加热方式下液桥失稳的临界 Ma 与液桥特征尺寸之间的依赖关系进行了研究,结果如图 5 所示。定义重力存在时不同液桥特征尺寸下的失稳临界 Ma 值相对于零重力时的失稳临界 Ma 值的偏差

$$R_d = \frac{|Ma_c - Ma_{c0}|}{Ma_{c0}} \times 100\% \quad (15)$$

式中 Ma_{c0} 代表零重力时的临界 Ma 数。从图 5 中可以看出,在顶部加热时,随着液桥特征尺寸增加,液桥的 Ma_c 值先减小后增加,在 $H=1$ mm 时最小,这与以往很多研究中认为重力的引入总会使液桥流动稳定性得到增强有所区别,其相对偏差 R_d 在 $H=1.5$ mm 时出现比较大的爬升;在底部加热时,随着液桥特征尺寸增加,液桥的 Ma_c 值单调地增加,相对偏差 R_d 在 $H=0.5$ mm 时出现比较大的爬升。

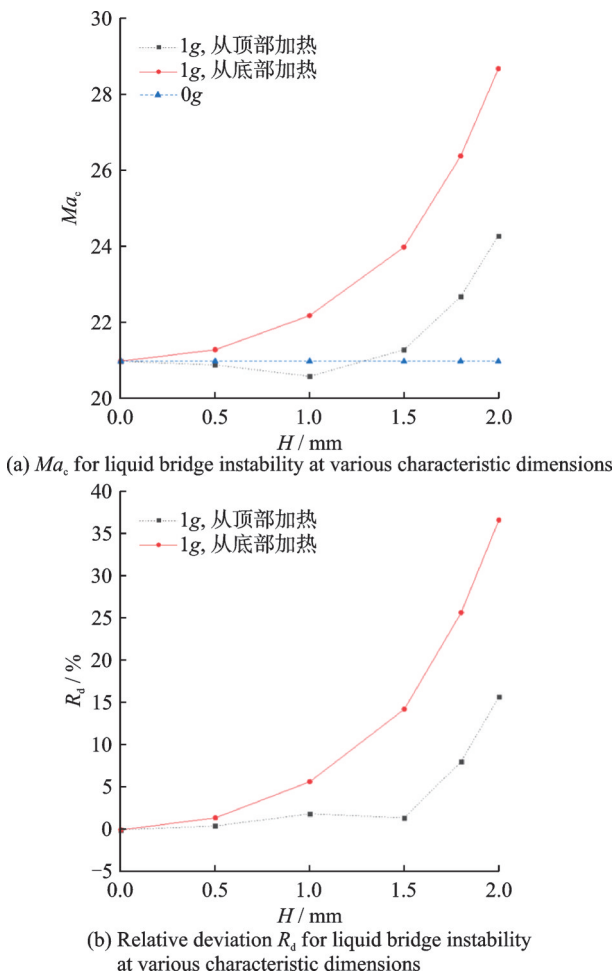


图 5 不同特征尺寸下液桥失稳的 Ma_c 与相对偏差 R_d
Fig.5 Parameter Ma_c and its relative deviation R_d for liquid bridge instability at various characteristic dimensions

如前所述,重力存在时, $Pr=0.011$ 的液桥随着特征尺寸变化而导致稳定性的变化主要由重力引起的自由液面变形效应引起的。底部加热时,随着变形效应的增加(H 增加),相较于零重力条件下,重力的存在总会使液桥的流动稳定性得到提升,当 $Bo \leq 0.34$ ($H \leq 0.5$ mm) 时液桥流动失稳的临界 Ma 值与零重力时液桥流动失稳的临界 Ma 值偏差小于 2%,此时,重力对液桥流动稳定性的影响可以忽略;顶部加热时,随着变形效应的增加(H

增加),重力的存在并不一定使液桥的流动稳定性比零重力时强,当 $Bo \geq 2.29$ ($H \geq 1.3$ mm)时重力的存在才会使液桥的流动稳定性强于零重力时液桥的流动稳定性,无论如何,当 $Bo \leq 3.05$ ($H \leq 1.5$ mm)时液桥流动失稳的临界 Ma 值与零重力时液桥流动失稳的临界 Ma 值偏差小于2%,此时,重力对液桥流动稳定性的影响可以忽略。

3 结 论

本文利用线性稳定性分析对重力环境下固定 $\Gamma=1$ 、 $\nu=1$ 、 $H=2$ mm ($Bo=5.42$)、 $Pr=0.011$ 的等径液桥流动的稳定性进行了研究,同时利用扰动能量分析揭示了相关的失稳机制。结合不同加热方式,通过将重力存在时的计算结果与零重力时的计算结果进行对比,对重力环境下液桥中的浮力-热毛细对流进行了比较充分的研究。

研究表明,重力存在和零重力时流动的失稳类型均为波数为2的静态失稳,失稳机制均为剪切机制,重力的存在并没有对液桥流动的失稳模式和机制产生实质性影响。

重力存在的情况下,考虑自由液面变形时,底部加热时液桥流动的稳定性强于顶部加热时液桥流动的稳定性,不考虑自由液面变形时则与之相反。

重力对液桥流动的稳定性的影响主要由于其引起的自由液面变形效应导致,浮力效应对流动稳定性的影响可以忽略不计。重力存在时液桥流动的稳定性并不总是强于零重力时液桥流动的稳定性,以往很多研究认为重力的引入总会使液桥流动稳定性得到增强,与本文的研究有所区别,从图5中可以看到,顶部加热时,在一定范围内,重力存在情况下的液桥稳定性弱于零重力时的液桥稳定性,这与自由液面变形效应与浮力效应的相对大小有关,这一区域内尽管浮力的失稳效应很微弱,但自由液面变形的稳定效应相对来说更小,因此导致了重力存在时液桥的稳定性小于零重力时的稳定性。随着 Bo 数增大(液桥自由液面变形程度增大),底部加热时,液桥的流动稳定性单调地增加,而顶部加热时,液桥的流动稳定性先减小后增大。

以往的研究基本是定性地认为当液桥特征尺寸很小时重力的影响可以忽略,针对小普朗特数($Pr=0.011$)液桥,本文定量地给出了这一可供参考的特征尺寸的具体数值,当液桥从底部加热时,特征尺寸 $H \leq 0.5$ mm ($Bo \leq 0.34$)时可以忽略重力对液桥流动稳定性的影响;而当液桥从顶部加热时,特征尺寸 $H \leq 1.5$ mm ($Bo \leq 3.05$)时可以忽略重力对液桥流动稳定性的影响。

参考文献:

- [1] MARTINEZ I, EYER A. Liquid bridge analysis of silicon crystal growth experiments under microgravity [J]. *Journal of Crystal Growth*, 1986, 75(3): 535-544.
- [2] KANG Q, WU D, DUAN L, et al. The effects of geometry and heating rate on thermocapillary convection in the liquid bridge[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2019, 881: 951-982.
- [3] SCHWABE D, SCHARMANN A, PREISSER F, et al. Experiments on surface tension driven flow in floating zone melting[J]. *Journal of Crystal Growth*, 1978, 43(3): 305-312.
- [4] SCHWABE D, FRANK S. Experiments on the transition to chaotic thermocapillary flow in floating zones under microgravity[J]. *Advances in Space Research*, 1999, 24(10): 1391-1396.
- [5] LEVENSTAM M, AMBERG G, CARLBERG T, et al. Experimental and numerical studies of thermocapillary convection in a floating zone like configuration [J]. *Journal of Crystal Growth*, 1996, 158(3): 224-230.
- [6] WANSCHURA M, SHEVTSOVA V M, KUHL-MANN H C, et al. Convective instability mechanisms in thermocapillary liquid bridges[J]. *Physics of Fluids*, 1995, 7(5): 912-925.
- [7] PREISSER F, SCHWABE D, SCHARMANN A. Steady and oscillatory thermocapillary convection in liquid columns with free cylindrical surface[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1983, 126: 545-567.
- [8] BARTHEL J, EICHLER K, JURISCH M, et al. On the significance of surface tension driven flow in floating zone melting experiments[J]. *Kristall und Technik*, 1979, 14(6): 637-644.
- [9] CHUN C H, WUEST W. Experiments on the transition from the steady to the oscillatory Marangoni-convection of a floating zone under reduced gravity effect [J]. *Acta Astronautica*, 1979, 6(9): 1073-1082.
- [10] CHUN C H. Experiments on steady and oscillatory temperature distribution in a floating zone due to the Marangoni convection[J]. *Acta Astronautica*, 1980, 7(4/5): 479-488.
- [11] CAO Z H, YOU X T, TANG Z M, et al. Experimental investigation of thermocapillary convection in half floating zone[J]. *Advances in Space Research*, 1991, 11(7): 229-232.
- [12] HU W R, SHU J Z, ZHOU R, et al. Influence of liquid bridge volume on the onset of oscillation in floating zone convection I. Experiments[J]. *Journal of Crystal Growth*, 1994, 142(3/4): 379-384.
- [13] CIPOLLA K, KEITH W, MASUD J, et al. Oscillatory thermocapillary flow in cylindrical columns of

- high Prandtl number fluids[J]. *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, 1997, 11: 105-111.
- [14] WANG J, WU D, DUAN L, et al. Ground experiment on the instability of buoyant-thermocapillary convection in large-scale liquid bridge with large Prandtl number[J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2017, 108: 2107-2119.
- [15] SHEVTSOVA V, MIALDUN A, KAWAMURA H, et al. Onset of hydrothermal instability in liquid bridge[J]. *Fluid Dynamics and Materials Processing*, 2011, 7(1): 1-27.
- [16] WANSCHURA M, KUHLMANN H C, RATH H J. Linear stability of two-dimensional combined buoyant-thermocapillary flow in cylindrical liquid bridges[J]. *Physical Review E, Statistical Physics, Plasmas, Fluids, and Related Interdisciplinary Topics*, 1997, 55(6): 7036-7042.
- [17] KOZHOUKHAROVA Z, SLAVCHEV S. Computer simulation of the thermocapillary convection in a non-cylindrical floating zone[J]. *Journal of Crystal Growth*, 1986, 74(2): 236-246.
- [18] LI J, SUN J, SAGHIR Z. Bouyant and thermocapillary flow in liquid encapsulated floating zone[J]. *Journal of Crystal Growth*, 1993, 131(1/2): 83-96.
- [19] SHEVTSOVA V M, KUHLMANN H C, RATH H J. Thermocapillary convection in liquid bridges with a deformed free surface[C]//*Proceedings of Materials and Fluids Under low Gravity*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1996: 323-329.
- [20] TAO Y, SAKIDJA R, KOU S. Computer simulation and flow visualization of thermocapillary flow in a silicone oil floating zone[J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 1995, 38(3): 503-510.
- [21] LAPP A M, YASUSHIRO S, IMAISHI N. 3D numerical simulation of on ground Marangoni flow instabilities in liquid bridges of low Prandtl number fluid [J]. *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, 2003, 13(3): 309-340.
- [22] NIENHÜSER C, KUHLMANN H C. Stability of thermocapillary flows in non-cylindrical liquid bridges [J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2002, 458: 35-73.
- [23] LI K, MATSUMOTO S, IMAISHI N, et al. Marangoni flow in floating half zone of molten tin[J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2015, 83: 575-585.
- [24] LE C C, LIU L J, LI Z Y. Oscillatory thermocapillary convection in deformed half zone liquid bridges of low Prandtl number fluids[J]. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 2021, 127: 105499.
- [25] CARRIÓN L M, HERRADA M A, MONTANERO J M. Influence of the dynamical free surface deformation on the stability of thermal convection in high-Prandtl-number liquid bridges[J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2020, 146: 118831.
- [26] SIM B C, KIM W S, ZEBIB A. Dynamic free-surface deformations in axisymmetric liquid bridges[J]. *Advances in Space Research*, 2004, 34(7): 1627-1634.
- [27] LEHOUCQ R B, SORESENSEN D C, YANG C. ARPACK users' guide[M]. [S.l.]: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1998.
- [28] LAPP A M, SAVINO R, MONTI R. Three-dimensional numerical simulation of Marangoni instabilities in non-cylindrical liquid bridges in microgravity[J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2001, 44(10): 1983-2003.
- [29] WANG Y, ZENG Z, LIU H, et al. Flow instabilities in thermocapillary liquid bridges between two coaxial disks with different radii[J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2022, 183: 122182.
- [30] SLOBOZHANIN L A, PERALES J M. Stability of liquid bridges between equal disks in an axial gravity field[J]. *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*, 1993, 5(6): 1305-1314.

(编辑:胥橙庭)