第 57 卷第 3 期
2025 年 6 月

南京航空航天大学学报(自然科学版)
Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics (Natural Science Edition)

Vol. 57 No. 3
Jun. 2025

DOI:10. 16356/j. 1005-2615. 2025. 03. 007

4-RPR平面并联机器人的正运动学及奇异性能

李新宇[1], 尤晶晶[1,2], 华　洁[1], 张　毅[1], 叶鹏达[3]

(1.南京林业大学机械电子工程学院,南京 210037; 2.重庆大学高端装备机械传动全国重点实验室,重庆 400044; 3.常州大学机械与轨道交通学院,常州 213164)

摘要: 冗余驱动能够帮助机器人越过奇异位形,但它能否提高机构的运动/力传递性能,尚无定论。鉴于此,首先,设计了一种冗余驱动4-转动副移动副转动副(Revolute-joint,prismatic-joint,revolute-joint,PRR)平面并联机器人,建立并解析求解了其正运动学方程。其次,根据尺度约束关系,推导并解析求解了杆长协调方程。根据位移求导法,推导了雅可比矩阵并分析了奇异位形。接着,借助于广义逆、分块矩阵等数学工具,求解了机器人的局部条件数指标(Local conditioning index,LCI)。最后,对比分析了4-RPR并联机器人与4种3-RPR并联机器人的正解特性、奇异位形和运动/力传递性能。结果显示,所设计的新型机器人的正运动学方程解的个数减少了一半,奇异位形更少,优质工作空间占比提升了1.15%～16.67%。这表明,4-RPR平面并联机器人更易于运动控制,且具有更优越的奇异性能,适合应用于3D打印、码垛等对灵活性要求较高的场景。

关键词: 并联机器人;冗余驱动;正运动学;奇异性;局部条件数

中图分类号: TH112　　**文献标志码:** A　　**文章编号:** 1005-2615(2025)03-0459-08

Forward Kinematics and Singularity of 4-RPR Planar Parallel Robots

LI Xinyu[1], *YOU Jingjing*[1,2], *HUA Jie*[1], *ZHANG Yi*[1], *YE Pengda*[3]

(1. College of Mechanical and Electronic Engineering, Nanjing Forestry University, Nanjing 210037, China; 2. State Key Laboratory of Mechanical Transmission for Advanced Equipment, Chongqing University, Chongqing 400044, China; 3. School of Mechanical and Rail Transit, Changzhou University, Changzhou 213164, China)

Abstract: Redundant actuation can help robots overcome singular configurations, while there is no consensus on whether it can improve the motion/force transmission performance of the mechanism. In this regard, firstly, a redundant actuated 4-revolute-joint, prismatic-joint, revolute-joint (4-PRR) planar parallel robot is designed, and its forward kinematics equation is established and analytically solved. Secondly, based on the scale constraint relationship, the rod length coordination equation is derived and analytically solved. Then, based on the displacement derivative method, the Jacobian matrix is derived and the singular configuration is analyzed. Thirdly, the local conditioning index (LCI) of the robot is solved by using mathematical tools such as the generalized inverse and the block matrix. Finally, the positive solution characteristics, singular configurations, and motion/force transmission performance of the 4-RPR parallel robot are compared with four types of 3-RPR parallel robots. Results show that the number of solutions to the forward kinematics equations of the newly designed robot is reduced by half, with fewer singular configurations and the proportion of high-quality workspace increased by 1.15% to 16.67%. This indicates that the 4-RPR planar

基金项目: 国家自然科学基金(51405237);江苏省大学生创新创业项目(202410298023Z);高端装备机械传动全国重点实验室开放基金(SKLMT-MSKFKT-202330)。

收稿日期: 2025-03-14;**修订日期:** 2025-04-19

通信作者: 尤晶晶,男,副教授,硕士生导师,E-mail:youjingjing251010@njfu.edu.cn。

引用格式: 李新宇,尤晶晶,华洁,等. 4-RPR平面并联机器人的正运动学及奇异性能[J]. 南京航空航天大学学报(自然科学版),2025,57(3):459-466. LI Xinyu, YOU Jingjing, HUA Jie, et al. Forward kinematics and singularity of 4-RPR planar parallel robots[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics (Natural Science Edition), 2025, 57(3):459-466.

parallel robot is easier to control in motion and has superior singularity performance, making it suitable for applications, such as 3D printing and palletizing, that require high flexibility.

Key words: parallel robot; redundant actuation; forward kinematics; singularity; local condition number

冗余驱动并联机器人与一般并联机器人相比，刚度更高、承载能力更强、加速度更大，故更适用于高速重载及大加速度场合。冗余驱动一般有两种方式：(1)在原机构的基础上增加驱动关节[1]，但这种方式会增加机构的动质量，降低动力学性能；(2)增加若干条驱动支链[2]，但由于支链间存在协调关系，故增加了驱动控制的难度。

冗余驱动并联机器人的最基本问题是正运动学问题与奇异性问题。正运动学求解方法主要有数值法[3]和解析法[4]两种。数值法求解依赖初值的选取，初值偏差较大时将不能得出正确结果。解析法能够在不依赖初值的前提下得到机构的全部解，并且解析形式的位置正解是学者们最渴望得到的结果，对并联机构后续的实时控制、误差补偿和故障诊断等[5]工作具有重要意义。

奇异性是机构的固有性质。串联机构的奇异位形一般出现在工作空间的边界，而并联机构的奇异性更加复杂，且辨识难度更大。并联机构的奇异性包含奇异点和奇异区域，奇异点用奇异位形来描述，奇异区域用运动/力传递性能来描述。Gosselin和Angeles[6]基于闭环运动链中雅可比矩阵的性质，分析并联机构的奇异位形，并将其分为输入奇异、输出奇异和综合奇异3类。文献[7]采用雅可比矩阵条件数的倒数，即局部条件数指标(Local conditioning index, LCI)表征机构所处位形距离奇异位形的远近程度。LCI值越大，表明机器人的运动/力传递性能越好。局部条件数指标将机构的“奇异点”扩展至“奇异区域”，是采用数学工具解决机构学问题的成功范例。但是，兼具移动和转动自由度的机器人的雅可比矩阵中，各元素量纲不统一，这导致LCI无物理意义或者与机构的实际性能不相符。文献[8]系统性地分析了并联机构的运动/力传递特性，并定义了局部传递指标(Local transmission index, LTI)。LTI指标值一般应用于评价非冗余驱动并联机构的运动/力传递性能。对于冗余驱动并联机构，若将除了所分析的支链外，其余支链的驱动副均锁合，那么它的输出运动旋量为零。这导致文献[8]中“机器人的输出运动旋量之间线性无关”的定理失效。

冗余驱动有助于机器人越过奇异位形，其数学原理是通过增加雅可比矩阵的行数来弥补秩的缺失[9]。目前，关于冗余驱动并联机构的研究多侧重于机构设计[10]、运动学[11]、动力学[12]、工作空间[13]和尺度综合[14]等，而对于其能否提升机器人的运动/力传递性能的研究却鲜见。为此，本文设计了一种新型的三自由度冗余驱动4-转动副移动副转动副(Revolute-joint, prismatic-joint, revolute-joint, PRR)平面并联机器人。首先，建立并解析求解正运动学方程。然后，推导并解析求解杆长协调方程。接着，推导雅可比矩阵，并分析奇异位形、求解LCI。最后，对比分析了4-RPR机器人与4种非冗余驱动机器人的正解特性、奇异位形及运动/力传递性能。

1　正运动学模型

1.1　构型描述

新设计的4-RPR平面并联机器人如图1所示。静平台上3个铰链共线且等间距b布置，分别记作$\boldsymbol{A}_1$、$\boldsymbol{A}_2$、$\boldsymbol{A}_3$。动平台上两个铰链间距为a，分别记作$\boldsymbol{C}_1$、$\boldsymbol{C}_2$。动平台与静平台通过4条RPR支链进行连接，支链长度为l_i。其中，支链1与2共用动平台上的复合铰链$\boldsymbol{C}_1$，支链2与3共用静平台上的复合铰链$\boldsymbol{A}_2$，支链3与4共用动平台上的复合铰链$\boldsymbol{C}_2$。在$\boldsymbol{A}_1$点建立坐标系A_1'-xy，x轴平行于$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2$。$\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{C}_2$与$x$轴正向的夹角为$\gamma$，各支链与$x$轴正向的夹角为$\theta_i$($i$=1～4)。

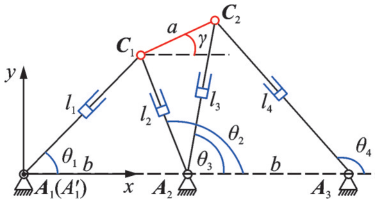


图1　4-RPR平面并联机器人的机构简图

Fig.1　Mechanism diagram of 4-RPR planar parallel robot

1.2　正运动学求解

4-RPR并联机器人的正运动学是指已知杆长l_i，求解机器人的位置和姿态，即$\boldsymbol{C}_1$、$\boldsymbol{C}_2$点的坐标：$[x_1, y_1]$、$[x_2, y_2]$。

由4条支链的长度约束方程可得

$$x_1^2 + y_1^2 = l_1^2 \tag{1}$$

$$(x_1 - b)^2 + y_1^2 = l_2^2 \tag{2}$$

$$(x_2 - b)^2 + y_2^2 = l_3^2 \tag{3}$$

$$(x_2 - 2b)^2 + y_2^2 = l_4^2 \tag{4}$$

联立式(1～4)可得

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b^2 + l_1^2 - l_2^2}{2b}, & y_1 = \pm\dfrac{\sqrt{M_1}}{2b} \\ x_2 = \dfrac{3b^2 + l_3^2 - l_4^2}{2b}, & y_2 = \pm\dfrac{\sqrt{M_2}}{2b} \end{cases} \tag{5}$$

式中：$M_1=-b^4+2b^2(l_1^2+l_2^2)-(l_1^2-l_2^2)^2$，$M_2=-b^4+2b^2(l_3^2+l_4^2)-(l_3^2-l_4^2)^2$。

结合动平台尺寸可得尺度约束方程

$$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=a^2 \tag{6}$$

结合式(5,6)，当 y_1 与 y_2 同号时，有

$$(x_1-x_2)^2+\left[\left(\sqrt{M_1}-\sqrt{M_2}\right)/2b\right]^2=a^2 \tag{7}$$

当 y_1 与 y_2 异号时，有

$$(x_1-x_2)^2+\left[\left(\sqrt{M_1}+\sqrt{M_2}\right)/2b\right]^2=a^2 \tag{8}$$

式(7)与式(8)同时成立的条件是

$$\left(\sqrt{M_1}-\sqrt{M_2}\right)^2-\left(\sqrt{M_1}+\sqrt{M_2}\right)^2=0 \tag{9}$$

根据平方差公式求解式(9)即可得到 $\sqrt{M_1M_2}=0$，即 y_1 与 y_2 至少有一个为 0。否则，y_1 与 y_2 不能同时存在同号和异号两种状态，应舍去式(5)中的两组解。据此，当 y_1 与 y_2 同号时，可得正运动学的两组解析解

$$\left\{\begin{aligned} x_1&=(b^2+l_1^2-l_2^2)/2b, & y_1&=\sqrt{M_1}/2b \\ x_2&=(3b^2+l_3^2-l_4^2)/2b, & y_2&=\sqrt{M_2}/2b \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} x_1&=(b^2+l_1^2-l_2^2)/2b, & y_1&=-\sqrt{M_1}/2b \\ x_2&=(3b^2+l_3^2-l_4^2)/2b, & y_2&=-\sqrt{M_2}/2b \end{aligned}\right. \tag{10a}$$

当 y_1 与 y_2 异号时，两组解析解为

$$\left\{\begin{aligned} x_1&=(b^2+l_1^2-l_2^2)/2b, & y_1&=\sqrt{M_1}/2b \\ x_2&=(3b^2+l_3^2-l_4^2)/2b, & y_2&=-\sqrt{M_2}/2b \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} x_1&=(b^2+l_1^2-l_2^2)/2b, & y_1&=-\sqrt{M_1}/2b \\ x_2&=(3b^2+l_3^2-l_4^2)/2b, & y_2&=\sqrt{M_2}/2b \end{aligned}\right. \tag{10b}$$

机器人的正解计算流程见图 2。根据式(10a)与式(10b)可得，机器人正运动学的两组解析解关于 $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_3$ 所在直线对称。两组解分别对应机器人的两个构型，如图 3 所示，点画线表示静平台，实线和虚线分别表示第 1 构型和第 2 构型。

1.3　数值算例

所有模型尺寸参数见表 1。

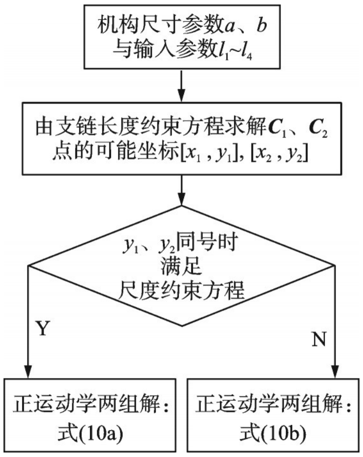
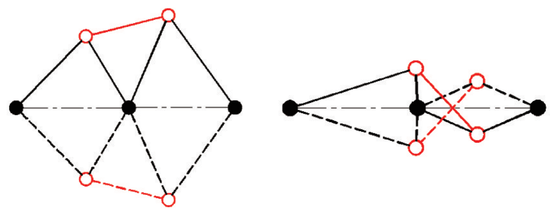


图 2　正解流程图

Fig.2　Process of forward kinematics solution



(a) y_1 and y_2 holding the same sign　　(b) y_1 and y_2 holding different signs

图 3　正解构型

Fig.3　Forward kinematics configurations

表 1　机器人的尺寸参数

Table 1　Size parameters of robot　　mm

动平台(a)	静平台($2b$)
50	200

任取 3 组输入参数进行计算，结果如表 2 所示。计算出的两组正解中，有一组解与模型的实际测量结果相同，另一组解与它关于 $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_3$ 所在直线对称。

2　协调方程

由式(6)可得，机器人的 4 条支链长度存在协调关系。因此，在已知任意 3 条支链长度的前提下，可求解出剩余一条支链的长度。

将 x_1、y_1、x_2、y_2 代入式(6)可得

表 2　正运动学方程的求解结果

Table 2　Results of the forward kinematic equations solution　　mm

组号	输入参数				求解结果			
	l_1	l_2	l_3	l_4	x_1	x_2	y_1	y_2
1	102.132 1	78.221 5	95.502 8	125.480 5	71.561 8	116.877 2	72.868 8	93.999 8
							−72.868 8	−93.999 8
2	94.055 7	75.881 5	51.964 0	101.066 7	65.444 3	112.428 9	67.556 7	50.455 7
							−67.556 7	−50.455 7
3	57.193 5	46.654 1	15.179 6	104.615 5	55.472 5	96.430 1	13.925 0	−14.753 8
							−13.925 0	14.753 8

$$b^2(2a^2-b^2+l_1^2-3l_2^2-3l_3^2+l_4^2)+l_1^2l_2^2-l_2^2l_3^2+ l_1^2l_4^2-l_2^2l_4^2\pm\sqrt{M_1M_2}=0 \tag{11}$$

将式(11)移项再平方,去根号后得到关于l_i的一元四次方程。若将l_1(取正数)视为未知量,将其余支链长度以及机器人的尺寸参数代入式(11)可得

$$l_1=\frac{a^2D_1+b^2D_2+l_3^2D_2-l_2^2l_4^2\pm\sqrt{-B_1M_2}}{2l_3^2} \tag{12}$$

同理可得

$$l_2=\frac{a^2E_1+b^2E_2+l_3^2E_3-l_4^2E_4\pm\sqrt{-(B_2+B_3)M_2}}{F_1} \tag{13}$$

$$l_3=\frac{a^2G_1+b^2G_2+l_2^2G_3-l_1^2E_4\pm\sqrt{-(B_2+B_3)M_1}}{F_2} \tag{14}$$

$$l_4=\frac{a^2H_1+b^2H_2+l_2^2H_3-l_1^2l_3^2\pm\sqrt{-B_1M_1}}{2l_3^2} \tag{15}$$

式中:$B_1=a^4+(l_2^2-l_3^2)^2-2a^2(l_2^2-l_3^2)$, $B_2=a^4-2a^2(2b^2+l_1^2+2l_3^2-l_4^2)$, $B_3=(-2b^2+l_1^2-2l_3^2+l_4^2)^2$, $D_1=b^2+l_3^2-l_4^2$, $D_2=l_2^2+3l_3^2$, $D_3=3l_2^2+l_3^2-l_4^2$, $E_1=l_3^2-l_4^2+3b^2$, $E_2=3l_4^2-4l_3^2+l_1^2-b^2$, $E_3=3l_4^2-l_3^2+3l_1^2$, $E_4=l_1^2+l_4^2$, $F_1=4b^2+4l_3^2-2l_4^2$, $F_2=4b^2+4l_2^2-2l_1^2$, $G_1=l_1^2-l_2^2-3b^2$, $G_2=3l_1^2-4l_2^2+l_4^2-b^2$, $G_3=3l_1^2-l_2^2+3l_4^2$, $H_1=b^2+l_2^2-l_1^2$, $H_2=l_3^2+3l_2^2$, $H_3=3l_3^2+l_2^2-l_1^2$。

由式(12～15)可知,机器人的每个杆长协调方程都有解析解,这为机器人的实时协调控制提供了理论条件。

同样,以l_1为未知量,将表2中的3组杆长代入式(12)中,计算结果如表3所示。相对误差主要由计算机的浮点数运算造成,这验证了协调方程的正确性。

表3 协调方程的求解结果

Table 3 Results of coordination equation solution mm

组别	l_2	l_3	l_4	l_1(测量)	l_1(计算)
1	78.221 5	95.502 8	125.480 5	102.132 1	102.132 0
2	75.881 5	51.964 0	101.066 7	94.055 7	94.057 8
3	46.654 1	15.179 6	104.615 5	57.193 5	57.193 7

3 奇异性能

3.1 雅可比矩阵的推导

根据几何条件推导闭环矢量关系

$$L_{A_1A_i}+L_{A_iC_i}+L_{C_iC_1}+L_{C_1A_1}=0 \tag{16}$$

将式(16)向x、y轴投影可得

$$\begin{cases}x_{A_1A_i}+x_{A_iC_i}+x_{C_iC_1}+x_{C_1A_1}=0\\ y_{A_1A_i}+y_{A_iC_i}+y_{C_iC_1}+y_{C_1A_1}=0\end{cases} \tag{17}$$

式中:$L_{A_1A_i}=\begin{bmatrix}0 & b & 2b\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$, $L_{C_iC_1}=\begin{bmatrix}0 & -a\cos\gamma\\0 & -a\sin\gamma\end{bmatrix}$, $L_{C_1A_1}=\begin{bmatrix}-x_1\\-y_1\end{bmatrix}$, $x_{A_iC_i}=l_i\cos\theta_i$, $y_{A_iC_i}=l_i\sin\theta_i$。

将式(17)中两式移项后平方相加可得

$$\begin{cases}x_1^2+y_1^2=l_1^2\\(x_1-b)^2+y_1^2=l_2^2\\(x_1+a\cos\gamma-b)^2+(y_1+a\sin\gamma)^2=l_3^2\\(x_1+a\cos\gamma-2b)^2+(y_1+a\sin\gamma)^2=l_4^2\end{cases} \tag{18}$$

将式(18)中各式对时间求导可得机器人的输入、输出雅可比矩阵

$$J_l=\begin{bmatrix}l_1 & 0 & 0 & 0\\0 & l_2 & 0 & 0\\0 & 0 & l_3 & 0\\0 & 0 & 0 & l_4\end{bmatrix} \tag{19}$$

$$J_x=\begin{bmatrix}x_1 & y_1 & 0\\x_1-b & y_1 & 0\\R_1 & S_1 & T_1\\R_2 & S_1 & T_2\end{bmatrix} \tag{20}$$

式中:$R_1=x_1+a\cos\gamma-b$, $R_2=x_1+a\cos\gamma-2b$, $S_1=y_1+a\sin\gamma$, $T_1=ab\sin\gamma+ay_1\cos\gamma+ax_1\sin\gamma$, $T_2=2ab\sin\gamma+ay_1\cos\gamma+ax_1\sin\gamma$。

3.2 奇异位形分析

实际情况下,支链长度不为0,故由式(19)可知,4-RPR并联机器人无第1类奇异。

冗余驱动机器人的输出雅可比矩阵不为方阵,因此,求解$J_x^{\mathrm{T}}J_x$的行列式

$$\mathrm{Det}(J_x^{\mathrm{T}}J_x)=F(x_1,y_1,\ \sin\gamma,\ \cos\gamma) \tag{21}$$

式中F为关于x_1、y_1、$\sin\gamma$、$\cos\gamma$的函数。

令$\tan(\gamma/2)=t$,则$\sin\gamma=2t/(1+t^2)$、$\cos\gamma=(1-t^2)/(1+t^2)$。将其代入式(21)可得

$$\mathrm{Det}(J_x^{\mathrm{T}}J_x)=\frac{L^2y_1^2N_1+2a^2t^2N_2+2LatyN_2}{L^4/4} \tag{22}$$

式中:$L=1+t^2$, $N_1=(2tx_1-y_1+t^2y_1-2bt)^2+2b^2t^2$, $N_2=(2tx_1-y_1+t^2y_1-bt)^2+b^2t^2$。

将at与Ly_1视为整体,化简式(22),得

$$\mathrm{Det}(J_x^{\mathrm{T}}J_x)=\frac{2N_2P^2+L^2y_1^2(2N_1-N_2)/2}{L^4/4} \tag{23}$$

式中$P=(at+Ly_1/2)^2$。

继续化简$2N_1-N_2$可得

$$2N_1-N_2=(Q-3bt)^2+b^2t^2 \tag{24}$$

式中$Q=2tx_1-y_1+t^2y_1$。

综合分析式(22～24)可知,$J_x^{\mathrm{T}}J_x$的行列式始终

大于等于0。当且仅当式(22)中各项均为0时,行列式才为0。此时,机器人输出参数满足:$y_1=0$且$\gamma=0°$或180°。将其代入$\boldsymbol{J}_x$,得

$$\boldsymbol{J}_x=\begin{bmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ x_1-b & 0 & 0 \\ x_1 \pm a-b & 0 & 0 \\ x_1 \pm a-2b & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{25}$$

此时,机器人位于第2类奇异位形,如图4所示(动平台位于静平台所在直线上)。

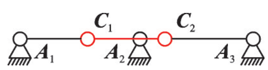


图4　4-RPR机器人的奇异位形

Fig.4　Singular configuration of 4-RPR robot

3.3　局部条件数指标求解

引入广义逆,求解机器人的雅可比矩阵

$$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{J}_x^{+}\boldsymbol{J}_l=(\boldsymbol{J}_x^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}_x)^{-1}\boldsymbol{J}_x^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}_l \tag{26}$$

式中$\boldsymbol{J}_x^{+}$为$\boldsymbol{J}_x$的最小二乘广义逆矩阵。

由于图1所示机器人能够同时输出2个移动和1个转动自由度,$\boldsymbol{J}$中各元素的量纲不统一。为此,对$\boldsymbol{J}$进行分块处理

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{w} \end{bmatrix}=\boldsymbol{J}\,\dot{\boldsymbol{l}}_i=\begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_1 \\ \boldsymbol{J}_2 \end{bmatrix}\dot{\boldsymbol{l}}_i \tag{27}$$

式中:$\boldsymbol{v}$和$\boldsymbol{w}$分别为动平台的线速度和角速度,量纲分别为mm/s和rad/s;$\dot{\boldsymbol{l}}_i$为输入速度,量纲为mm/s;$\boldsymbol{J}_1$为$\boldsymbol{J}$的第1、2行,元素无量纲,$\boldsymbol{J}_2$为$\boldsymbol{J}$的第3行,元素量纲为1/mm,它们内部元素的量纲均是统一的[15]。这样,就可以求解局部条件数指标为

$$\mathrm{LCI}=\min\left(1/\mathrm{cond}(\boldsymbol{J}_1),\ 1/\mathrm{cond}(\boldsymbol{J}_2)\right) \tag{28}$$

4　性能对比

从4-RPR并联机器人结构中分离出4种3-RPR非冗余构型。其中,静平台、动平台和支链1～3组成“非冗余构型Ⅰ”(图5)。

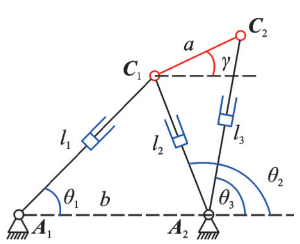


图5　非冗余构型Ⅰ

Fig.5　Non-redundant configuration Ⅰ

同理可得非冗余构型Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ,如图6～8所示。

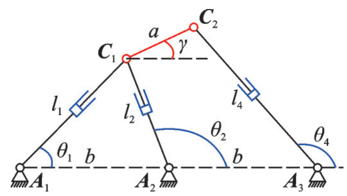


图6　非冗余构型Ⅱ

Fig.6　Non-redundant configuration Ⅱ

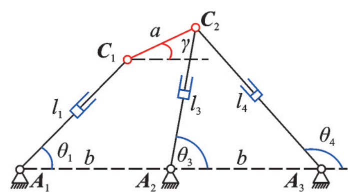


图7　非冗余构型Ⅲ

Fig.7　Non-redundant configuration Ⅲ

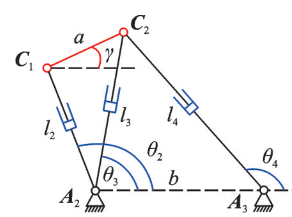


图8　非冗余构型Ⅳ

Fig.8　Non-redundant configuration Ⅳ

4.1　正解特性对比

正运动学解的个数与机构的奇异位形关系紧密,当正运动学出现重根时,机构发生奇异。以非冗余构型Ⅰ为例,建立正运动学模型。首先,由式(1,2),求解C_1的坐标(x_1,y_1),结果与式(5)一致。

然后,推导C_2点坐标

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1+a\cos\gamma \\ y_1+a\sin\gamma \end{bmatrix} \tag{29}$$

接着,根据A_2C_2的长度约束方程,即式(3),结合正切半角公式并令$\tan(\gamma/2)=t$,构造关于t的一元二次方程

$$H=h_1t^2+h_2t+h_3 \tag{30}$$

式中:$h_1=a^2+b^2+l_1^2-l_3^2-2(a+b)x_1+2ab$,$h_2=4ay_1$,　$h_3=a^2+b^2+l_1^2-l_3^2+2(a-b)x_1-2ab$。

最后,求解该方程即可得到动平台姿态角的2个解。由于C_1点坐标也有2个解,所以,在一般情况下,非冗余构型Ⅰ的正运动学有4组解析解。

其余非冗余构型的求解思路基本一致,且均有4组解析式正解。将表1中的第2组杆长代入非冗余构型,求解结果如表4所示。

进一步地,分析机器人正运动学出现重根的条件。对于4-RPR并联机器人,结合式(10a,10b),

表 4 非冗余构型正运动学的求解结果

Table 4 Results of forward kinematics solution of non-redundant configurations

构型组别	非冗余构型 Ⅰ			非冗余构型 Ⅱ		
	x_1/mm	y_1/mm	γ/rad	x_1/mm	y_1/mm	γ/rad
1	65.444 2	67.556 7	−1.846 9	65.444 2	67.556 7	−0.581 5
2	65.444 2	67.556 7	−0.349 1	65.444 2	67.556 7	−0.349 1
3	65.444 2	−67.556 7	0.349 1	65.444 2	−67.556 7	0.349 1
4	65.444 2	−67.556 7	1.846 9	65.444 2	−67.556 7	0.581 5
构型组别	非冗余构型 Ⅲ			非冗余构型 Ⅳ		
	x_2/mm	y_2/mm	γ/rad	x_2/mm	y_2/mm	γ/rad
1	112.428 8	50.455 6	−0.349 1	112.428 8	50.455 6	−0.349 1
2	112.428 8	50.455 6	1.192 7	112.428 8	50.455 6	3.007 6
3	112.428 8	−50.455 6	−1.192 7	112.428 8	−50.455 6	−3.007 6
4	112.428 8	−50.455 6	0.349 1	112.428 8	−50.455 6	0.349 1

仅当y_1、y_2均为0时，其正运动学仅有1解。对于非冗余构型，以非冗余构型Ⅰ为例，出现重根的情况有：(1)y_1为0，C_1点坐标仅有1解；(2)式(30)的判别式$h_2^2-4h_1h_3$为0，方程出现重根，姿态角γ仅有1解。上述两种条件满足其一，非冗余构型的正解个数减为2，均满足则减为1。

综上，相较于非冗余构型，4-RPR并联机器人的正解个数减少了一半。因此，在实际工作时，它的正解更容易选取，这便于轨迹规划。更重要的是，正解个数越少，意味着出现重根的情况就越少，则机器人的奇异位形更少[16]。值得一提的是，冗余构型和非冗余构型正运动学的重根条件存在包含关系，这表明它们的奇异位形也存在包含关系。

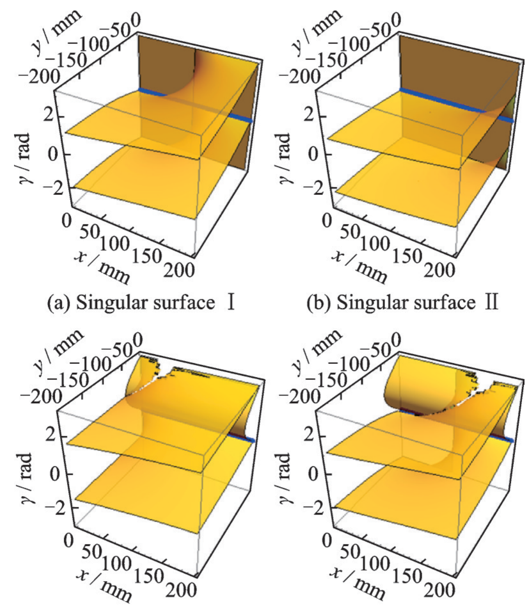
4.2 奇异性能对比

4.2.1 奇异位形对比

由3.2节的结论可知，4-RPR并联机器人的奇异点一定分布在A_1A_3所在直线上。接下来，绘制4种非冗余构型的奇异曲面。

以非冗余构型Ⅰ为例，输入雅可比矩阵$J_{1l}=\mathrm{diag}(l_1,l_2,l_3)$，显然没有第1类奇异。选取式(20)的1、2、3行组成输出雅可比矩阵J_{1x}。令$\mathrm{Det}(J_{1x})=0$即可得到输出奇异曲面(见图9(a))。同理可得其他非冗余构型的奇异曲面，如图9(b~d)所示。图9中，x、y表示C_1点坐标，γ表示姿态角；黄色半透明曲面表示非冗余构型的奇异曲面，蓝色直线表示4-RPR构型的奇异轨迹。

观察图9可得，非冗余构型的奇异曲面形状复杂，并且均将冗余构型的奇异轨迹包含在内。这表明：4-RPR并联机器人避开了非冗余构型的绝大部分奇异位形，且没有引入新的奇异位形。这验证了4.1节中正运动学个数与奇异位形之间的内在规律。



(a) Singular surface Ⅰ (b) Singular surface Ⅱ (c) Singular surface Ⅲ (d) Singular surface Ⅳ

图9 非冗余构型的奇异曲面

Fig.9 Singular surfaces of non-redundant configurations

4.2.2 局部条件数指标对比

非冗余构型的LCI求解思路同文献[7]。依据文献[8]将LCI值大于等于0.7的位姿集合定义为“优质工作空间”。

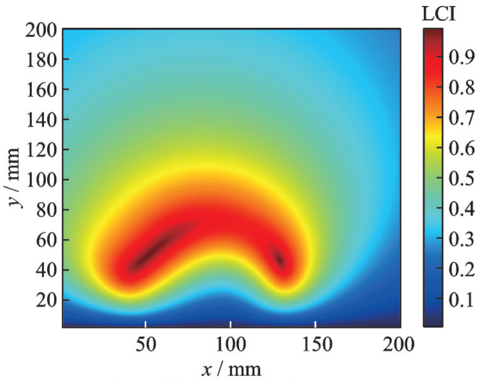
不失一般性地，设支链长度范围为[0,285]mm，根据文献[17]的方法，容易计算出机器人的最大工作空间。结合机构的尺寸和对称性，选取$x\in[0,200]$mm、$y\in[0,200]$mm的工作空间进行研究。其中，x、y表示C_1点坐标。

当$\gamma=0°$时，计算4-RPR并联机器人和非冗余构型的LCI值并绘制图谱(见图10)。将图谱中优质工作空间的面积与总面积的比值定义为“优质工作空间占比”。将冗余构型与各非冗余构型的优质工作空间占比的差值最小值定义为“性能提升值”。

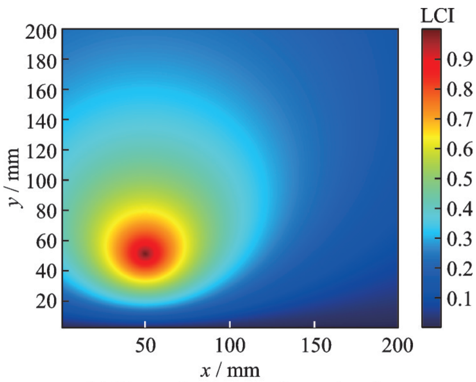
除$\gamma=0°$外，随机选取动平台的另外3组姿态

角,计算各构型优质工作空间占比和性能提升值,如表5所示。

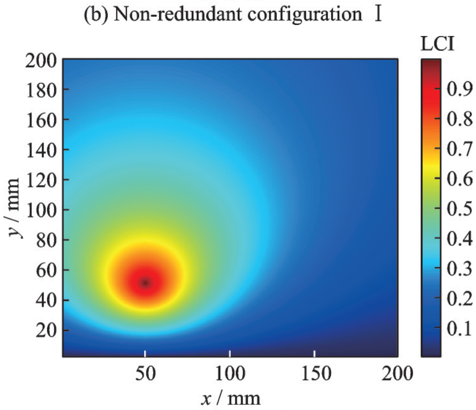
观察图10可知,相较于非冗余构型,冗余构型的优质工作空间的面积更大。同时,在x轴附近区域,冗余构型的LCI值接近于0,这表明机器人所处位形接近奇异位形,验证了3.2节的奇异位形分析结果。



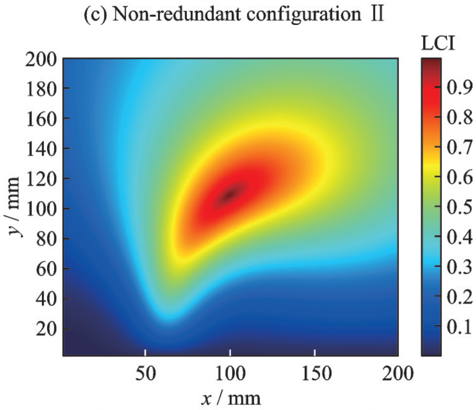
(a) 4-RPR planar parallel robot



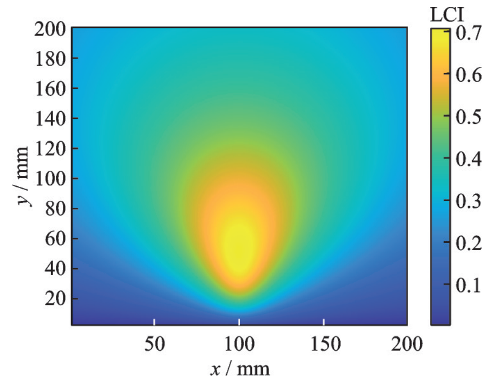
(b) Non-redundant configuration Ⅰ



(c) Non-redundant configuration Ⅱ



(d) Non-redundant configuration Ⅲ



(e) Non-redundant configuration Ⅳ

图10　$\gamma=0°$时各构型的LCI值图谱

Fig.10　Spectra of LCI values for each configuration at $\gamma=0°$

表5　各构型优质工作空间占比及性能提升值

Table 5　Proportion of high-quality workspace and performance improvement values of each configuration

γ/(°)	优质工作空间占比					性能提升值/%
	4-RPR构型/%	非冗余构型Ⅰ/%	非冗余构型Ⅱ/%	非冗余构型Ⅲ/%	非冗余构型Ⅳ/%	
0	13.95	2.61	2.61	7.54	0.20	6.41
37	3.76	2.61	2.61	1.28	0	1.15
78	4.58	2.60	2.61	0.32	0.40	1.97
134	20.55	2.60	2.61	3.88	2.80	16.67

观察表5可知,在$\gamma=0°$、37°、78°、134°时,对比于各非冗余构型,冗余构型的优质工作空间占比均更大,性能提升值分别为6.41%、1.15%、1.97%、16.67%。

综上,4-RPR并联机器人的运动/力传递性能更优,能更好地适应高载荷、高灵活度的工况。

5　结　　论

以4-RPR冗余驱动平面并联机器人为研究对象,通过分析运动学和奇异性能,得到如下结论:

(1)一般情况下具有2组解析正解,相较于非冗余构型减少了一半,这有助于轨迹规划。而且,杆长协调方程也有解析解,这有利于机器人的实时精准控制。

(2)机器人的奇异位形全部位于A_1A_3所在直线上,这说明它避开了非冗余构型的绝大部分奇异位形,且没有引入新的奇异。

(3)在$x\in[0,200]$mm,$y\in[0,200]$mm,$\gamma=0°$、37°、78°、134°的工作空间内,机器人的优质工作空间占比相较于非冗余构型分别提升了6.41%、1.15%、1.97%、16.67%。这说明它具有更好的运动/力传递性能。

值得一提的是,本文的研究方法也适用于其他平

面冗余并联机器人。另外,本文以0.7作为奇异阈值,但研究发现,不同拓扑构型的奇异阈值是不同的。接下来笔者将继续探究拓扑构型与奇异阈值的关系。

参考文献:

[1] 王向阳,郭盛,曲海波,等.并联机构驱动力优化配置方法及应用研究[J].机械工程学报,2019,55(1):32-41.
WANG Xiangyang, GUO Sheng, QU Haibo, et al. Optimal allocation method of parallel mechanism and its application[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2019,55(1):32-41.

[2] 张丹,齐炜胤,邵华.4RRR冗余并联机械手的动力学分析与优化[J].机械设计与研究,2024,50(5):189-192.
ZHANG Dan, QI Weiyin, SHAO Hua. Dynamic analysis and optimization of a 4RRR redundant parallel manipulator[J]. Machine Design & Research, 2024, 50(5):189-192.

[3] MERLET J P. Solving the forward kinematics of a Gough-type parallel manipulator with interval analysis[J]. The International Journal of Robotics Research, 2004,23(3):221-235.

[4] 黄凯伟,沈惠平,李菊,等.一种具有部分运动解耦和符号式位置正解的空间2T1R并联机构拓扑设计和动力学建模[J].中国机械工程,2022,33(2):160-169.
HUANG Kaiwei, SHEN Huiping, LI Ju, et al. Topological design and dynamics modeling of a spatial 2T1R parallel mechanism with partially motion decoupling and symbolic forward kinematics[J]. China Mechanism Engineering, 2022,33(2):160-169.

[5] 黄宁宁,尤晶晶,王澍声,等.可重构3-RPR并联机器人的"点对点"路径规划[J].南京航空航天大学学报,2024,56(3):415-423.
HUANG Ningning, YOU Jingjing, WANG Shusheng, et al. "Point-to-point" path planning for reconfigurable 3-RRR parallel robots[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2024,56(3):415-423.

[6] GOSSELIN C, ANGELES J. Singularity analysis of closed-loop kinematic chains[J]. IEEE Transactions on Robotics and Automation, 1990,6(3):281-290.

[7] MERLET J P. Jacobian, manipulability, condition number, and accuracy of parallel robots[J]. Journal of Mechanical Design, 2006,128(1):199-206.

[8] WU Chao, LIU Xinjun, WANG Liping, et al. Optimal design of spherical 5R parallel manipulators considering the motion/force transmissibility[J]. Journal of Mechanical Design, 2010,132(3):031002.

[9] 张彦斐,宫金良,高峰.冗余驱动消除并联机构位形奇异原理[J].中国机械工程,2006,17(5):445-448.
ZHANG Yanfei, GONG Jinliang, GAO Feng. Theory of singularity elimination by redundant actuation for parallel mechanism[J]. China Mechanical Engineering, 2006,17(5):445-448.

[10] ANASTASIA M, ANTHONY T, EMMANOUIL T, et al. Design and implementation of a binary redundant manipulator with cascaded modules[J]. Journal of Mechanisms and Robotics, 2015,8(1):011002.

[11] LIU Zhaoyang, TAO Rui, FAN Junfeng, et al. Kinematics, dynamics, and load distribution analysis of a 4-PPPS redundantly actuated parallel manipulator[J]. Mechanism and Machine Theory, 2022,167:104494.

[12] TANG Tengfei, FANG Hanliang, YANG Fufu, et al. Adaptive kriging elastodynamic modeling and analysis for a redundantly actuated parallel manipulator[J]. Applied Mathematical Modeling, 2025,142:115961.

[13] ZHANG Jing, WANG Dongbao, SONG Ziming, et al. Workplace analysis and size optimization of planar 3-DOF redundantly actuated parallel mechanism[J]. Journal of Mechanical Science and Technology, 2024, 38(2):957-967.

[14] 刘晓飞,万波,陈冉,等.对称超冗余驱动6RPS并联机构运动性能分析与优化[J].机械工程学报,2024,60(1):235-247.
LIU Xiaofei, WAN Bo, CHEN Ran, et al. Kinematics performance analysis and optimization of symmetrical super-redundant parallel manipulators 6RPS[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2024,60(1):235-247.

[15] YOU Jingjing, XI Fengfeng, SHEN Huiping, et al. A novel stewart-type parallel mechanism with topological reconfiguration: Design, kinematics and stiffness evaluation[J]. Mechanism and Machine Theory, 2021,162:104329.

[16] 闻王虎,尤晶晶,叶鹏达,等.零耦合度Stewart型并联机器人的位置正解个数[J].南京航空航天大学学报,2024,56(5):960-967.
WEN Wanghu, YOU Jingjing, YE Pengda, et al. The number of forward position solutions for zero coupling Stewart-type parallel robot[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2024, 56(5):960-967.

[17] 徐帅,尤晶晶,叶鹏达,等.一种可重构3-RRR平面并联机构及其工作空间分析[J].南京航空航天大学学报,2022,54(3):466-472.
XU Shuai, YOU Jingjing, YE Pengda, et al. A reconfiguration 3-RRR planar parallel mechanism and its workspace analysis[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2022,54(3):466-472.

(编辑:陈珺)