

DOI:10.16356/j.1005-2615.2025.03.006

一种无伴随运动的并联机构运动学分析

叶凡¹, 王凯¹, 吕贤海¹, 曹毅^{1,2}

(1. 江南大学机械工程学院, 无锡 214000; 2. 江苏省食品先进制造装备技术重点实验室, 无锡 214000)

摘要: 针对一种无伴随运动的移动副转动副万向副-2 移动副转动副万向副圆弧副 (Prismatic-joint revolute-joint universal-joint-2 prismatic-joint revolute-joint universal-joint pc-joint, PRU-2PRUPc) 并联机构, 进行了运动学分析。首先基于螺旋理论对所设计的 PRU-2PRUPc 并联机构进行自由度与伴随运动的分析。接着, 推导了该机构的运动学反解解析解, 基于粒子群算法得到机构在不同位姿下的运动学正解数值解, 验证了反解的正确性, 并通过 Adams 软件进行运动学仿真验证。然后基于螺旋理论, 对机构的奇异性进行了分析, 得到机构的输入端与输出端的奇异位型。最后基于运动/力传递指标对机构进行了分析, 绘制了并联机构的性能图谱, 为后续的优化与应用奠定了理论基础。

关键词: 并联机构; 螺旋理论; 奇异位型; 传递指标; 伴随运动

中图分类号: TH112 **文献标志码:** A **文章编号:** 1005-2615(2025)03-0451-08

Kinematic Analysis of Parallel Mechanism Without Parasitic Motion

YE Fan¹, WANG Kai¹, LYU Xianhai¹, CAO Yi^{1,2}

(1. School of Mechanical Engineering, Jiangnan University, Wuxi 214000, China; 2. Jiangsu Key Laboratory of Advanced Food Manufacturing Equipment and Technology, Wuxi 214000, China)

Abstract: For a type of prismatic-joint revolute-joint universal-joint-2 prismatic-joint revolute-joint universal-joint pc-joint (PRU-2PRUPc) parallel mechanism without parasitic motion, the kinematics analysis is performed. Firstly, the analysis of degrees and parasitic motion of PRU-2PRUPc parallel mechanism are carried out based on screw theory. Secondly, the analytical solution of the motion kinematics is deduced, and the positive solutions are obtained using particle swarm optimization algorithm, verifying the correctness of the inverse solution, and using Adams for kinematics simulation verification. Thirdly, the singularity analysis of the mechanism is performed based on screw theory, and the singularity of the input and output are obtained. Finally, the analysis of the mechanism is performed based on motion/force transmission indices, and the performance of the parallel mechanism are plotted, laying a theoretical foundation for subsequent optimization and application.

Key words: parallel mechanism; screw theory; singularity; transmission indices; parasitic motion

两转一移并联机构是少自由度并联机构中的重要组成部分, 在工业界一直备受关注^[1-2]。相对于串联机构, 并联机构虽具有更小的工作空间且增加了机构的耦合度^[3], 但提升了机构整体的承载能

力与刚度^[4]、降低了运动过程中的误差累积, 具有更高的精度^[5]。因此, 在制造业、医疗和航空航天等领域中有广泛应用, 如康复机构^[6]、手术机器人^[7]和混联加工机床^[8]等。

基金项目: 国家自然科学基金(52175234); 高等学校学科创新引智计划(B18027)。

收稿日期: 2025-02-27; **修订日期:** 2025-04-24

通信作者: 曹毅, 男, 教授, E-mail: caoyi@jiangnan.edu.cn。

引用格式: 叶凡, 王凯, 吕贤海, 等. 一种无伴随运动的并联机构运动学分析[J]. 南京航空航天大学学报(自然科学版), 2025, 57(3): 451-458. YE Fan, WANG Kai, LYU Xianhai, et al. Kinematic analysis of parallel mechanism without parasitic motion[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics (Natural Science Edition), 2025, 57(3): 451-458.

两转一移并联机构除了机构本身所具备的自由度,在动平台连续转动时,往往会出现被约束方向上的微小移动,该运动被 Carretero 称为伴随运动^[9]。当机构连续转动时,动平台产生额外的移动自由度,很大程度上降低了机构的运动精度,极大地影响了两转一移并联机构在实际场景下的应用^[10]。

目前针对伴随运动的解决方法有两类,一类是对机构进行参数优化并基于控制在一定程度上抵消伴随运动的影响,如 Carretero 等^[11]基于机构的结构参数设计,将 3-移动副转动副球副(3-prismatic-joint revolute-joint spherical joint, 3-PRS)机构的伴随运动控制在极小的范围内。这类方法虽然巧妙地降低了伴随运动的运动范围,但仍然无法从本质上消除伴随运动。另一类是机构结构设计时从本质上剔除伴随运动的产生,如陈子明等^[12]提出一种新型 3-万向副移动副万向副(3-universal-joint prismatic-joint universal-joint, 3-UPU)并联机构,该机构不同分支的约束力始终位于运动平面上,因此机构在运动过程中无期望之外的运动自由度产生,将其应用于康复机构^[13]。Li 等^[14]对机构分支的几何分布进行限制,将分支末端的运动副设置在一条直线上,虽然在一定程度上降低了机构刚度^[15],但也规避了伴随运动的产生。陈森等^[16]基于螺旋理论提出一类新型两转一移无伴随运动的并联机构,如 2-转动副移动副万向副-转动副移动副球副-万向副移动副球副(2-revolute-joint prismatic-joint universal-joint-revolute-joint prismatic-joint spherical-joint-universal-joint prismatic-joint-revolute-joint, 2RPU-RPS-UPS)并联机构。Ju 等^[17]基于虚拟链法^[15]设计了一类万向副移动副(Universal-joint prismatic-joint, UP)型并联机构,其中 2-万向副移动副转动副-圆弧副万向副移动副转动副(2-universal-joint prismatic-joint revolute-joint-Pc-joint universal-joint prismatic-joint, revolute-joint, 2UPR-PcUPR)并联机构动平台具备良好的连续转动能力。然而基于无伴随运动的两转一移并联机构的研究更多停留在机构设计层面,对其运动性能的分析仍存在许多不足之处。

针对伴随运动对机构的影响,设计了一种无伴随运动的 PRU-2PRUPc 并联机构,从本质上规避了伴随运动的产生,且避免了末端运动副轴线位于同一直线导致机构刚度下降的不良影响。首先基于螺旋理论进行自由度与伴随运动的分析,验证了机构结构设计的正确性。接着推导了该机构的运动学反解解析解,基于粒子群算法(Particle swarm optimization, PSO)得到机构在不同位姿下的运动学正解数值解,验证了反解的正确性,根据点云法绘制了机构的工作空间,并基于 Adams 软件,验证

了驱动副位移的理论计算曲线与仿真验证曲线的一致性。然后根据螺旋的性质进行机构奇异分析,得到机构的输入端与输出端的奇异位型。最后基于运动/力传递指标对机构进行了传递性能分析,绘制了不同位姿下并联机构的性能图谱,并得到机构传递性能较为优异的位姿,为后续机构的优化与应用奠定了理论基础。

1 PRU-2PRUPc 并联机构分析

1.1 自由度计算

PRU-2PRUPc 并联机构如图 1 所示,动平台通过 3 条分支与基座相连接。分支 1 为 PRUPc,其中 M_1 为移动副中心, N_1 为万向副中心,圆弧副 P_c 固结于动平台上,分支 2 与分支 1 关于 YOZ 面对称。分支 3 为 PRU,其中 M_3 为移动副中心, N_3 为万向副中心。

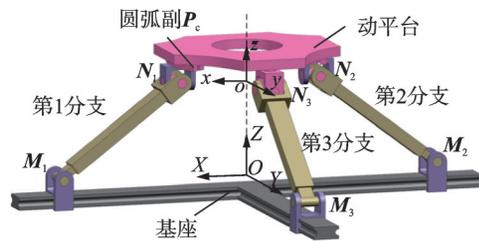


图 1 PRU-2PRUPc 并联机构

Fig.1 PRU-2PRUPc parallel mechanism

设 M_1 的坐标为 $(X_{M_1}, 0, 0)$, N_1 的坐标为 $(X_{N_1}, 0, Z_{N_1})$, M_3 的坐标为 $(0, Y_{M_3}, 0)$, N_3 的坐标为 $(0, Y_{N_3}, Z_{N_3})$ 。且分支 2 与分支 1 对称, M_2 的坐标为 $(-X_{M_1}, 0, 0)$, N_2 的坐标为 $(-X_{N_1}, 0, Z_{N_1})$ 。设圆弧副 P_c 的转动中心坐标为 $(0, 0, Z_{P_c})$, 定坐标系固结于基座, 为 $O-XYZ$ 。则分支 1 的运动螺旋为

$$\begin{cases} \mathcal{S}_{11} = [0 \ 0 \ 0; 1 \ 0 \ 0] \\ \mathcal{S}_{12} = [0 \ 1 \ 0; 0 \ 0 \ X_{M_1}] \\ \mathcal{S}_{13} = [0 \ 1 \ 0; -Z_{N_1} \ 0 \ X_{N_1}] \\ \mathcal{S}_{14} = [1 \ 0 \ 0; 0 \ Z_{N_1} \ 0] \\ \mathcal{S}_{15} = [0 \ 0 \ 1; Z_{P_c} \ 0 \ 0] \end{cases} \quad (1)$$

对式(1)求反螺旋得

$$\mathcal{S}_{11}^* = [0 \ 1 \ 0; -Z_{N_1} \ 0 \ 0] \quad (2)$$

式(2)表示分支 1 在定坐标系中的约束螺旋, 为一约束力矢, 其方向平行于 Y 轴, 作用点为 $(0, 0, Z_{N_1})$ 。同理分支 3 的运动螺旋为

$$\begin{cases} \mathcal{S}_{31} = [0 \ 0 \ 0; 0 \ 1 \ 0] \\ \mathcal{S}_{32} = [1 \ 0 \ 0; 0 \ 0 \ -X_{M_1}] \\ \mathcal{S}_{33} = [1 \ 0 \ 0; 0 \ Z_{N_1} \ -Y_{N_3}] \\ \mathcal{S}_{34} = [0 \ 1 \ 0; -Z_{N_1} \ 0 \ 0] \end{cases} \quad (3)$$

对式(3)求反螺旋得

$$\begin{cases} \mathcal{S}_{31}^r = [0 \ 0 \ 0; 0 \ 0 \ 1] \\ \mathcal{S}_{32}^r = [1 \ 0 \ 0; 0 \ Z_{N_1} \ 0] \end{cases} \quad (4)$$

式(4)表示分支3在定坐标系中的约束螺旋, \mathcal{S}_{31}^r 为一约束力偶,方向平行于Z轴, \mathcal{S}_{32}^r 为一约束力矢,方向平行于X轴,作用点为(0,0, Z_{N_1})。对式(2)与式(4)的两组约束螺旋系求反螺旋,得到机构整体的运动螺旋系

$$\begin{cases} \mathcal{S}_1 = [0 \ 0 \ 0; 0 \ 0 \ 1] \\ \mathcal{S}_2 = [1 \ 0 \ 0; 0 \ Z_{N_1} \ 0] \\ \mathcal{S}_3 = [0 \ 1 \ 0; -Z_{N_1} \ 0 \ 0] \end{cases} \quad (5)$$

式中: \mathcal{S}_1 表示沿Z轴的转动自由度, \mathcal{S}_2 与 \mathcal{S}_3 分别表示过点(0,0, Z_1)沿X轴与Y轴的转动自由度。故该机构具有两转动一移动自由度。

1.2 伴随运动特性分析

伴随运动是少自由度并联机构常见的运动特性,主要表现为机构动平台绕不同转轴发生连续转动后产生期望之外的运动。

动坐标系固结于动平台,为 $o-xyz$,设动平台首先绕 x 轴进行转动,转动角度为 α_1 ,此时分支1与分支2保持锁定,设图2中 M_3 的坐标为(0, T_{M_3} , 0), N_3 的坐标为(0, T_{N_3} , T^*), T^* 为点 N_3 的 z 轴坐标值。

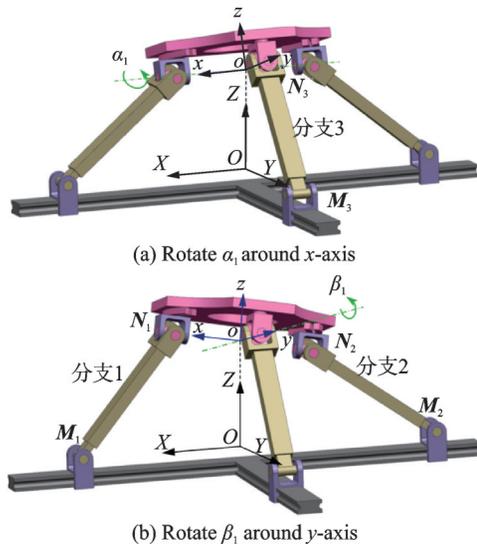


图2 机构连续转动示意图

Fig.2 Schematic diagrams of continuous rotation of mechanism

此时得到分支3的运动螺旋

$$\begin{cases} \mathcal{S}_{I_{31}} = [0 \ 0 \ 0; 0 \ 1 \ 0] \\ \mathcal{S}_{I_{32}} = [1 \ 0 \ 0; 0 \ 0 \ -X_{M_3}] \\ \mathcal{S}_{I_{33}} = [1 \ 0 \ 0; 0 \ T^* \ -T_{N_3}] \\ \mathcal{S}_{I_{34}} = [0 \ \cos\alpha \ \sin\alpha; T_{N_3}\sin\alpha_1 - T_{N_3}\cos\alpha_1 \ 0 \ 0] \end{cases} \quad (6)$$

对式(6)求反螺旋得

$$\begin{cases} \mathcal{S}_{I_{31}}^r = [0 \ 0 \ 0; 0 \ -\sin\alpha_1 \ \cos\alpha_1] \\ \mathcal{S}_{I_{32}}^r = [1 \ 0 \ 0; 0 \ T^* \ -T_{N_3}] \end{cases} \quad (7)$$

然后锁定分支3移动副,驱动分支1与分支2移动副,使机构动平台绕y轴进行转动。设转动角度为 β_1 ,设此时 M_1 的坐标为(T_{M_1} , 0, 0), N_1 的坐标为(T_{N_1} , 0, T^*), T^* 为点 N_1 的 z 轴坐标值,则分支1的运动螺旋为

$$\begin{cases} \mathcal{S}_{I_{11}} = [0 \ 0 \ 0; 1 \ 0 \ 0] \\ \mathcal{S}_{I_{12}} = [0 \ 1 \ 0; 0 \ 0 \ T_{M_1}] \\ \mathcal{S}_{I_{13}} = [0 \ 1 \ 0; -T^* \ 0 \ T_{N_1}] \\ \mathcal{S}_{I_{14}} = [\cos\beta_1 \ 0 \ \sin\beta_1; 0 \ Z_3\cos\beta_1 - X_3\sin\beta_1 \ 0] \\ \mathcal{S}_{I_{15}} = [-\sin\beta_1 \ 0 \ \cos\beta_1; 0 \ -Z_P\sin\beta_1 \ 0] \end{cases} \quad (8)$$

对式(8)求反螺旋得

$$\mathcal{S}_{I_1}^r = [0 \ 1 \ 0; -Z_P \ 0 \ 0] \quad (9)$$

对式(7)与式(9)组成的约束螺旋系求反螺旋,得到连续转动后动平台的运动螺旋

$$\begin{cases} \mathcal{S}_{I_1} = [0 \ 0 \ 0; 0 \ 0 \ 1] \\ \mathcal{S}_{I_2} = [1 \ 0 \ 0; 0 \ Z_{P_c} \ 0] \\ \mathcal{S}_{I_3} = [0 \ \cos\alpha_1 \ \sin\alpha_1; T_{N_3}\sin\alpha_1 - T^*\cos\alpha_1 \ 0 \ 0] \end{cases} \quad (10)$$

式中: \mathcal{S}_{I_1} 为沿着Z轴的移动自由度, \mathcal{S}_{I_2} 与 \mathcal{S}_{I_3} 为图2(a)中绕 x, y 轴转动的转动自由度,即此时动平台的自由度仍为两转动一移动,故机构 PRU-2PRUPc 无伴随运动。

2 位置分析

2.1 运动学反解分析

机构 PRU-2PRUPc 有3个运动自由度,故需3个输出参数(α, β, z)描述动平台的运动自由度,其中 α 与 β 分别表示动平台沿 x, y 轴的转动角度, z 表示动平台沿 z 轴的运动距离,且设每条分支的移动副为驱动副,则输入参数(q_1, q_2, q_3)为移动副的运动距离。

此时机构的旋转矩阵为

$$T = T_x(\alpha)T_y(\beta) = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\alpha\sin\beta & \cos\alpha\sin\beta \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ -\sin\beta & \sin\alpha\cos\beta & \cos\alpha\cos\beta \end{bmatrix} \quad (11)$$

可得向量的转换公式为

$$R_A = TR_B + P \quad (12)$$

式中: R_A 为定坐标系中的向量坐标; R_B 为动坐标系中

的向量坐标; P 为动坐标系原点坐标, $P=[0,0,Z_{P_c}]^T$ 。

$$L_i = |A_i - B_i| \quad i = 1, 2, 3 \quad (13)$$

式(13)为杆长公式, A_i 与 B_i ($i=1,2,3$)表示连杆端点在定坐标系中的坐标。

将式(12)代入式(13)中,可得

$$\begin{cases} q_1 = p_c \cos\beta \pm \sqrt{L^2 - (Z_{P_c} - p_c \sin\beta)^2} \\ q_2 = p_c \cos\beta \pm \sqrt{L^2 - (Z_{P_c} + p_c \sin\beta)^2} \\ q_3 = p_c \cos\alpha \pm \sqrt{L^2 - (p_c \sin\alpha \sin\beta)^2 - (p_c \sin\alpha \cos\beta + Z_{P_c})^2} \end{cases} \quad (14)$$

式中: p_c 为圆弧导轨的半径,“ \pm ”表示每条分支有两组运动学反解。故 3 条支链共有 8 组运动学反解。

设圆弧导轨半径 p_c 为 112.5 mm, 连杆长 L 为 238 mm, 给出 3 组位姿下机构的输出参数 α, β, z , 对机构的输入参数 q_1, q_2, q_3 进行求解, 结果如表 1 所示。

表 1 反解算例数值

Table 1 Values of the inverse calculation example

位姿	$\alpha/(^\circ)$	$\beta/(^\circ)$	z/mm	q_1/mm	q_2/mm	q_3/mm
1	15	0	140	304.968 2	304.968 2	276.128 3
2	0	15	140	319.258 7	276.128 3	304.849 4
3	15	15	140	319.258 7	276.128 3	276.955 7

2.2 运动学正解分析

机构运动学正解是通过已知输入参数(q_1, q_2, q_3), 对输出参数(α, β, z)进行求解, 由于传统运动学正解的求解方法含有复杂的隐式方程与繁琐的数学推导, 导致求解过程较为困难, 故而采用 PSO 迭代求取运动学正解, 简化了正解的求解过程^[18], 且相较于遗传算法与人工蜂群算法, 粒子群算法具有较快的收敛速度^[19], 可有效地进行运动学正解的求解。PSO 是一种模拟鸟类捕食的算法, 其思想是在搜索空间内随机初始化的一群粒子在每一代更新迭代中根据自身的历史最优解和全局最优解来调节自己的位置, 最终找到最优解^[20]。

首先对机构目标函数模型进行构造

$$\begin{cases} F_1 = p_c \cos\beta + \sqrt{L^2 - (Z_{P_c} - p_c \sin\beta)^2} - q_1 \\ F_2 = p_c \cos\beta + \sqrt{L^2 - (Z_{P_c} + p_c \sin\beta)^2} - q_2 \\ F_3 = p_c \cos\alpha + \sqrt{L^2 - (p_c \sin\alpha \sin\beta)^2 - (p_c \sin\alpha \cos\beta + Z_{P_c})^2} - q_3 \end{cases} \quad (15)$$

构造 PSO 算法的适应度函数 $F = |F_1| + |F_2| + |F_3|$, 并使最小迭代值在 $e \times 10^{-6}$ 内。初始化算法相关参数如表 2 所示, 当粒子数量过少时无法得出准确的正解, 粒子数量过多会使迭代时间过长, 本算法中粒子数量取 80; 学习因子取值 $C_1, C_2 \leq 2$, 本算法中取 1.45; 惯性权重 W 的一般取值范围为 $[0.5, 1.2]$, 本算法中取 0.6。

表 2 初始化参数

Table 2 Initialization parameters

初始化参数	参数取值
粒子数量	80
最大迭代次数	350
学习因子 $C_1=C_2$	1.45
惯性权重 W	0.6
转动角 $\alpha/(^\circ)$	$[-45, 45]$
转动角 $\beta/(^\circ)$	$[-45, 45]$
位移 Z/mm	$[0, 200]$

输出参数 α, β, z 构成了算法的搜索空间, 粒子分布在搜索空间内。设置每个粒子的初始位置为其局部最优解 P^{best} , 通过计算比较所有粒子适应度函数的值 F , 得到粒子群中的全局最优解 O^{best} , 然后通过式(16)更新粒子的速度与位置。循环此过程, 即得到输入参数的最优解。

$$\begin{cases} X_{t+1} = X_t + V_{t+1} \\ V_{t+1} = W \cdot V_t + C_1 \times r_1 \times (P_t^{\text{best}} - X_t) + C_2 \times r_2 \times (O_t^{\text{best}} - X_t) \end{cases} \quad (16)$$

式中: X_t 与 V_t 分别为 t 时刻粒子的位置与速度, P_t^{best} 与 O_t^{best} 分别为 t 时刻粒子的个体最优解与全局最优解, r_1 与 r_2 为 $[0, 1]$ 内的随机数。

对机构正解进行算例分析, 其迭代结果如表 3 所示。将表 2 反解所得的输入参数 q_1, q_2, q_3 使用 PSO 进行迭代, 得到表 3 中输出参数 α, β, z 的最优解, 并与表 1 给定的输出参数 α, β, z 进行对比, 误差值如表 4 所示, 此时误差接近 0。适应度曲线如图 3 所示, 曲线收敛较快, 因此该算法达到机构正解计算的目的。

表 3 正解验算数值

Table 3 Positive solution values

位姿	q_1/mm	q_2/mm	q_3/mm	$\alpha/(^\circ)$	$\beta/(^\circ)$	z/mm
1	304.968 2	304.968 2	276.128 3	15	0	140
2	319.258 7	276.128 3	304.849 4	0.086 0	15	139.999 9
3	319.258 7	276.128 3	276.955 7	15	15	139.999 9

表 4 算法误差值

Table 4 Algorithm error value

位姿	输出参数误差($\Delta\alpha, \Delta\beta, \Delta z$)
1	(0,0,0)
2	(0.086,0,0.000 1)
3	(0,0,0.000 1)

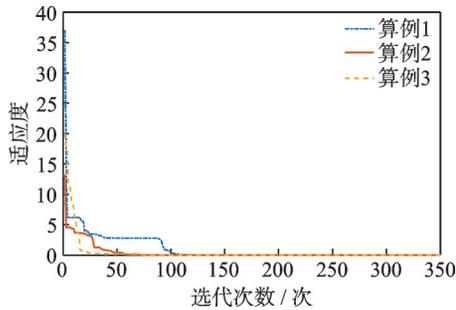


图 3 适应度函数曲线

Fig.3 Fitness function curves

2.3 工作空间求解

并联机构的性能优劣在很大程度上取决于其工作空间的大小及其范围是否连续,故而对于工作空间的求解是运动学分析的重要组成部分。工作空间存在许多求解方法,其中基于位置反解求解方法最为巧妙。

对于 PRU-2PRUP_c 并联机构,定义机构中运动副的运动范围为

$$\begin{cases} 0 \leq q_i \leq 150 \\ -60^\circ \leq \epsilon \leq 60^\circ \end{cases} \quad (17)$$

式中: q_i 为移动副移动的距离, ϵ 为转动副可转动的范围。

利用点云法,通过 MATLAB 编写工作空间搜索程序,进而求解得到机构工作空间如图 4 所示。可以看出 PRU-2PRUP_c 并联机构的工作空间完整且内部没有空洞,故具有良好的运动性能,同时为机构杆件参数的优化提供了理论基础。

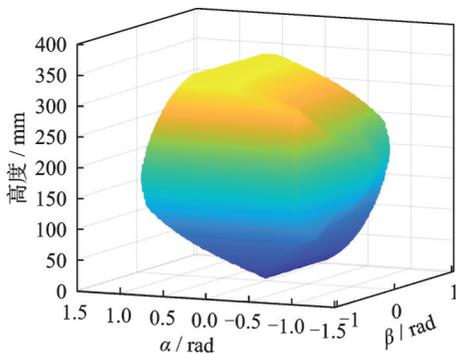


图 4 机构工作空间

Fig.4 Workspace of mechanism

3 运动传递性能分析

3.1 机构奇异位型分析

基于雅可比矩阵的分析方法为传统的奇异分析法,其求解难度较大且求解过程不具备物理含义,故本节基于机构运动传递的螺旋法对 PRU-2PRUP_c 并联机构进行奇异位型分析。

3.2 输入传递奇异

以分支 1 为例,机构的输入运动螺旋与传递力螺旋为

$$\begin{cases} \$I_1 = (0 \ 0 \ 0; 1 \ 0 \ 0) \\ \$T_1 = (X_{M_1} - X_{N_1} \ 0 \ Z_{N_1}; 0 \ -X_{M_1} \cdot Z_{N_1} \ 0) \end{cases} \quad (18)$$

式中: $\$I_i$ 表示过原点且方向沿着 X 轴的运动螺旋, $\$T_i$ 表示过点 M_1 且方向沿着 M_1N_1 的力螺旋。

$$\$I_i \circ \$T_i = X_{M_1} - X_{N_1} \quad (19)$$

式(19)为输入运动螺旋与力螺旋的互易积。

由螺旋理论得,当运动螺旋与力螺旋的互易积为 0 时,能量无法在机构中进行传递,当且仅当 $X_{M_1} = X_{N_1}$ 时机构发生输入传递奇异,即分支 1 连杆 M_1N_1 垂直于基座,同理可得分支 2 与分支 3 的输入传递奇异位型,如图 5 所示。

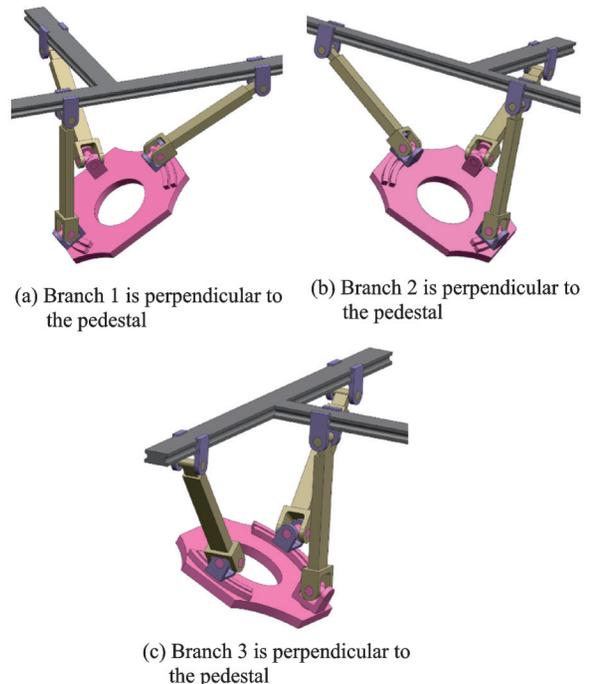


图 5 输入传递奇异

Fig.5 Input transmission singularity

3.3 输出传递奇异

求解某分支的输出传递奇异时,其余分支的传递力螺旋成为约束螺旋 S ,以求解分支 1 为例,此时 $S = [\$I_1^r, \$I_2^r, \$I_3^r, \$T_2, \$T_3]$ 。设 M_1 点的位置矢量为 f_1 ,分支 1 的方向矢量为 t_1 ,则输出螺旋为

$$\mathcal{S}_{o_1} = [(\mathbf{f}_3 - \mathbf{f}_2)/|\mathbf{f}_3 - \mathbf{f}_2|; \mathbf{f}_2 \times (\mathbf{f}_3 - \mathbf{f}_2)/|\mathbf{f}_3 - \mathbf{f}_2|] \quad (20)$$

式中 \mathcal{S}_{o_1} 为方向沿 $M_2 M_3$, 且过点 M_3 的运动螺旋。同理可得

$$\begin{cases} \mathcal{S}_{o_2} = ((\mathbf{f}_3 - \mathbf{f}_1)/|\mathbf{f}_3 - \mathbf{f}_1|; \mathbf{f}_1 \times (\mathbf{f}_3 - \mathbf{f}_1)/|\mathbf{f}_3 - \mathbf{f}_1|) \\ \mathcal{S}_{o_3} = ((\mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_1)/|\mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_1|; \mathbf{f}_1 \times (\mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_1)/|\mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_1|) \end{cases} \quad (21)$$

且此时机构所有分支的单位传递力螺旋为

$$\begin{cases} \mathcal{S}_{T_1} = (\mathbf{t}_1/|\mathbf{t}_1|; \mathbf{f}_1 \times \mathbf{t}_1/|\mathbf{t}_1|) \\ \mathcal{S}_{T_2} = (\mathbf{t}_2/|\mathbf{t}_2|; \mathbf{f}_2 \times \mathbf{t}_2/|\mathbf{t}_2|) \\ \mathcal{S}_{T_3} = (\mathbf{t}_3/|\mathbf{t}_3|; \mathbf{f}_3 \times \mathbf{t}_3/|\mathbf{t}_3|) \end{cases} \quad (22)$$

则其输出端传递的单位能量为

$$\mathcal{S}_{o_1} \circ \mathcal{S}_{T_1} = \mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{f}_2 \times (\mathbf{f}_3 - \mathbf{f}_2) / (|\mathbf{f}_3 - \mathbf{f}_2| \cdot |\mathbf{t}_1|) + (\mathbf{f}_3 - \mathbf{f}_2) \cdot (\mathbf{f}_1 \times \mathbf{t}_1) / (|\mathbf{f}_3 - \mathbf{f}_2| \cdot |\mathbf{t}_1|) \quad (23)$$

当且仅当分支 1 与基座平行时, 即位置矢量 \mathbf{f}_1 与方向矢量 \mathbf{t}_1 平行时, 式(23)为 0, 即输出端传递的能量为 0, 此时机构发生输出传递奇异, 同理可得其余分支的输出传递奇异位型, 如图 6 所示。

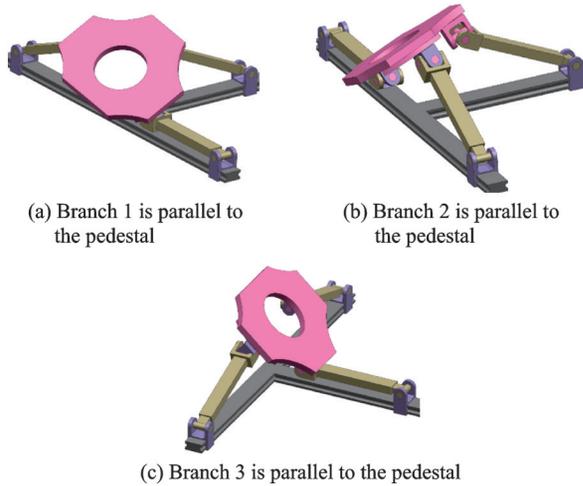


图 6 输出传递奇异

Fig.6 Output transmission singularity

4 机构传递性能分析

4.1 传递性能分析方法

并联机构的传递性能代表了机构能量传递的效率, 因此对传递性能的分析是十分必要的。传统的基于雅可比矩阵的分析法应用于具有混合自由度的机构时, 会出现量纲不统一、物理意义不清晰等问题。为此, 文献[21]提出了一种运动/力传递性能指标, 定义了局部传递指标(Local transmission index, LTI), 该分析法简单高效、具有清晰的物理意义, 且性能指标具有量纲为一、与坐标系选取无关的优点。

4.2 传递性能指标

运动/力传递性能方法定义输入传递性能指标

λ_i 、输出传递性能指标 η_i , 表达式为

$$\lambda_i = \frac{|\mathcal{S}_{I_i} \circ \mathcal{S}_{T_i}|}{|\mathcal{S}_{I_i} \circ \mathcal{S}_{T_i}|_{\max}} \quad (24)$$

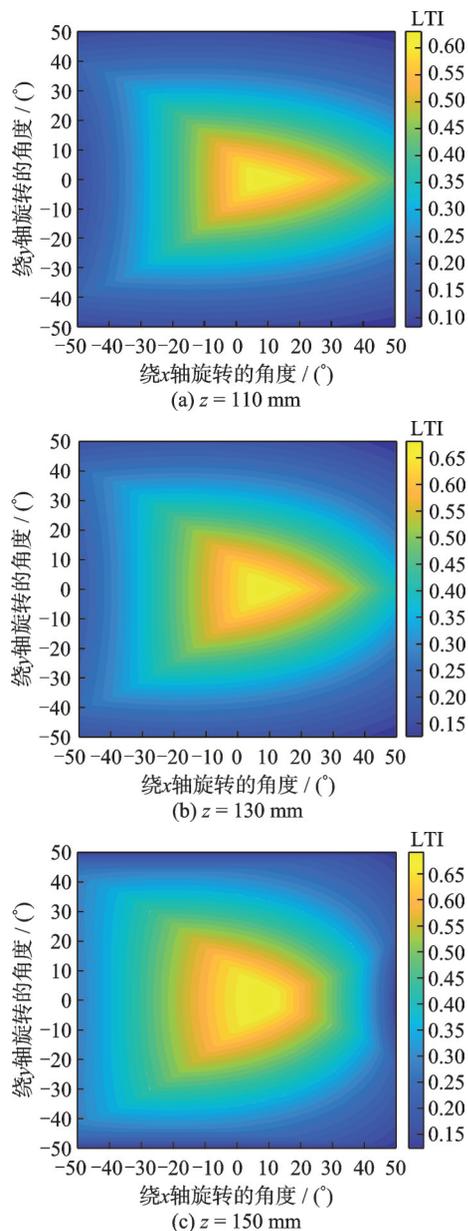
$$\eta_i = \frac{|\mathcal{S}_{O_i} \circ \mathcal{S}_{T_i}|}{|\mathcal{S}_{O_i} \circ \mathcal{S}_{T_i}|_{\max}} \quad (25)$$

式中: \mathcal{S}_{I_i} 为分支 $i(i=1, 2, 3)$ 的输入运动螺旋, \mathcal{S}_{T_i} 为分支 i 的传递力螺旋, \mathcal{S}_{O_i} 为分支 i 的输出运动螺旋。 λ_i 与 η_i 的范围均为 0~1, 且值越接近于 1, 机构的传递性能越优异。故基于输入传递性能与输出传递性能, 将机构的传递性能 LTI 定义为

$$LTI = \min \{ \lambda_i, \eta_i \} \quad (26)$$

显然, LTI 的值为 0~1, 是一个量纲为一指标。其值越接近 1, 表示能量从输入到输出的传递效率越高, 即在此位姿下并联机构传递性能越高, 将 LTI 值大于 0.6 的位姿定义为优质工作空间^[21-22]。

并联机构传递性能图谱如图 7 所示, 机构在 z 值约为 150 mm 时, 此时 LTI 超过 0.6 的范围最大,



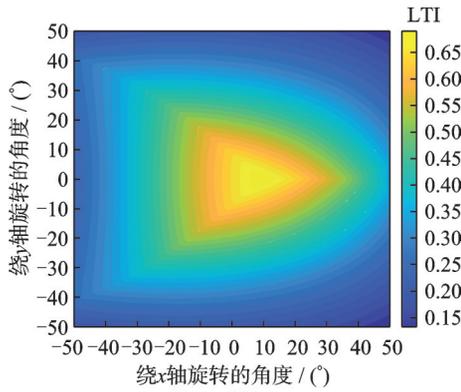


图 7 并联机构 LTI

Fig.7 LTI of parallel mechanism

传递性能达到最佳,此时机构的传递效率最高。

5 运动学仿真

基于 MATLAB 与 Adams 对机构进行联合运动仿真。选取式(14)求得的一组运动学反解,如式(27)所示。

$$\begin{cases} q_1 = p_c \cos\beta + \sqrt{L^2 - (Z_p - p_c \sin\beta)^2} \\ q_2 = p_c \cos\beta + \sqrt{L^2 - (Z_p + p_c \sin\beta)^2} \\ q_3 = p_c \cos\alpha + \sqrt{L^2 - (p_c \sin\alpha \sin\beta)^2 - (p_c \sin\alpha \cos\beta + Z_p)^2} \end{cases} \quad (27)$$

设置动平台的运动轨迹,如式(28)所示,其中 t 为机构运行的时间。

$$\begin{cases} \alpha = -0.6 \sin\left(\frac{\pi}{5} t\right) \\ \beta = 0.6 \sin\left(\frac{\pi}{5} t\right) \\ z = 0.1 \sin\left(\frac{\pi}{5} t\right) \end{cases} \quad (28)$$

将式(28)中动平台的运动轨迹代入式(27)中的运动学反解中,可得机构驱动副 P_1 、 P_2 、 P_3 的输入参数 q_1 、 q_2 、 q_3 关于时间 t 的曲线。基于 Adams 对驱动副的输入参数进行仿真,由图 8 可得,理论计算

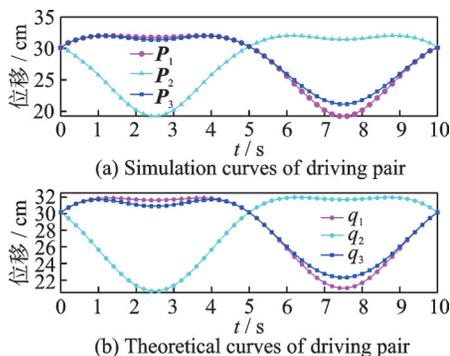


图 8 驱动副位移曲线

Fig.8 Displacement curves of driving pair

曲线与仿真曲线一致,验证得反解结果正确,且由位移曲线可知,移动副运动较为平滑,无速度突变,为后续机构的应用提供了基础。

6 结 论

(1) 设计了一种含圆弧副的并联机构,从本质上规避了伴随运动的产生,消除了伴随运动导致机构运动精度降低的消极影响,避免了末端的运动副轴线位于同一直线导致机构刚度下降的不良影响。

(2) 对并联机构进行位置反解分析,得到机构的 8 组反解,并基于 PSO 算法求解得到机构的位置正解,验证了反解的正确性,并基于 Adams 软件,得到驱动副位移的计算与仿真曲线的一致性。

(3) 针对机构的工作空间与奇异位型进行分析,机构工作空间连续且其奇异位型数量较少,具有较为优越的运动学性能。

(4) 由于机构无伴随运动的特性,在连续转动时不会产生期望之外的运动,使其在安全需求较高的应用场景具有广阔的应用前景,如踝关节康复机构、手术机器人等。

参考文献:

[1] HERRERO S, PINTO C, ALTUZARRA O, et al. Analysis of the 2PRU-1PRS 3DOF parallel manipulator: Kinematics, singularities and dynamics[J]. Robotics and Computer-Integrated Manufacturing, 2018 (51): 63-72.

[2] 沈惠平,王达,李菊,等. 1T2R 并联机构拓扑降耦设计与运动性能分析[J]. 农业机械学报, 2021, 52(5): 370-377.

SHEN Huiping, WANG Da, LI Ju, et al. Topological coupling-reducing design and kinematic performance analysis for 1T2R parallel mechanism[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2021, 52(5): 370-377.

[3] RICHARD P L, GOSSELIN C M, KONG X W. Kinematic analysis and prototyping of a partially decoupled 4-DOF 3T1R parallel manipulator[J]. Journal of Mechanical Design, 2007, 129(6): 611-616.

[4] 张伟中,徐灵敏,童俊华,等. 2-PUR-PSR 并联机构的运动学分析及尺度综合[J]. 机械工程学报, 2018, 54(7): 45-53.

ZHANG Weizhong, XU Lingmin, TONG Junhua, et al. Kinematic analysis and dimensional synthesis of 2-PUR-PSR parallel manipulator[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2018, 54(7): 45-53.

[5] 叶鹏达,尤晶晶,仇鑫,等. 并联机器人运动性能的研究现状及发展趋势[J]. 南京航空航天大学学报, 2020, 52(3): 363-377.

- YE Pengda, YOU Jingjing, QIU Xin, et al. Status and development trend of motion performance in parallel robot[J]. *Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics*, 2020, 52(3): 363-377.
- [6] 李双,李艳文,赵美欣,等.一种并联下肢康复机构的综合与分析[J]. *机械工程学报*, 2022, 58(3): 55-64.
- LI Shuang, LI Yanwen, ZHAO Meixin, et al. Synthesis and analysis of a lower-extremity rehabilitation in parallel[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2022, 58(3): 55-64.
- [7] LYU X H, YE F, WANG K, et al. A new family of double-stage parallel mechanisms with movable RCM [J]. *Robotica*, 2024, 12(10): 1-24.
- [8] XIE F G, LIU X J, WANG J. A 3-DOF parallel manufacturing module and its kinematic optimization[J]. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, 2012, 28(3): 334-343.
- [9] CARRETERO J A, NAHON M, BUCKHAM B, et al. Kinematic analysis of a three-DOF parallel mechanism for telescope applications[M]. *Université Laval: University of Victoria*, 1997.
- [10] POND G, CARRETERO J A. Quantitative dexterous workspace comparison of parallel manipulators[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2007, 42(10): 1388-1400.
- [11] CARRETERO J A, PODHORODESKI R P, NAHON M A, et al. Kinematic analysis and optimization of a new three degree-of-freedom spatial parallel manipulator[J]. *Journal of Mechanical Design*, 2000, 122(1): 17-24.
- [12] 陈子明,张扬,黄坤,等.一种无伴随运动的对称两转一移并联机构[J]. *机械工程学报*, 2016, 52(3): 9-17.
- CHEN Ziming, ZHANG Yang, HUANG Kun, et al. Symmetrical 2R1T parallel mechanism without parasitic motion[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2016, 52(3): 9-17.
- [13] 陈子明,尹涛,潘泓,等.一种三自由度并联踝关节康复机构[J]. *机械工程学报*, 2020, 56(21): 70-78.
- CHEN Ziming, YIN Tao, PAN Hong, et al. 3-DOF parallel ankle rehabilitation mechanism[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2020, 56(21): 70-78.
- [14] LI Q C, HERVÉ M J. 1T2R parallel mechanisms without parasitic motion[J]. *IEEE Transactions on Robotics*, 2010, 26(3): 401-410.
- [15] 曹毅,居勇健,黄河,等.具有两条连续确定转轴的PRR型并联机构型综合[J]. *华中科技大学学报*, 2022, 50(1): 125-131.
- CAO Yi, JU Yongjian, HUANG He, et al. Type synthesis of PRR parallel mechanisms with two continuous and determined rotational axes[J]. *Journal of Huazhong University of Science and Technology*, 2022, 50(1): 125-131.
- [16] 陈森,张氢,陈文韬,等.基于空间几何的无伴随运动并联机构分析与综合[J]. *机械工程学报*, 2021, 57(1): 77-85.
- CHEN Miao, ZHANG Qing, CHEN Wentao, et al. Analysis and type synthesis of parallel mechanisms without parasitic motion based on spatial geometry[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2021, 57(1): 77-85.
- [17] JU Y J, XU W S, MENG G, et al. Constraint characteristics and type synthesis of two families of 1T2R parallel mechanism[J]. *Robotica*, 2022, 40(9): 3033-3056.
- [18] 王庆峰,李虹,王新宇,等.2-SPR/RCU并联机构的运动性能与灵巧度分析[J]. *机械科学与技术*, 2021, 40(8): 1177-1185.
- WANG Qingfeng, LI Hong, WANG Xinyu, et al. Analysis on kinematic performance and dexterity of 2-SPR/RCU asymmetric parallel mechanism[J]. *Mechanical Science and Technology for Aerospace Engineering*, 2021, 40(8): 1177-1185.
- [19] 常振振,张彦斌,张双,等.基于粒子-人工蜂群算法的3RPUPc-UPS并联机构运动学正解研究[J]. *机电工程*, 2024, 41(2): 311-318.
- CHANG Zhenzhen, ZHANG Yanbin, ZHANG Shuang, et al. Forward kinematics solutions of 3RPUPc-UPS parallel mechanism based on a particle-artificial bee colony algorithm[J]. *Journal of Mechanical and Electrical Engineering*, 2024, 41(2): 311-318.
- [20] 段旭洋,王皓,赵勇,等.基于嵌套粒子群算法的平面机构尺度综合与构型优选[J]. *机械工程学报*, 2013, 49(13): 32-39.
- DUAN Xuyang, WANG Hao, ZHAO Yong, et al. Dimensional synthesis and optimal type selection of planar mechanisms based on nested particle swarm optimization[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2013, 49(13): 32-39.
- [21] 刘辛军,谢福贵,汪劲松.并联机器人机构学基础[M].北京:高等教育出版社,2018.
- LIU Xinjun, XIE Fugui, WANG Jingsong. *Fundamental of parallel robotic mechanisms*[M]. Beijing: Higher Education Press, 2018.
- [22] 张伟中,徐灵敏,童俊华,等.2-PUR-PSR并联机构的运动学分析及尺度综合[J]. *机械工程学报*, 2018, 54(7): 45-53.
- ZHANG Weizhong, XU Lingmin, TONG Junhua, et al. Kinematic analysis and dimensional synthesis of 2-PUR-PSR parallel manipulator[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2018, 54(7): 45-53.