

DOI:10.16356/j.1005-2615.2024.06.019

基于几何法的三自由度平面并联机器人的 Hunt 奇异研究

张毅¹, 尤晶晶^{1,2}, 王澍声¹, 黄宁宁¹, 闻王虎¹

(1. 南京林业大学机械电子工程学院, 南京 210037; 2. 重庆大学高端装备机械传动全国重点实验室, 重庆 400044)

摘要: 首先, 以 3 条支链直线交于同一点为判定准则, 推导机器人的 Hunt 奇异曲面方程。研究发现, 3-转动副移动副转动副 (Revolute-joint, prismatic-joint, revolute-joint, RPR) 平面并联机器人的 Hunt 奇异曲面方程与运用雅可比代数法得到的输出奇异曲面方程完全相同, 即两曲面重合。其次, 辨识出该机器人 4 类较常见的 Hunt 奇异位形, 并将它们的奇异轨迹描绘在奇异曲面上, 有助于揭示奇异位形之间的关系。接着, 设计了 3 种特殊结构的 3-RPR 平面并联机器人, 并分析了它们的 Hunt 奇异性。结果表明, 该机器人的 Hunt 奇异特性对几何结构的依赖性较大。最后, 通过虚拟样机和实物样机的实验, 论证了 3-RPR 平面并联机器人的 Hunt 奇异性。

关键词: 并联机器人; 奇异性; Hunt 奇异; 雅可比矩阵; 奇异曲面

中图分类号: TH112 文献标志码: A 文章编号: 1005-2615(2024)06-1152-09

Geometric Analysis of Hunt Singularity in Three-Degree-of-Freedom Planar Parallel Robots

ZHANG Yi¹, YOU Jingjing^{1,2}, WANG Shusheng¹, HUANG Ningning¹, WEN Wanghu¹

(1. College of Mechanical and Electronic Engineering, Nanjing Forestry University, Nanjing 210037, China; 2. State Key Laboratory of Mechanical Transmission for Advanced Equipment, Chongqing University, Chongqing 400044, China)

Abstract: Initially, the robot's Hunt singular surface equations are derived by using the criterion where the three linkages intersect at a single point. It is discovered that the Hunt singular surface equations of the 3-revolute-joint, prismatic-joint, revolute-joint (RPR) planar parallel robot are completely identical to the output singular surface equations obtained using the Jacobian algebraic method, meaning the two surfaces coincide. Furthermore, four commonly occurring types of Hunt singular configurations in the robot are identified, and their singular trajectories are depicted on the singular surface, helping to reveal the relationships between these singular configurations. Subsequently, three special structures of the 3-RPR planar parallel robot are designed, and their Hunt singularities are analyzed. The results show that the robot's Hunt singularity characteristics are highly dependent on its geometric structure. Finally, the existence of Hunt singularity in the 3-RPR planar parallel robot is demonstrated through experiments with both virtual and physical prototypes.

Key words: parallel robot; singularity; Hunt singularity; Jacobian matrix; singularity surface

基金项目: 国家自然科学基金项目(51405237); 高端装备机械传动全国重点实验室开放基金项目(SKLMT-MSKFKT-202330)。

收稿日期: 2024-05-12; **修订日期:** 2024-08-29

通信作者: 尤晶晶, 男, 副教授, 硕士生导师, E-mail: youjingjing251010@126.com。

引用格式: 张毅, 尤晶晶, 王澍声, 等. 基于几何法的三自由度平面并联机器人的 Hunt 奇异研究[J]. 南京航空航天大学学报, 2024, 56(6):1152-1160. ZHANG Yi, YOU Jingjing, WANG Shusheng, et al. Geometric analysis of Hunt singularity in three-degree-of-freedom planar parallel robots[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2024, 56(6):1152-1160.

并联机器人因无累积误差,且精度高、刚度大、承载能力强^[1],被广泛应用于飞行模拟器^[2]、航天器对接^[3]、六维加速度传感器^[4]等领域。奇异性是所有并联机器人都具备的性质^[5]。当机器人处于奇异位形时,机器人的实际自由度不再与理论自由度相等,且会发生刚度降低、运动失控等异常现象。因此,对并联机器人的奇异性研究有着重要的理论和实际意义。

代数法^[6]是研究奇异性最基本的方法。1983年,Hunt^[7]运用螺旋理论首次发现了“6-3”式 Stewart 并联机构的一种奇异位形,即与动、静平台相连的 6 条支链所在的直线交于一条公共直线上。这被称为“Hunt 奇异性判据”。该位形下,即使所有支链被锁合,动平台仍具有一个绕公共直线的瞬时转动自由度。1990年,Gosselin 和 Angeles^[8]基于闭环运动链雅可比矩阵的性质,分析了几种典型并联机构的奇异性,并总结出 3 种奇异位形,即输入奇异、输出奇异、综合奇异。研究还发现,发生输入、输出奇异的原因分别是机构的反向运动学方程存在多解和正向运动学方程存在多解。大多数直线驱动并联机构的反向运动学方程只有唯一解,而正向运动学方程有多组解^[9],故它们仅存在输出奇异。其中,比较具有代表性的直线驱动机构就是 3-RPR 平面并联机器人^[10]。

叶鹏达等^[11]、Sefrioui 等^[12]运用雅可比矩阵法分别研究了“12-6”式 Stewart 并联机构和 3-转动副移动副转动副 (Revolute-joint, prismatic-joint, revolute-joint, RPR) 并联机器人的奇异位形。Nawratil^[13]通过分析雅可比矩阵,综合出了位置奇异曲面为圆锥曲面的 Stewart 并联机构。文献[14]以四元数为姿态参数,推导了“6-6”式 Stewart 并联机构的雅可比矩阵,并分别绘制了机构的位置、姿态奇异曲面。仇鑫等^[15]运用代数法推导了“9-3”式 Stewart 并联机构的位置、姿态奇异曲面方程。以上研究均基于代数法,虽然能够绘制出机器人的奇异曲面,但难以在奇异曲面上刻画出任意指定奇异位形的奇异轨迹,故几何意义不具有直观性。相反的,几何法是一种更加形象的分析方法,能直观剖析出并联机器人的奇异性能机理。

本文以动、静平台均为等边三角形的 3-RPR 平面并联机器人为研究对象,结合“Hunt 奇异性判据”,并运用几何法研究其 Hunt 奇异位形。首先,基于杆长约束方程推导雅可比矩阵,并绘制输出奇异曲面。其次,以 3 条驱动杆所在直线交于一点为准则,推导 Hunt 奇异曲面方程。接着,分析了 4 类较常见的 Hunt 奇异位形,并根据它们的几何关系,在奇异曲面上画出了它们的奇异轨迹。然后,设计

了 3 种特殊结构的 3-RPR 平面并联机器人,并对它们的 Hunt 奇异性质进行了分析。最后,通过实验,对 3-RPR 平面并联机器人的 Hunt 奇异性进行了验证。

1 输出奇异分析

1.1 坐标系描述

3-RPR 平面并联机器人的结构模型和机构简图如图 1 所示。动、静平台分别为边长等于 $2h$ 和 $2l$ 的等边三角形;动、静平台上的转动副分别为 A_1 、 A_2 、 A_3 和 B_1 、 B_2 、 B_3 。

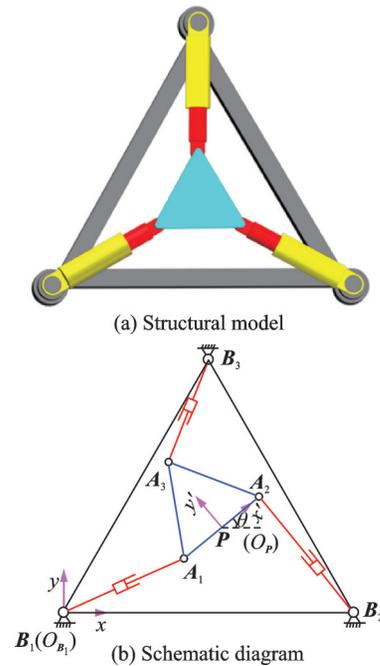


图 1 3-RPR 平面并联机器人

Fig.1 3-RPR planar parallel robot

以 A_1A_2 的中点 O_p 为原点建立动坐标系 $\{O_p-x'y'\}$, x' 轴平行于 PA_2 。以 O_{B_1} 为原点建立静坐标系 $\{O_{B_1}-xy\}$, x 轴平行于 B_1B_2 。 B_1 、 B_2 、 B_3 在静坐标系下的坐标为

$$B_1=(0,0)^T, B_2=(2l,0)^T, B_3=(l, \sqrt{3}l)^T \quad (1)$$

A_1 、 A_2 、 A_3 在动坐标系下的坐标为

$$A'_1=(-h,0)^T, A'_2=(h,0)^T, A'_3=(0, \sqrt{3}h)^T \quad (2)$$

设 P 在静坐标系下的坐标为 $(x, y)^T$ 。通过坐标变换,可得 $A_i(i=1,2,3)$ 在静坐标系下的坐标

$$A_i = P + \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} A'_i \quad (3)$$

式中 θ 为动平台的姿态角。

1.2 输出奇异曲面

设驱动杆长度 $A_iB_i=L_i(i=1,2,3)$, 根据杆长约束条件可得

$$L_i^2=(A_{iy}-B_{iy})^2+(A_{ix}-B_{ix})^2 \quad (4)$$

将式(4)的左右两边同时对时间求一阶导数,整理后可得

$$J_1 v_1 = J_2 v_2 \quad (5)$$

式中: v_1 为驱动杆的输入速度, v_2 为动平台的输出速度, J_1 为输入雅可比矩阵, J_2 为输出雅可比矩阵。其中 J_1 、 J_2 可分别表示为

$$J_1 = \begin{bmatrix} L_1 & 0 & 0 \\ 0 & L_2 & 0 \\ 0 & 0 & L_3 \end{bmatrix} \quad J_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{i1} = x + A_{ix} \cos \theta - A_{iy} \sin \theta - B_{ix} \\ a_{i2} = y + A_{ix} \sin \theta + A_{iy} \cos \theta - B_{iy} \\ a_{i3} = a_{i2}(A_{ix} \cos \theta - A_{iy} \sin \theta) - \\ \quad a_{i1}(A_{ix} \sin \theta + A_{iy} \cos \theta) \end{cases}$$

由于3-RPR平面并联机器人不存在输入奇异,因此只需对其输出雅可比矩阵进行分析。当输出雅可比矩阵的行列式为零时,机器人发生奇异。由 $\det(J_2)=0$ 整理可得机器人的输出奇异曲面方程为

$$hl \sin \theta (\sqrt{3} x^2 - \sqrt{3} h^2 - 2\sqrt{3} lx - 2ly + \sqrt{3} y^2 + 2h(\sqrt{3} l + y) \cos \theta + 2h(l-x) \sin \theta) = 0 \quad (6)$$

任意给定一组结构参数 $h=2 \text{ mm}$, $l=8 \text{ mm}$ 。基于式(6),绘制输出奇异曲面,见图2。

观察图2可知:(1)3-RPR平面并联机器人的输出奇异曲面由一个圆锥柱体和3块平面拼接而成;(2)奇异曲面的内部为空洞,当姿态角为 30° 、 60° 、 90° 时,奇异轨迹为圆形,并且其半径随着 θ 的

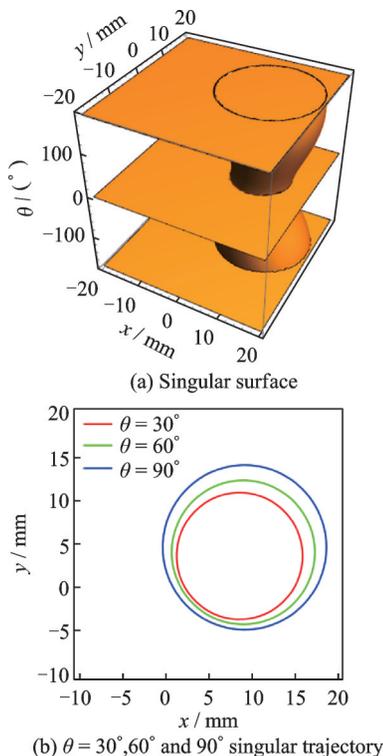


图2 输出奇异曲面

Fig.2 Output singular surface

增大而增大。

2 Hunt奇异分析

2.1 Hunt奇异曲面

在已知的各种奇异位形中,Hunt奇异是比较容易产生的。Hunt在提出这种奇异位形时,主要针对的是“6-3”式Stewart并联机构。当所有支链或其延长线相交于同一条直线时,若外负载中存在绕该交线的力矩,由于无法提供对应的平衡力矩,机器人会发生“倾覆”现象。

运用上述力学特性,本文将3-RPR平面并联机器人的3条驱动杆或其延长线相交于同一点时的位形,也称为“Hunt奇异位形”,见图3。此时,即使驱动杆全部被锁合,也不能平衡动平台上绕相交点的外力矩,故动平台尚具有不可控的绕该交点的微转动。

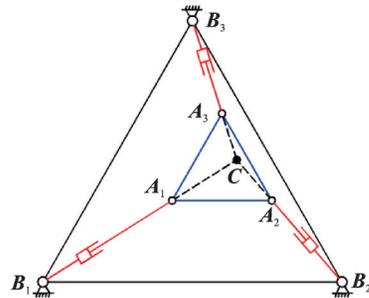


图3 Hunt奇异位形

Fig.3 Hunt singular configuration

假设交点 C 在静坐标系下的坐标为 $(X_C, Y_C)^T$, A_1B_1 、 A_2B_2 、 A_3B_3 在静坐标系下的方程分别为

$$Y = k_1 X \quad (7)$$

$$Y = k_2 X - 2k_2 l \quad (8)$$

$$Y = k_3 X - k_3 l + \sqrt{3} l \quad (9)$$

式中: $k_1 = \frac{y - h \sin \theta}{x - h \cos \theta}$, $k_2 = \frac{y + h \sin \theta}{x + h \cos \theta - 2l}$, $k_3 = \frac{y + \sqrt{3} h \cos \theta - \sqrt{3} l}{x - \sqrt{3} h \sin \theta - l}$ 。

联立式(7,8)可求得 C 点坐标:

$$\begin{cases} X_C = \frac{l(x - h \cos \theta)(y + h \sin \theta)}{yl - yh \cos \theta + xh \sin \theta - hl \sin \theta} \\ Y_C = \frac{l(y - h \sin \theta)(y + h \sin \theta)}{yl - yh \cos \theta + xh \sin \theta - hl \sin \theta} \end{cases} \quad (10)$$

将式(10)代入式(9),可得3-RPR平面并联机器人的Hunt奇异曲面方程为

$$hl \sin \theta (\sqrt{3} h^2 + 2\sqrt{3} lx - \sqrt{3} x^2 + 2ly - \sqrt{3} y^2 - 2h(\sqrt{3} l + y) \cos \theta - 2h(l-x) \sin \theta) = 0 \quad (11)$$

对比式(11)和式(6)可知,该机器人的Hunt奇

异曲面方程与输出奇异曲面方程完全相同。因此,机器人的 Hunt 奇异曲面与输出奇异曲面也一样。

2.2 较常见的 Hunt 奇异

运用“Hunt 奇异性判据”^[7],利用几何法分析得到 3-RPR 平面并联机器人存在 4 类较常见的 Hunt 奇异。本文首次将它们分别命名为“中线 Hunt 奇异”“共线驱动 Hunt 奇异”“交铰链点 Hunt 奇异”和“ $0^\circ, \pm 180^\circ$ Hunt 奇异”。

2.2.1 中线 Hunt 奇异

当某驱动杆处于静平台的一条中线上时,3 条驱动杆必在该中线上有一交点(图 4)。将该类奇异称为“中线 Hunt 奇异”。

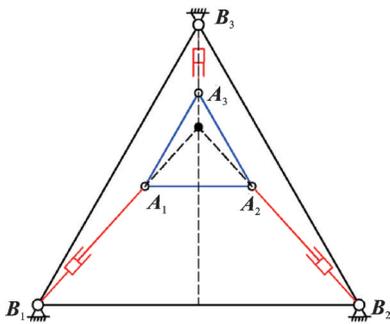


图 4 中线 Hunt 奇异

Fig.4 Midline Hunt singularity

根据几何关系,该类奇异包括以下 3 种可能情况:

(1) $\theta = 0^\circ, \pm 180^\circ$ 且 $x = l$, 对应于 A_3B_3 位于 B_1B_2 的中线上。

(2) $\theta = 0^\circ$ 且 $y = -\sqrt{3}x/3 + \sqrt{3}(2l - h)/3$, 或 $\theta = \pm 180^\circ$ 且 $y = -\sqrt{3}x/3 + \sqrt{3}(2l + h)/3$, 对应于 A_2B_2 位于 B_1B_3 的中线上。

(3) $\theta = 0^\circ$ 且 $y = \sqrt{3}x/3 - \sqrt{3}h/3$, 或 $\theta = \pm 180^\circ$ 且 $y = \sqrt{3}x/3 + \sqrt{3}h/3$, 对应于 A_1B_1 位于 B_2B_3 的中线上。

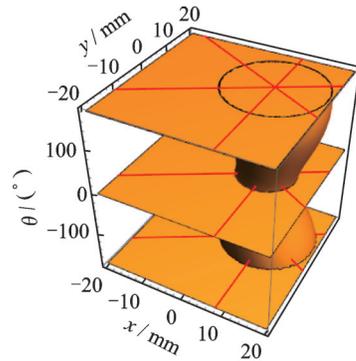
绘制 3-RPR 平面并联机器人的中线 Hunt 奇异轨迹,见图 5。由图 5 可以看出,该机器人的中线 Hunt 奇异轨迹为 9 条直线,每 3 条位于一个平面内且交于一点。这 3 个平面所对应的 θ 分别为 $0^\circ, 180^\circ$ 和 -180° 。

2.2.2 共线驱动 Hunt 奇异

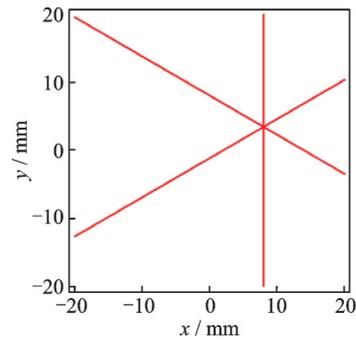
当某两条驱动杆共线时,3 条驱动杆必会在静平台的边线上交于一点(图 6)。将该类奇异称为“共线驱动 Hunt 奇异”。

具体包括以下 3 种可能的情况:

(1) $\theta = 0^\circ, \pm 180^\circ$ 且 $y = 0$, 对应于 A_1B_1, A_2B_2 共线。



(a) Midline Hunt singular trajectory on the singular surface



(b) Projection of the midline Hunt singular trajectory at $\theta = 0^\circ$

图 5 中线 Hunt 奇异轨迹

Fig.5 Midline Hunt singular trajectory

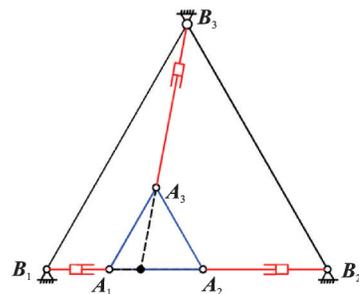


图 6 共线驱动 Hunt 奇异

Fig.6 Collinear drive Hunt singularity

(2) $\theta = 0^\circ$ 且 $y = -\sqrt{3}x + \sqrt{3}(2l - h)$, 或 $\theta = \pm 180^\circ$ 且 $y = -\sqrt{3}x + \sqrt{3}(2l + h)$, 对应于 A_1B_1, A_3B_3 共线。

(3) $\theta = 0^\circ$ 且 $y = \sqrt{3}x - \sqrt{3}h$, 或 $\theta = \pm 180^\circ$ 且 $y = \sqrt{3}x + \sqrt{3}h$, 对应于 A_2B_2, A_3B_3 共线。

绘制 3-RPR 平面并联机器人的共线驱动 Hunt 奇异轨迹,见图 7。由图 7 可以发现,该机器人的共线驱动 Hunt 奇异轨迹也为 9 条直线,与中线 Hunt 奇异轨迹在相同平面。每 3 条位于一个平面内且两两相交,交点与交点相连接的部分构成了一个等边三角形。

2.2.3 交铰链点 Hunt 奇异

当某两条驱动杆分别与动平台边线共线时,3 条驱动杆相交于动铰链点(图 8)。将该类奇异称

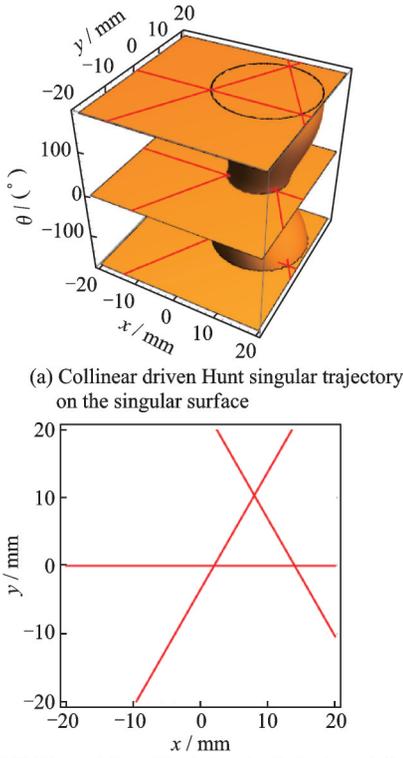


图7 共线驱动 Hunt 奇异轨迹
Fig.7 Collinearly driven Hunt singular trajectory

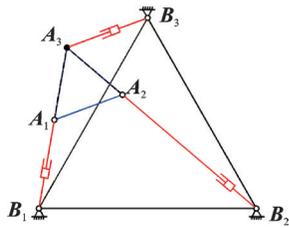


图8 交铰链点 Hunt 奇异
Fig.8 Cross-hinge Hunt singularity

为“交铰链点 Hunt 奇异”。

A_1A_2, A_1A_3, A_2A_3 的斜率 k_4, k_5, k_6 分别表示为

$$k_4 = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}, \quad k_5 = \frac{\sqrt{3} \cos \theta + \sin \theta}{\cos \theta - \sqrt{3} \sin \theta}, \quad k_6 = \frac{-\sqrt{3} \cos \theta + \sin \theta}{\cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta}$$

以 A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 的斜率 (k_1, k_2, k_3) 与 A_1A_2, A_1A_3, A_2A_3 的斜率 (k_4, k_5, k_6) 相等为约束条件。该类奇异包括以下3种可能情况:

- (1) $k_1=k_5$ 且 $k_2=k_6$, 对应于 A_1B_1 与 A_1A_3 共线, A_2B_2 与 A_2A_3 共线, 驱动杆相交于 A_3 点;
- (2) $k_1=k_3$ 且 $k_3=k_6$, 对应于 A_1B_1 与 A_1A_2 共线, A_3B_3 与 A_2A_3 共线, 驱动杆相交于 A_2 点;
- (3) $k_2=k_4$ 且 $k_3=k_5$, 对应于 A_2B_2 与 A_1A_2 共线, A_3B_3 与 A_1A_3 共线, 驱动杆相交于 A_1 点。

绘制 3-RPR 平面并联机器人的交铰链点 Hunt 奇异轨迹, 见图 9。

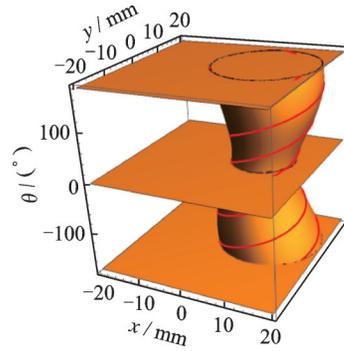


图9 交铰链点 Hunt 奇异轨迹
Fig.9 Hunt singular trajectory of cross hinge

由图 9 可以看出, 该机器人的交铰链点 Hunt 奇异轨迹为 3 条螺旋线, 并围绕在圆锥柱体的表面上。

2.2.4 0°, ±180° Hunt 奇异

当 $\theta = n\pi$ (n 为整数) 时, 式 (11) 恒成立。因此, 对于传统的 3-RPR 平面并联机器人, 只要动平台的姿态角为 0° 或 ±180°, 其 3 条驱动杆总会交于一点 (图 10)。将该类奇异称为“0°, ±180° Hunt 奇异”。

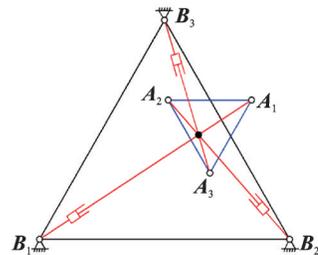


图10 0°, ±180° Hunt 奇异
Fig.10 0° and ±180° Hunt singularity

绘制 3-RPR 平面并联机器人的 0°, ±180° Hunt 奇异轨迹, 如图 11 中的 3 个红色平面所示。可见, 只要该机器人动平台的姿态角为 0° 或 ±180°, 无论动平台位置如何, 都是 Hunt 奇异位形。

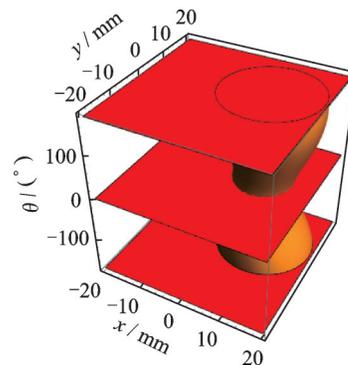


图11 0°, ±180° Hunt 奇异轨迹
Fig.11 0° and ±180° Hunt singular trajectory

3 特殊结构的 Hunt 奇异分析

传统 3-RPR 平面并联机器人的动、静平台均

为等边三角形,这类结构有着良好的各向同性性能。但是,研究发现它们在规避奇异位形方面较为欠缺。因此,为了研究机器人的结构对奇异性的影响,有必要设计其他结构用于扩展 3-RPR 平面并联机器人的无奇异工作空间。本节基于动、静平台铰链点的分布规律,分别设计了静平台为点型、静平台为线型和动平台为线型的 3 类特殊 3-RPR 平面并联机器人,并分析它们的 Hunt 奇异性。

3.1 点型静平台结构

静平台为点型的 3-RPR 平面并联机器人如图 12 所示。静平台简化为一个铰链点,动平台为等边三角形,边长等于 $2h$ 。动铰链点分别为 A_1 、 A_2 、 A_3 ,静铰链点为 B 。

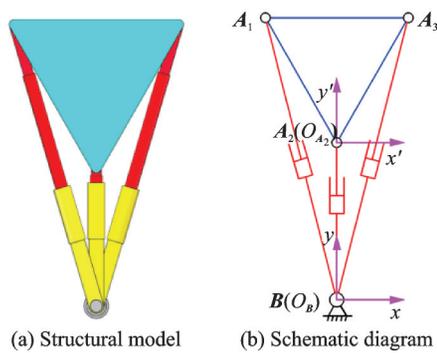


图 12 点型静平台 3-RPR 平面并联机器人

Fig.12 Point static platform of 3-RPR planar parallel robot

以 O_{A_2} 为原点建立动坐标系 $\{O_{A_2}-x'y'\}$, x' 轴平行于 A_1A_3 。以 $B(O_B)$ 为原点建立静坐标系 $\{O_B-xy\}$, x 轴正方向为水平向右。设 A_2 在静坐标系下的坐标为 $(x, y)^T$, θ 为动平台的姿态角。通过坐标变换,可得 A_1 、 A_3 在静坐标系下的坐标

$$A_1 = (x - m, y - n)^T, A_3 = (x + p, y + q)^T \quad (12)$$

式中： $m = h \cos \theta + \sqrt{3} h \sin \theta$, $n = h \sin \theta - \sqrt{3} h \cos \theta$, $p = h \cos \theta - \sqrt{3} h \sin \theta$, $q = h \sin \theta + \sqrt{3} h \cos \theta$ 。

对于这种结构,3 条驱动杆的旋转关节都集中在一个点上,机器人失去了通过驱动杆控制动平台位置的能力。动平台将不再受到驱动杆的有效约束,机器人失去了稳定性。因此机器人会处于完全 Hunt 奇异的状态。

为了验证静平台为点型的 3-RPR 平面并联机器人固有奇异位形,通过代数法^[11]推导其雅可比矩阵进行验算。对杆长约束方程的左右两边同时对时间求一阶导数,整理并化简,即可得到静平台为点型的 3-RPR 平面并联机器人的输出雅可比矩阵

$$J_2 = \begin{bmatrix} x - m & y - n & nx - my \\ x & y & 0 \\ x + p & y + q & py - qx \end{bmatrix} \quad (13)$$

对矩阵分析发现,矩阵的秩恒等于 2,即雅可比矩阵的行列式始终为 0。动平台在绕静平台的方向上始终存在一个瞬时自由度,使得控制效果和精度大幅下降,机器人无法正常工作。因此,在结构设计方面应该避免这种会使机器人一直存在奇异位形的构型。

3.2 线型静平台结构

静平台为线型的 3-RPR 平面并联机器人如图 13 所示。动平台是边长为 $2h$ 的等边三角形,相邻静铰链点的距离为 l 。以 A_1A_3 的中点 P 为原点建立动坐标系 $\{O_P-x'y'\}$, x' 轴平行于 PA_3 。以 O_{B_1} 为原点建立静坐标系 $\{O_{B_1}-xy\}$, x 轴平行于 B_1B_2 。

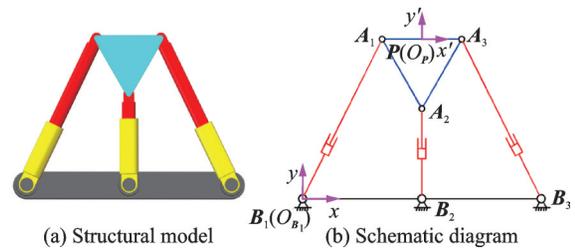


图 13 线型静平台 3-RPR 平面并联机器人

Fig.13 Linear static platform of 3-RPR planar parallel robot

P 在静坐标系下的坐标为 $(x, y)^T$, θ 为动平台的姿态角。 A_1B_1 、 A_2B_2 、 A_3B_3 在静坐标系下的方程分别为

$$Y = \frac{y - h \sin \theta}{x - h \cos \theta} X \quad (14)$$

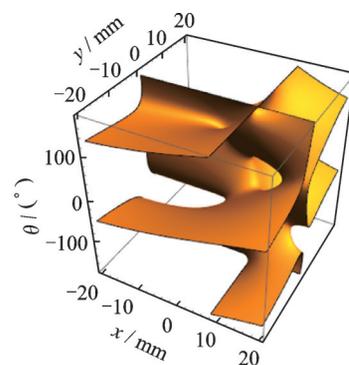
$$Y = \frac{y - \sqrt{3} h \cos \theta}{x + \sqrt{3} h \sin \theta - l} X - \frac{(y - \sqrt{3} h \cos \theta)l}{x + \sqrt{3} h \sin \theta - l} \quad (15)$$

$$Y = \frac{y + h \sin \theta}{x + h \cos \theta - 2l} X - \frac{2(y + h \sin \theta)l}{x + h \cos \theta - 2l} \quad (16)$$

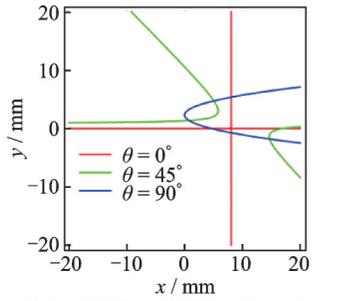
基于式(14~16),可求得机器人的 Hunt 奇异曲面方程

$$hl(\sqrt{3}(l-x)y \cos \theta - \sin \theta(\sqrt{3}y^2 - ly - \sqrt{3}h^2 + h(\sqrt{3}l+y) \cos \theta + h(l-x) \sin \theta)) = 0 \quad (17)$$

线型静平台的 Hunt 奇异曲面及轨迹如图 14 所示。由图 14(a)可以发现,当机器人的静平台为



(a) Hunt singular surface of linear static platform



(b) $\theta = 0^\circ, 45^\circ$ and 90° singular trajectory

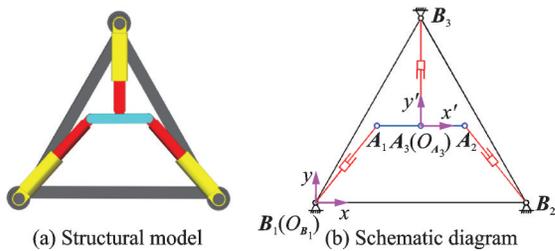
图14 线型静平台的 Hunt 奇异曲面及轨迹

Fig.14 Hunt singular surface and trajectory of linear static platform

线型时,其 Hunt 奇异曲面没有出现整个平面都为奇异曲面的情况。也就是说,该结构不存在姿态一定时,无论动平台处于何位置,都发生奇异的情况。由图 14(b)可以看出,当动平台姿态角为 0° 、 45° 、 90° 时,机器人的 Hunt 奇异轨迹分别为十字线、双曲线和抛物线。

3.3 线型动平台结构

动平台为线型的 3-RPR 平面并联机器人如图 15 所示。静平台是边长为 $2l$ 的等边三角形,相邻动铰链点的距离为 h 。以 A_3 为原点建立动坐标系 $\{O_{A_3}-x'y'\}$, x' 轴平行于 A_1A_2 。以 B_1 为原点建立静坐标系 $\{O_{B_1}-xy\}$, x 轴平行于 B_1B_2 。



(a) Structural model

(b) Schematic diagram

图 15 线型动平台 3-RPR 平面并联机器人

Fig.15 Linear moving platform of 3-RPR planar parallel robot

A_3 在静坐标系下的坐标为 $(x, y)^T$, θ 为动平台的姿态角。 A_1B_1 、 A_2B_2 、 A_3B_3 在静坐标系下的方程分别为

$$Y = \frac{y - h \sin \theta}{x - h \cos \theta} X \quad (18)$$

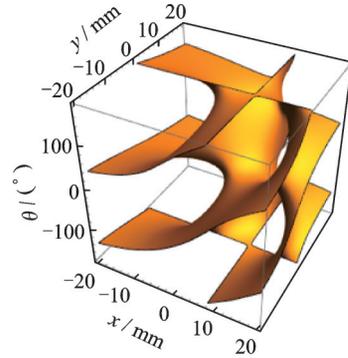
$$Y = \frac{y + h \sin \theta}{x + h \cos \theta - 2l} X - \frac{2(y + h \sin \theta)l}{x + h \cos \theta - 2l} \quad (19)$$

$$Y = \frac{y - \sqrt{3}l}{x - l} X - \frac{(y - \sqrt{3}l)l}{x - l} + \sqrt{3}l \quad (20)$$

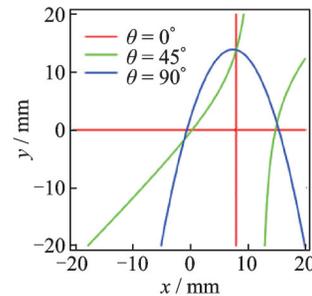
基于式(18~20),可求得该机器人的 Hunt 奇异曲面方程

$$hl(\sqrt{3} \cos \theta (y(l-x) + hl \sin \theta) + \sin \theta (\sqrt{3} x^2 - 2\sqrt{3} xl + yl - yh \cos \theta + h(x-l) \sin \theta)) = 0 \quad (21)$$

线型动平台的 Hunt 奇异曲面及轨迹如图 16 所示。由图 16 可以发现,动平台为线型与静平台为线型的 3-RPR 平面并联机器人的 Hunt 奇异曲面的形状特征类似,同样不存在整个平面都为奇异曲面的情况。并且,当动平台的姿态角为 0° 、 45° 、 90° 时,其奇异轨迹也分别为十字线、双曲线和抛物线。



(a) Hunt singular surface of linear moving platform



(b) $\theta = 0^\circ, 45^\circ$ and 90° singular trajectory

图 16 线型动平台的 Hunt 奇异曲面及轨迹

Fig.16 Hunt singular surface and trajectory of linear moving platform

4 实验验证

4.1 虚拟样机实验

给定机器人的静平台、动平台的边长分别为 1 500 和 500 mm。以图 4 的中线 Hunt 奇异为例,锁合 A_1B_1 、 A_2B_2 , 驱动 A_3B_3 。动平台线速度、角速度以及驱动杆输入速度如图 17 所示。可观察到,当

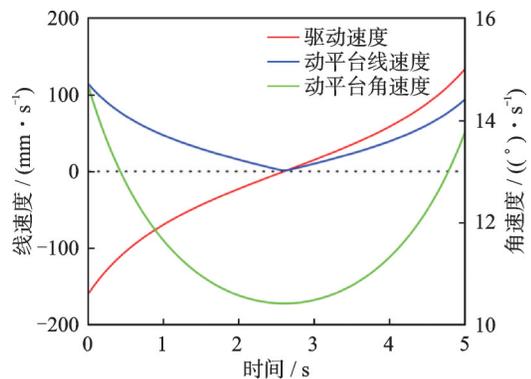


图 17 3-RPR 平面并联机器人的输入、输出速度

Fig.17 Input and output speed of 3-RPR planar parallel robot

机器人运动至奇异位形时,驱动速度和动平台线速度都为0,而动平台角速度为 $10.4122(^{\circ})/s$ 。这说明机器人发生了Hunt奇异。

4.2 实物样机实验

当机器人处于非奇异位形时,锁合机器人的3条驱动杆,拉动动平台使之旋转(图18)。可以发现,即使力高达 $40.3\text{ N}(4.110\text{ kg})$,动平台也无法转动。机器人处于稳定状态。

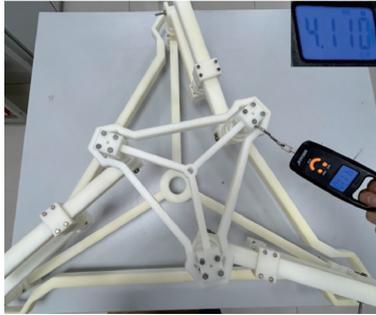
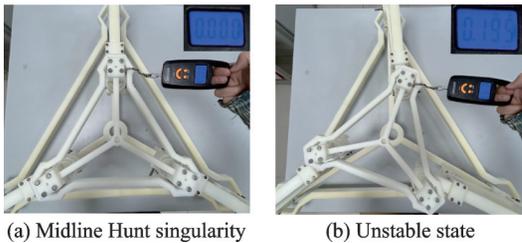


图18 非奇异位形下的拉动实验

Fig.18 Pull experiment under nonsingularity

当机器人处于Hunt奇异位形时,锁合机器人的3条驱动杆。可以发现,仅需 $1.9\text{ N}(0.195\text{ kg})$ 的力便可以使动平台旋转,见图19。



(a) Midline Hunt singularity

(b) Unstable state

图19 Hunt奇异位形下的拉动实验

Fig.19 Pull experiment under Hunt singularity

此时,机器人的输入速度为0,而输出速度不为0。也就是说,即使机器人的3条驱动杆被锁合,动平台仍具有一个绕着3条驱动杆交点的瞬时转动自由度。机器人出现“失稳”现象。

5 结 论

(1) 3-RPR平面并联机器人的3条驱动杆所在直线相交于同一点时,发生Hunt奇异。该机器人的Hunt奇异曲面方程与输出奇异曲面方程完全一致,表明两者具有相同的几何特征。

(2) 结合“Hunt奇异性判据”,运用几何法辨识出3-RPR平面并联机器人4类较常见的Hunt奇异;根据它们的几何性质,将奇异轨迹直观地在奇异曲面上刻画出来。这种方法无需复杂的雅可比矩阵计算,且几何意义明确。

(3) 对传统3-RPR平面并联机器人的几何结构进行合理的改造,可以有效改变其Hunt奇异曲

面的形状特征,从而避免机器人的奇异性。这一发现为优化并联机器人设计提供了重要的理论指导。

(4) 通过虚拟样机和实物样机的实验验证了Hunt奇异位形的存在,进一步证明了理论分析的有效性。本研究为未来少自由度并联机器人的构型综合及性能优化奠定了坚实的基础。

参考文献:

- [1] YOU J J, XI F F, SHEN H P, et al. A novel Stewart-type parallel mechanism with topological re-configuration: Design, kinematics and stiffness evaluation[J]. Mechanism and Machine Theory, 2021 (162): 104329.
- [2] YOU J J, WANG L K, XI F F, et al. Decoupling algorithm and maximum operation frequency of a novel parallel type six-axis accelerometer[J]. IEEE Sensors Journal, 2020, 20(21): 12637-12651.
- [3] 徐帅, 尤晶晶, 叶鹏达, 等. 一种可重构3-RRR平面并联机构及其工作空间分析[J]. 南京航空航天大学学报, 2022, 54(3): 466-472.
XU Shuai, YOU Jingjing, YE Pengda, et al. A reconfigurable 3-RRR planar parallel mechanism and its workspace analysis[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2022, 54(3): 466-472.
- [4] 王澍声, 尤晶晶, 黄宁宁, 等. 一种新的可重构三自由度平面并联机构的结构设计及运动学分析[J]. 南京航空航天大学学报, 2023, 55(3): 437-443.
WANG Shusheng, YOU Jingjing, HUANG Ningning, et al. Structural design and kinematic analysis of a new reconfigurable 3 DOF planar parallel mechanism [J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2023, 55(3): 437-443.
- [5] 黄宁宁, 尤晶晶, 王澍声, 等. 可重构3-RRR并联机器人的“点对点”路径规划[J]. 南京航空航天大学学报, 2024, 56(3): 415-423.
HUANG Ningning, YOU Jingjing, WANG Shusheng, et al. “Point-to-point” path planning for reconfigurable 3-RRR parallel robots[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2024, 56 (3): 415-423.
- [6] 仇鑫, 尤晶晶, 王林康, 等. Stewart衍生型并联机器人的运动雅可比矩阵推导[J]. 机械设计与研究, 2020, 36(6): 79-84.
QIU Xin, YOU Jingjing, WANG Linkang, et al. Derivation of motion Jacobian matrix of Stewart derivative parallel robot[J]. Machine Design & Research, 2020, 36(6): 79-84.
- [7] HUNT K H. Structural kinematics of in-parallel-actuated robot-arms[J]. Journal of Mechanical Design, 1983, 105(4): 705-712.
- [8] GOSSELIN C M, ANGELES J. Singularity analysis

- of closed-loop kinematic chains[J]. IEEE Transactions on Robotics and Automation, 1990, 6(3): 281-290.
- [9] GOSSELIN C M, MERLET J P. The direct kinematics of planar parallel manipulators: Special architectures and number of solutions[J]. Mechanism and Machine Theory, 1994, 29(8): 1083-1097.
- [10] KARIMI A, MASOULEH M T, CARDOU P. Avoiding the singularities of 3-RPR parallel mechanisms via dimensional synthesis and self-reconfigurability[J]. Mechanism and Machine Theory, 2016, 99: 189-206.
- [11] 叶鹏达, 尤晶晶, 仇鑫, 等. 并联机器人运动性能的研究现状及发展趋势[J]. 南京航空航天大学学报, 2020, 52(3): 363-377.
YE Pengda, YOU Jingjing, QIU Xin, et al. Status and development trend of motion performance in parallel robot[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2020, 52(3): 363-377.
- [12] SEFRIOUI J, GOSSELIN C M. Singularity analysis and representation of planar parallel manipulators[J]. Robotics and Autonomous Systems, 1992, 10(4): 209-224.
- [13] NAWRATIL G. Stewart gough platforms with non-cubic singularity surface[J]. Mechanism & Machine Theory, 2010, 45(12): 1851-1863.
- [14] CHENG S L, WU H T, WANG C Q, et al. A novel method for singularity analysis of the 6-SPS parallel mechanisms[J]. Science China Technological Sciences, 2011, 54(5): 1220-1227.
- [15] 仇鑫, 尤晶晶, 叶鹏达, 等. 9-3 Stewart型并联机器人的结构设计及奇异位形分析[J]. 机械设计, 2023, 40(5): 1-6.
QIU Xin, YOU Jingjing, YE Pengda, et al. Structure design and singular-configuration analysis of 9-3 Stewart parallel robot[J]. Journal of Machine Design, 2023, 40(5): 1-6.

(编辑:陈珺)