

DOI:10.16356/j.1005-2615.2024.06.009

## 基于 POD 方法的水下航行器振动响应快速求解

王衡<sup>1</sup>, 路宽<sup>1</sup>, 刘骏<sup>2</sup>, 童建忠<sup>2</sup>, 郑伟<sup>2</sup>, 张康宇<sup>1</sup>

(1. 西北工业大学力学与土木建筑学院, 西安 710072; 2. 沈阳飞机设计研究所, 沈阳 110035)

**摘要:** 采用本征正交分解 (Proper orthogonal decomposition, POD) 方法对具有轴承非线性的壳体-电机-转子耦合系统进行模型降阶, 以降低计算成本。针对壳体-电机-转子耦合结构采用有限元法建立起 192 自由度的转子系统模型。介绍了 POD 法的基本原理及其在壳体-电机-转子耦合系统中的具体表达。通过应用 POD 方法, 壳体-电机-转子耦合系统分别减少到 20、18 和 15 个自由度, 计算时间降低 94% 以上, 且对比了简化系统和原系统的时间历程曲线和频谱, 证明了 POD 方法的高效性和准确性。

**关键词:** 水下航行器; 非线性系统; 本征正交分解方法

中图分类号: O328

文献标志码: A

文章编号: 1005-2615(2024)06-1066-08

## Fast Solution of Underwater Vehicle Vibration Response Based on POD Method

WANG Heng<sup>1</sup>, LU Kuan<sup>1</sup>, LIU Jun<sup>2</sup>, TONG Jianzhong<sup>2</sup>, ZHENG Wei<sup>2</sup>, ZHANG Kangyu<sup>1</sup>

(1. School of Mechanics, Civil Engineering and Architecture, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China;  
2. Shenyang Institute of Aircraft Design, Shenyang 110035, China)

**Abstract:** The proper orthogonal decomposition (POD) method is used to model the shell-motor-rotor coupled system with bearing nonlinearities to reduce the computational cost. The rotor system with 192 degrees of freedom is modeled by the finite element method for the coupled shell-motor-rotor structure. The basic principle of the POD method and its specific expression in the shell-motor-rotor coupled system are introduced. By using the POD method, the shell-motor-rotor coupled system is reduced to 20, 18 and 15 degrees of freedom, and the computation time is reduced by more than 94%. The time course curves and spectra of the simplified system and the original system are compared, which verifies the efficiency and accuracy of the POD method.

**Key words:** underwater vehicle; nonlinear system; proper orthogonal decomposition (POD) method

水下航行器是中国航海事业发展不可或缺的一部分, 具有隐蔽性强的特点, 对中国的领海安全具有重要保障作用<sup>[1]</sup>。而水下航行器的动力舱段因振动产生的噪声严重影响其隐蔽性能, 因此对水下航行器的动力舱段的振动响应分析是实现水下航行器减振降噪的重要一环。水下航行器的动力舱段本质上是一个内部高速旋转的动力系统, 根据其振动的产生及传递可将其简化为壳体-电机-转

子耦合系统模型。壳体-电机-转子耦合系统的附属零部件及连接结构众多, 通常具有高维、复杂和非线性等特点<sup>[2]</sup>, 导致系统共振区域趋于复杂, 振动稳定性分析困难、参数敏感性分析效率差、响应求解计算量巨大。对实际的壳体-电机-转子耦合系统进行精确的分析是困难的, 而且计算费用极其昂贵。因此, 简化的系统模型是必要的, 以降低求解难度、缩短求解时间。

收稿日期: 2024-05-10; 修订日期: 2024-11-19

通信作者: 路宽, 男, 研究员, 博士生导师, E-mail: lukuan@nwpu.edu.cn。

引用格式: 王衡, 路宽, 刘骏, 等. 基于 POD 方法的水下航行器振动响应快速求解[J]. 南京航空航天大学学报, 2024, 56(6): 1066-1073. WANG Heng, LU Kuan, LIU Jun, et al. Fast solution of underwater vehicle vibration response based on POD method[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2024, 56(6): 1066-1073.

模型降阶是一种有效的简化模型的方法,常用的降阶方法有中心流形法<sup>[3]</sup>、Lyapunov-Schmidt (L-S)法<sup>[4]</sup>、Galerkin法<sup>[5]</sup>、本征正交分解(Proper orthogonal decomposition, POD)方法<sup>[6-10]</sup>、模态综合法<sup>[11]</sup>和其他降阶方法<sup>[12]</sup>。文献[13-16]分别对这些降阶方法在非线性动力学研究中的应用进行了总结。

POD方法是一种有效的数据分析方法,其目的是将高维空间映射到低维空间里。POD方法被广泛应用于实际工程系统的降阶问题,与其他常见的降阶方法(如模态综合法、Galerkin方法)相比,具有降阶效果好、精度高等特点<sup>[17]</sup>,更加适用于高维复杂的非线性系统模型降阶。

Lu等<sup>[18]</sup>将POD方法应用于具有典型故障的转子系统模型,提出了瞬态POD方法,并将其用于滑动轴承支撑的松动转子系统。Lu等<sup>[19]</sup>基于POD方法分析研究了具有立方非线性的单盘转子系统。比较了瞬态POD法和结构降阶法(SOR)在转子系统中的应用<sup>[20]</sup>。Jin等<sup>[21]</sup>提出了通过插值Grassmann流形方法来讨论参数域降阶的问题。Al-Shudeifat<sup>[22]</sup>等采用POD方法分析了具有裂纹故障的转子系统的响应。Lu等<sup>[23]</sup>首次将POD方法应用于研究一个类似于实际航空发动机转子的双转子轴承实验台。Pulimeno等<sup>[24]</sup>通过POD学习算法的仿真方法来求解物理问题的偏微分方程。目前用POD方法对电机-轴-壳耦合系统进行降阶的研究较少。

## 1 动力学模型及降阶方法

### 1.1 POD降阶方法

POD方法也称为Karhunen-Loeve分解(Karhunen-Loeve decomposition, KLD)、主成分分析(Principal component analysis, PCA)<sup>[25]</sup>,其基本思想是保留能量占比最大的前几阶模态,通过较少的数据量保留系统的主要信息。它的主要步骤是将通过实验或仿真得到的数值信号构造成自相关矩阵,求出自相关矩阵的特征向量,从中选取合适的特征向量作为POD模态,用以模型降阶。

$n$ 维复杂系统空间的变量为 $\mathbf{z}(\mathbf{x}, t)$ 是通过实验或数值模拟得到的,离散时间序列可表示为 $\mathbf{z}(\mathbf{x}, t_i), i=1, 2, \dots, N$ 。将该信号投影到由规范正交基 $\boldsymbol{\xi} = \{\boldsymbol{\xi}_k\}_{k=1}^n$ 所构成的空间,如式(1)所示。

$$\mathbf{z}(\mathbf{x}, t_i) = \sum_{k=1}^n u_k(t_i) \boldsymbol{\xi}_k(\mathbf{x}) \quad i=1, 2, \dots, N \quad (1)$$

这组规范正交基应满足平方范数下的最小约束条件<sup>[12]</sup>,并满足

$$\min \left\langle \left\| \mathbf{z}(\mathbf{x}, t_i) - \frac{(\mathbf{z}, \boldsymbol{\xi})}{(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi})} \boldsymbol{\xi} \right\| \right\rangle \quad \|\boldsymbol{\xi}\|^2 = 1 \quad (2)$$

上述所需的正交基可以通过拉格朗日乘子来计算。拉格朗日函数定义为<sup>[10]</sup>

$$J[\boldsymbol{\xi}] = \left\langle \|\mathbf{z}, \boldsymbol{\xi}\|^2 \right\rangle - \lambda \left( \|\boldsymbol{\xi}\|^2 - 1 \right) \quad (3)$$

式中 $\lambda$ 为拉格朗日乘子。设 $\delta J=0$ ,可以用变分法求出式(3)的极值。

$$\int \langle \mathbf{z}(x) \mathbf{z}(x') \rangle \boldsymbol{\xi}(x') dx' = \lambda \boldsymbol{\xi}(x) \quad (4)$$

式(4)为第二类Fredholm方程,其核心是自相关函数: $R(x, x') = \langle \mathbf{z}(x) \mathbf{z}(x') \rangle$ 。特征值 $\lambda$ 是特征向量的固有正交值(Proper orthogonal value, POV),表示特征向量所占能量。满足式(4)的正交基,是本征正交模态(Proper orthogonal mode, POM),也是下面自相关矩阵 $R$ 的特征向量,这可以在文献[26]中证明。

$$\mathbf{R} = \frac{1}{N} [\mathbf{z}^T \mathbf{z}]_{n \times n} \quad (5)$$

式中 $N$ 表示样本数。高维复杂系统在采样时间内的位形空间变量可以通过将原始系统投影到由对应于具有最小阶数 $m$ 的前几个大特征值的特征向量所构成的子空间上来计算<sup>[13]</sup>。

$$\mathbf{z}(x, t_i) \approx \sum_{k=1}^m u_k(t_i) \boldsymbol{\xi}_k(x) \quad (6)$$

$$i=1, 2, \dots, N; m \ll n$$

### 1.2 POD降阶方法在动力学系统中的应用

高维复杂系统的动力学方程通常可以表示为

$$\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} = \mathbf{F}(t, \mathbf{X}) \quad (7)$$

式中 $\mathbf{X}$ 、 $\mathbf{K}$ 、 $\mathbf{C}$ 、 $\mathbf{F}$ 分别为位移向量、等效刚度矩阵、等效阻尼矩阵以及与时间和位移对应的非线性函数。

在给定的初始条件下,对每一个自由度 $x_1(t)$ 、 $x_2(t)$ 、 $\dots$ 、 $x_n(t)$ ,都有瞬态位移响应, $n$ 为系统的总自由度。第 $i$ 个自由度的瞬态位移响应表示为 $\mathbf{x}_i = [x_i(t_1), x_i(t_2), \dots, x_i(t_N)]^T, i=1, 2, \dots, n$ ,其中 $N$ 个时间序列以等间隔采样。这样就获得了 $N \times n$ 信号矩阵 $\mathbf{X}$ ,并表示为

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1(t_1) & x_2(t_1) & \dots & x_n(t_1) \\ x_1(t_2) & x_2(t_2) & \dots & x_n(t_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1(t_N) & x_2(t_N) & \dots & x_n(t_N) \end{bmatrix} \quad (8)$$

构建 $\mathbf{X}$ 的自相关矩阵 $\mathbf{T} = \mathbf{X}^T \mathbf{X}$ ,并求出其特征值和特征向量,特征值和相应的特征向量可表示为 $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n \geq 0$ 和 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \dots, \boldsymbol{\xi}_n$ 。

取前 $m$ 个特征值所对应的特征向量,并构造成矩阵 $\mathbf{Q} = [\boldsymbol{\xi}_1 \ \boldsymbol{\xi}_2 \ \dots \ \boldsymbol{\xi}_m]$ , $\mathbf{Q}^T \mathbf{Q}$ 是一个 $m \times m$ 对角满秩矩阵,其对角元素不为零。令 $\mathbf{X} = \mathbf{Q}\mathbf{Z}$ ,可以得到

$$\mathbf{Q}\ddot{\mathbf{Z}} + \mathbf{C}\mathbf{Q}\dot{\mathbf{Z}} + \mathbf{K}\mathbf{Q}\mathbf{Z} = \mathbf{F}(t, \mathbf{Q}\mathbf{Z}) \quad (9)$$

等式(9)乘以 $(\mathbf{Q}^T \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{Q}^T$ ,并简化为

$$\begin{aligned} & (Q^T Q)^{-1} Q^T Q \ddot{Z} + (Q^T Q)^{-1} Q^T C Q \dot{Z} + \\ & (Q^T Q)^{-1} Q^T K Q Z = (Q^T Q)^{-1} Q^T F(t, QZ) \end{aligned} \quad (10)$$

等式(7)可以写为

$$\ddot{Z} + C_m \dot{Z} + K_m Z = F_m \quad (11)$$

式中  $C_m = (Q^T Q)^{-1} Q^T C Q$ ,  $K_m = (Q^T Q)^{-1} Q^T K$ ,  $F_m = (Q^T Q)^{-1} Q^T F(t, QZ)$ 。这样就得到了  $m$  维降阶系统。

### 1.3 有限元模型

本节采用有限元法(Finite element method, FEM)建立了壳体-电机-转子耦合系统模型。如图1所示,壳体-电机-转子耦合系统包括壳体、电机、轴承、法兰盘、重锤,外部为耐压壳体,将其处理为圆柱形空心梁,内部为推进轴系将其简化为实心梁,通过激振器模拟外界激励。

本文将壳体及推进轴系使用 Timoskenko 梁模型进行模型建立,  $E$  为弹性模量,  $G$  为剪切模量,  $\nu$  为泊松比,  $d$  为内径,  $L$  为单位长度。将推进轴系沿轴向均分为4个单元(共5个节点),每个单元节点上具有沿直径水平方向和沿直径垂直方向的平移和绕其转角共4个自由度;将壳体沿轴向均分为29个单元(共30个节点),每个单元节点具有沿直径

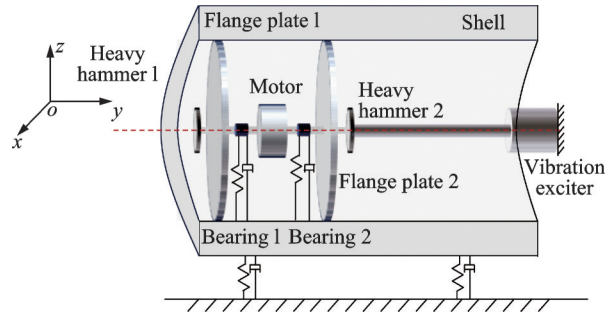


图1 壳体-电机-转子耦合系统结构模型图

Fig.1 Structural model diagram of shell-motor-rotor coupled system

水平和垂直方向的平移和绕其转角共5个自由度,轴承单元节点具有沿直径水平方向和垂直方向的平移2个自由度。推导壳体-电机-转子耦合系统的动力学微分方程,可表示为

$$(M_{te_i} + M_{re_i}) \ddot{q}_{e_i} - \omega G_{e_i} \dot{q}_{e_i} + K_{e_i} q_{e_i} = F_{e_i} \quad (12)$$

式中:  $q_{e_i} = [x_i, y_i, \theta_{x_i}, \theta_{y_i}, x_{i+1}, y_{i+1}, \theta_{x_{i+1}}, \theta_{y_{i+1}}]^T$ , 为第  $i$  个广义坐标,  $M_{te_i}$  和  $M_{re_i}$  代表单元质量矩阵和惯性矩阵,  $G_{e_i}$  代表单元陀螺矩阵,  $K_{e_i}$  代表单元刚度矩阵,  $F_{e_i}$  代表单元的广义外力矩阵,  $\omega$  为转速。

单元质量矩阵为

$$M_{te_i} = \frac{\rho A L}{(1 + \phi_s)^2} \times \begin{bmatrix} M_{t1} & 0 & 0 & M_{t4} & M_{t3} & 0 & 0 & -M_{t5} \\ 0 & M_{t1} & -M_{t4} & 0 & 0 & M_{t3} & M_{t5} & 0 \\ 0 & -M_{t4} & M_{t2} & 0 & 0 & -M_{t5} & M_{t6} & 0 \\ M_{t4} & 0 & 0 & M_{t2} & M_{t5} & 0 & 0 & M_{t6} \\ M_{t3} & 0 & 0 & M_{t5} & M_{t1} & 0 & 0 & -M_{t4} \\ 0 & M_{t3} & -M_{t5} & 0 & 0 & M_{t1} & M_{t4} & 0 \\ 0 & M_{t5} & M_{t6} & 0 & 0 & M_{t4} & M_{t2} & 0 \\ -M_{t5} & 0 & 0 & M_{t6} & -M_{t4} & 0 & 0 & M_{t2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{式中: } M_{t1} &= \frac{13}{35} + \left(\frac{7}{10}\right)\phi_s + \left(\frac{1}{3}\right)\phi_s^2, \quad M_{t2} = M_{t5} = \left(\frac{13}{420} + \left(\frac{3}{40}\right)\phi_s + \left(\frac{1}{24}\right)\phi_s^2\right)L, \quad M_{t6} = -\left(\frac{1}{140} + \left(\frac{1}{105} + \left(\frac{1}{60}\right)\phi_s + \left(\frac{1}{120}\right)\phi_s^2\right)L^2, \right. \\ M_{t3} &= \frac{9}{10} + \left(\frac{3}{10}\right)\phi_s + \left(\frac{1}{6}\right)\phi_s^2, \quad M_{t4} = \left(\frac{11}{210} + \left(\frac{11}{120}\right)\phi_s + \left(\frac{1}{24}\right)\phi_s^2\right)L, \\ & \left. M_{t5} = \left(\frac{1}{60}\right)\phi_s + \left(\frac{1}{120}\right)\phi_s^2\right)L^2. \end{aligned}$$

单元惯性矩阵为

$$M_{re_i} = \frac{\rho I L}{(1 + \phi_s)^2} \times \begin{bmatrix} M_{r1} & 0 & 0 & M_{r4} & -M_{r1} & 0 & 0 & M_{r4} \\ 0 & M_{r1} & -M_{r4} & 0 & 0 & -M_{r1} & -M_{r4} & 0 \\ 0 & -M_{r4} & M_{r2} & 0 & 0 & M_{r4} & M_{r3} & 0 \\ M_{r4} & 0 & 0 & M_{r2} & -M_{r4} & 0 & 0 & M_{r3} \\ -M_{r1} & 0 & 0 & -M_{r4} & M_{r1} & 0 & 0 & -M_{r4} \\ 0 & -M_{r1} & M_{r4} & 0 & 0 & M_{r1} & M_{r4} & 0 \\ 0 & -M_{r4} & M_{r3} & 0 & 0 & M_{r4} & M_{r2} & 0 \\ -M_{r4} & 0 & 0 & M_{r3} & -M_{r4} & 0 & 0 & M_{r2} \end{bmatrix}$$

$$\text{式中: } M_{r1} = \frac{6}{5}, M_{r2} = \left(\frac{2}{15} + \left(\frac{1}{6}\right)\phi_s + \left(\frac{1}{3}\right)\phi_s^2\right)L^2, \quad M_{r4} = \left(\frac{1}{10} - \left(\frac{1}{2}\right)\phi_s\right)L^2,$$

$$M_{r3} = \left(-\frac{1}{30} - \left(\frac{1}{6}\right)\phi_s + \left(\frac{1}{6}\right)\phi_s^2\right)L^2,$$

单元陀螺矩阵为

$$G_{e_i} = \frac{\rho I}{15L(1 + \phi_s)^2} \times \begin{bmatrix} 0 & -G_1 & G_2 & 0 & 0 & G_1 & G_2 & 0 \\ G_1 & 0 & 0 & G_2 & -G_1 & 0 & 0 & G_2 \\ -G_2 & 0 & 0 & -G_4 & G_2 & 0 & 0 & G_3 \\ 0 & -G_2 & G_4 & 0 & 0 & G_2 & -G_3 & 0 \\ 0 & G_1 & -G_2 & 0 & 0 & -G_1 & -G_2 & 0 \\ -G_1 & 0 & 0 & -G_2 & G_1 & 0 & 0 & -G_2 \\ -G_2 & 0 & 0 & G_3 & G_2 & 0 & 0 & -G_4 \\ 0 & -G_2 & -G_3 & 0 & 0 & G_2 & G_4 & 0 \end{bmatrix}$$

式中： $G_1=36, G_2=3L-15L\phi_s, G_3=L^2+5L^2\phi_s-15L^2\phi_s^2, G_4=4L^2+5L^2\phi_s+10L^2\phi_s^2$  单元刚度矩阵为

$$K_{e_i} = \frac{\rho I}{L^3(1 + \phi_s)} \times \begin{bmatrix} K_1 & 0 & 0 & K_4 & -K_1 & 0 & 0 & K_4 \\ 0 & K_1 & -K_4 & 0 & 0 & -K_1 & -K_4 & 0 \\ 0 & -K_4 & K_2 & 0 & 0 & K_4 & K_3 & 0 \\ K_4 & 0 & 0 & K_2 & -K_4 & 0 & 0 & K_3 \\ -K_1 & 0 & 0 & -K_4 & K_1 & 0 & 0 & -K_4 \\ 0 & -K_1 & K_4 & 0 & 0 & K_1 & K_4 & 0 \\ 0 & -K_4 & K_3 & 0 & 0 & K_4 & K_2 & 0 \\ -K_4 & 0 & 0 & K_3 & -K_4 & 0 & 0 & K_2 \end{bmatrix}$$

式中： $K_1=12, K_2=(4 + \phi_s)L^2, K_3=(2 - \phi_s)L^2, K_4=6L$ 。

将重锤等效为偏心圆盘,考虑圆盘相对于固定坐标系的自由度为  $q_d=[x_d, y_d, \theta_{x_d}, \theta_{y_d}]$ ,  $m, J_d$  和  $J_p$

分别为圆盘的质量、转动惯量和极惯性矩。法兰盘等效为均质圆盘,通过螺栓与壳体连接,考虑其对于壳体刚度的影响,  $m_p$  为法兰盘的质量,  $k_p$  为螺栓刚度。

圆盘的动力学方程可由拉格朗日方程得到

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_d \\ \dot{y}_d \\ \dot{\theta}_{x_d} \\ \dot{\theta}_{y_d} \end{bmatrix} - \omega \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -J_p \\ 0 & 0 & J_p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_d \\ \dot{y}_d \\ \dot{\theta}_{x_d} \\ \dot{\theta}_{y_d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{x_d} \\ F_{y_d} \\ M_{\theta_{x_d}} \\ M_{\theta_{y_d}} \end{bmatrix} \quad (13)$$

将各壳体和转子单元轴段、重锤、法兰盘的动力学方程结合起来,假设阻尼成比例,可得到转子系统的动力学方程

$$M_s \ddot{u}_s + (C_s - \omega G_s) \dot{u}_s + K_s u_s = F \quad (14)$$

式中： $M_s, K_s, C_s$  和  $G_s$  分别为壳体、电机、法兰盘、重锤耦合的总质量、刚度、阻尼和陀螺矩阵； $C_s = \alpha_0 M_s + \alpha_1 K_s$ ,  $\alpha_0$  和  $\alpha_1$  是可以过实验得到的常数；各节点处受力主要包括平均分配到各节点的重力  $F_g$ 、重锤和电机产生的偏心力  $F_e$ 、轴承的赫兹接触力  $F_b$ 、金属橡胶的非线性支撑力和外界激励  $F_r$ 。偏心力大小表示为

$$F_e = [m_{p_1} e_{p_1} \dot{\theta}^2 \cos \theta \quad m_{p_1} e_{p_1} \dot{\theta}^2 \sin \theta \quad m_{p_2} e_{p_2} \dot{\theta}^2 \cos \theta \quad m_{p_2} e_{p_2} \dot{\theta}^2 \sin \theta \quad \dots \quad m_{m_1} e_{m_1} \dot{\theta}^2 \cos \theta \quad m_{m_1} e_{m_1} \dot{\theta}^2 \sin \theta \quad m_{m_2} e_{m_2} \dot{\theta}^2 \cos \theta \quad m_{m_2} e_{m_2} \dot{\theta}^2 \sin \theta \quad \dots]^T \quad (15)$$

式中： $m_p, e_p$  分别为各重锤的质量和偏心距； $m_m, e_m$  分别为各电机的质量和偏心距。

滚珠轴承的赫兹接触力如下

$$\begin{bmatrix} F_{bx_i} \\ F_{by_j} \end{bmatrix} = C_{b_i} \sum_{j=1}^{N_{b_i}} H(\delta_{ij}) \delta_{ij}^n \begin{bmatrix} \cos \theta_{ij} \\ \sin \theta_{ij} \end{bmatrix} \quad (16)$$

式中： $\theta_{ij}$  为第  $i$  个轴承与第  $j$  个滚动体的瞬时角； $\delta_{ij}$

为第  $i$  个轴承与第  $j$  个滚动体之间的接触变形； $n$  为赫兹接触非线性（滚珠轴承  $n=3/2$ , 滚棒轴承  $n=10/9$ ）； $H(\delta_{ij})$  为轴承的 Heaviside 函数<sup>[27]</sup>； $C_{b_i}, N_{b_i}, G_i$  分别为赫兹接触刚度系数、滚子个数和轴承的径向间隙。

## 2 结果讨论

基于第 1 节中内容建立起壳体-电机-转子耦合模型的动力学微分方程,系统结构参数来源于项目:典型舱段振动源模拟试验平台设计。其中,推进轴系和电机结构参数在表 1 中列出,壳体、法兰盘、重锤和螺栓参数在表 2 列出。使用 Runge-Kutta 方法求解系统振动微分方程;使用 POD 方法将原始系统(192 个自由度)分别缩减至 15、18 和 20 个自由度。表 3 展示了 3 个简化系统与原始系统的相对误差。对比了 3 个简化模型与原始模型在径向垂直方向和径向水平方向上的时间历程曲线和频谱。

图 2 是不同电机转速下含有非线性轴承的壳体竖直( $z$ )方向平衡状态下的响应分岔图,从图中可以看出,响应曲线整体分布在竖直( $z$ )方向的负区域内,此现象是由于系统的振动响应信号整体小于受重力影响造成。在低转速下,系统响应较小,随着转速的升高响应逐步增大,且增速逐渐增大。



表1 推进轴系的结构参数

Table 1 Structural parameters of the propulsion shaft system

参数	数值
电机质量 $m_r/\text{kg}$	189
轴承座水平方向质量 $m_{b1}/\text{kg}$	0.5
轴承座竖直方向质量 $m_{b2}/\text{kg}$	0.5
轴弹性模量 $E_z/\text{Pa}$	21
轴密度 $\rho_1/(\text{kg}\cdot\text{m}^{-3})$	7 850
轴泊松比	0.3
轴半径 $d_r/\text{cm}$	0.958
轴系长度 $l_r/\text{m}$	0.26
轴承座水平方向刚度 $k_1/(\text{N}\cdot\text{m}^{-1})$	$8.4\times 10^7$
轴承座竖直方向刚度 $k_2/(\text{N}\cdot\text{m}^{-1})$	$8.4\times 10^7$

表2 壳体及零部件的结构参数

Table 2 Structural parameters of housings and components

参数	数值
壳体密度 $\rho_2/\text{kg}/\text{m}^3$	2 730
壳体弹性模量 $E_k/\text{GPa}$	72
壳体长度 $l_k/\text{m}$	0.96 5
壳体内半径 $r_k/\text{m}$	0.25 7
壳体半壁厚 $b_k/\text{cm}$	10.0
壳体阻尼比	0.1
法兰盘1质量 $m_{n1}/\text{kg}$	3.6
法兰盘2质量 $m_{n2}/\text{kg}$	3.6
重锤单元质量 $m/\text{kg}$	0.68 4
重锤单元转动惯量 $J/\text{Pa}$	7.23
螺栓弹性模量 $E/P_n$	210
螺栓预紧力 $f_p/\text{N}$	200

在10~30 Hz处系统的运动状态较为复杂。因此，选取55 Hz作为仿真过程中电机的转速。

表3 原始模型与简化模型相对误差

Table 3 Relative errors between the original model and the simplified model

自由度	时间/s	缩减时间/%	误差/%
192	6 763.83	—	—
15	293.67	95.7	5.41
18	314.83	95.3	1.32
20	393.83	94.2	0.037 4

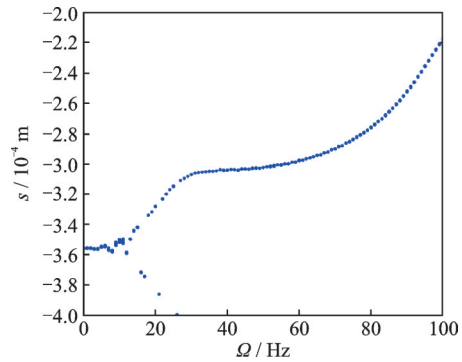


图2 壳体竖直(z)方向平衡状态下的响应分岔图

Fig.2 Bifurcation plot of response in equilibrium in the vertical (z) direction of shell

2.1 15自由度简化系统

用POD法将原系统由192个自由度缩减至15个自由度，计算时间由原系统的6 763.83 s降低至293.67 s，降低95.7%，与原系统相比，其最大误差为5.41%。如图3所示，在垂直方向和水平方向的时程曲线误差较大，简化系统舍弃信息较多。在描述原系统的动力学行为时，在15自由度简化后的频谱中，频率成分保留了下来，15自由度简化系统

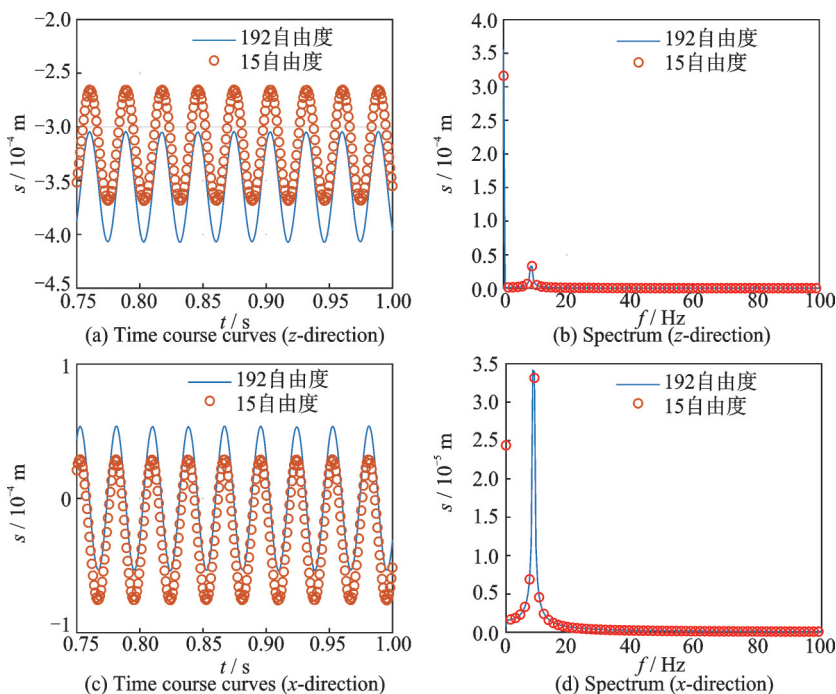


图3 原系统和15自由度简化系统时间历程曲线和频谱对比

Fig.3 Comparison of time course curves and spectra of the original system and the simplified 15-degree-of-freedom system

的主频率幅值与原系统不具有较好的一致性。15 自由度降维系统在时域保留原系统的信息不够详细,在频域上保留的信息较为详细。因此,15 自由度简化系统不具有足够的精度来取代原始系统,但当不考虑原系统的复杂动力学行为时,15 自由度简化系统在频域上可以取代原系统。

### 2.2 18 自由度简化系统

用POD法将原系统降为18自由度,计算时间由原系统的 6 763.83 s 降低至 314.83 s,降低

95.3%,与原系统相比,其最大误差为 1.32%。如图 4 所示,18 自由度的简化系统在垂直方向和水平方向的时程曲线误差均较小。在描述原系统的动力学行为时,18 自由度简化后的频谱中,频率成分保留了下来。18 自由度简化系统的主频率幅值与原系统有较好的一致性。总之,18 自由度降维系统在时域和频域上保留了原系统的大部分信息。因此,具有充分精度的 18 自由度简化系统可取代原始系统。

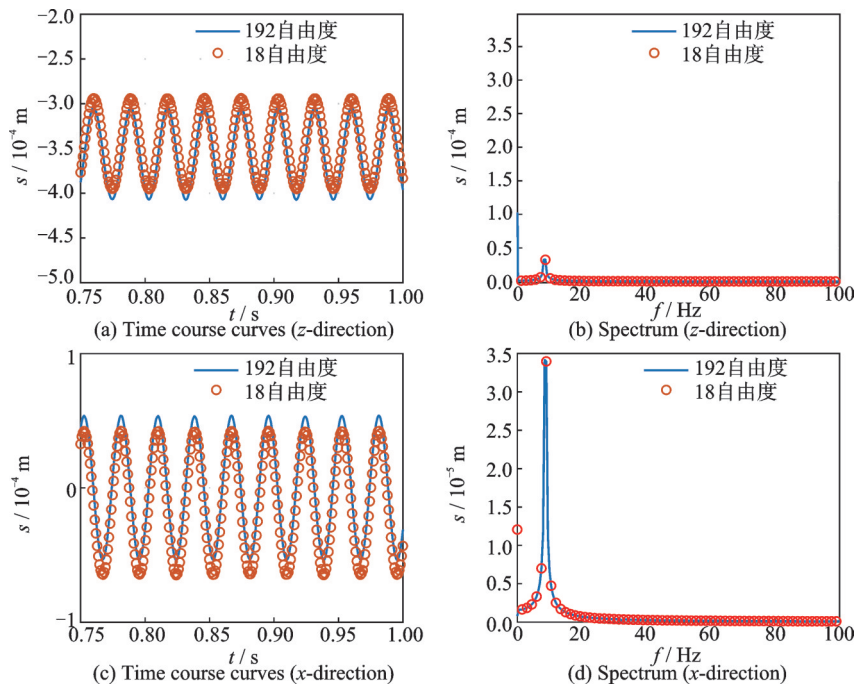


图 4 原系统和 18 自由度简化系统时间历程曲线和频谱对比

Fig.4 Comparison of time course curves and spectra of the original system and the simplified 18-degree-of-freedom system

### 2.3 20 自由度简化系统

用POD法将原系统降为20自由度,时间由原

系统的 6 763.83 s 降低至 393.83 s,降低 94.2%,与原系统相比,其最大误差为 0.037 4%。如图 5 所

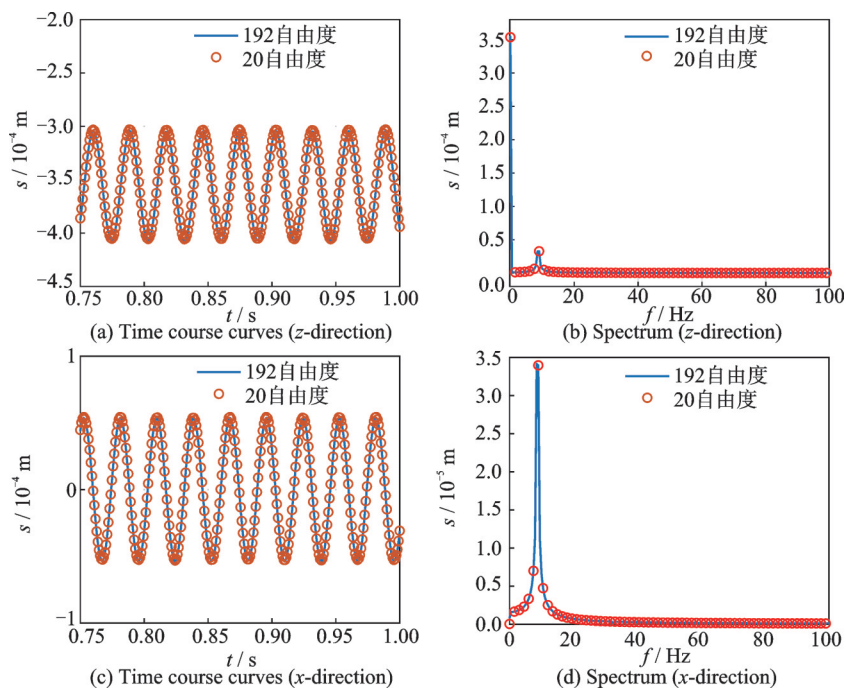


图 5 原系统和 20 自由度简化系统时间历程曲线和频谱对比

Fig.5 Comparison of time course curves and spectra between the original system and the simplified 20-degree-of-freedom system

示,在垂直方向的时间历程曲线误差很小,在水平方向的时间历程曲线误差也很小。

在描述原系统的动力学行为时,20自由度简化后的频谱中,频率成分保留了下来。20自由度简化系统的主频率幅值与原系统有很好的—致性。因此,20自由度的简化系统具有足够的精度以取代原系统。对比文献[28]使用模态综合法简化双转子系统的误差为0.1%,使用POD方法具有更高的精确性,可以更好地反映原系统的信息。

### 3 结 论

POD方法已成功地应用于壳体-电机-转子耦合系统。通过POD方法将原系统分别减少到20、18和15个自由度。POD方法对计算成本的降低十分明显,对比了原系统和简化系统的时间历程曲线、频谱系统已经验证了POD方法的准确性。20自由度和18自由度的简化系统能够准确地代替原系统,而15自由度的简化系统不能够准确地反映原系统复杂的动力学行为。

#### 参考文献:

- [1] 刘喜燕,罗凯,袁绪龙,等.扩张尾裙对跨介质飞行器高速入水转平弹道特性影响[J].力学学报,2023,55(2):343-354.  
LIU Xiyan, LUO Kai, YUAN Xulong, et al. Influence of expansion stems on the flattening trajectory characteristics of a transmedia vehicle during high speed water entry[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2023, 55(2): 343-354.
- [2] WAGNER M B, YOUNAN A, ALLAIRE P, et al. Model reduction methods for rotor dynamic analysis: A survey and review[J]. International Journal of Rotating Machinery, 2010, 2010: 273716.
- [3] ALHO A, UGGLA C. Global dynamics and inflationary center manifold and slow-roll approximants[J]. Journal of Mathematical Physics, 2015, 56(1): 012502.
- [4] NIKOLIĆ M, RAJKOVIĆ M. Bifurcations in nonlinear models of fluid-conveying pipes supported at both ends[J]. Journal of Fluids and Structures, 2006, 22(2): 173-195.
- [5] MARION M, TEMAM R. Nonlinear Galerkin methods[J]. SIAM Journal of Numerical Analysis, 1989; 26(5): 1139-1157.
- [6] LIANG Y C, LEE H P, LIM S P, et al. Proper orthogonal decomposition and its applications —Part I: Theory[J]. Journal of Sound and Vibration, 2002, 252(3): 527-544.
- [7] CHEN G, QI B J, HU W P, et al. A fast POD prediction method for hydrogen leakage at different pressures[J]. International Journal of Hydrogen Energy, 2024, 49: 1391-1404.
- [8] KERSCHEN G, GOLINVAL J C, VAKAKIS A F, et al. The method of proper orthogonal decomposition for dynamical characterization and order reduction of mechanical systems: An overview[J]. Nonlinear Dynamics, 2005, 41(1): 147-169.
- [9] MIN G Y, JIANG N B. Flow fields prediction for data-driven model of parallel twin cylinders based on POD-RBFNN and POD-BPNN surrogate models[J]. Annals of Nuclear Energy, 2024, 199: 110342.
- [10] LU K, CHEN Y S, JIN Y L, et al. Application of the transient proper orthogonal decomposition method for order reduction of rotor systems with faults[J]. Nonlinear Dynamics, 2016, 86(3): 1913-1926.
- [11] YANG T R, MA H, QIN Z Y, et al. Coupling vibration characteristics of the shaft-disk-drum rotor system with bolted joints[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2022, 169: 108747.
- [12] KAPER H G, KAPER T J. Asymptotic analysis of two reduction methods for systems of chemical reactions[J]. Physica D: Nonlinear Phenomena, 2002, 165(1/2): 66-93.
- [13] WILLCOX K, PERAIRE J. Balanced model reduction via the proper orthogonal decomposition[J]. AIAA Journal, 2002, 40: 2323-2330.
- [14] LU K, JIN Y L, CHEN Y S, et al. Review for order reduction based on proper orthogonal decomposition and outlooks of applications in mechanical systems[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2019, 123: 264-297.
- [15] REGA G, TROGER H. Dimension reduction of dynamical systems: Methods, models, applications[J]. Nonlinear Dynamics, 2005, 41(1/2/3): 1-15.
- [16] WAGNER M B, YOUNAN A, ALLAIRE P, et al. Model reduction methods for rotor dynamic analysis: A survey and review[J]. International Journal of Rotating Machinery, 2010, 2010: 273716.
- [17] 可钊,时永鑫,张鹏,等.基于全局POD降阶模型的复杂薄壁结构减振优化[J].航空学报,2023,44(13):227900.  
KE Zhao, SHI Yongxin, ZHANG Peng, et al. Vibration reduction optimization of complex thin-walled structures based on global POD reduced-order model [J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2023, 44(13): 227900.
- [18] LU K, YU H, CHEN Y S, et al. A modified nonlinear POD method for order reduction based on transient time series[J]. Nonlinear Dynamics, 2015, 79(2): 1195-1206.

- [19] LU K, CHEN Y S, CAO Q J, et al. Bifurcation analysis of reduced rotor model based on nonlinear transient POD method[J]. *International Journal of Non-linear Mechanics*, 2017, 89: 83-92.
- [20] LU K, LU Z Y, CHEN Y S. Comparative study of two order reduction methods for high-dimensional rotor systems[J]. *International Journal of Non-linear Mechanics*, 2018, 106: 330-334.
- [21] JIN Y L, LU K, HOU L, et al. An adaptive proper orthogonal decomposition method for model order reduction of multi-disc rotor system[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2017, 411: 210-231.
- [22] AL-SHUDEIFAT M A, AL MEHAIRI A, SAEED A S, et al. Application of the proper orthogonal decomposition method for cracked rotors[J]. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 2018, 13(11): 111006.
- [23] LU K, JIN Y L, HUANG P F, et al. The applications of POD method in dual rotor-bearing systems with coupling misalignment[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2021, 150: 107236.
- [24] PULIMENO A, COATES-FARLEY G, VERES-KO M, et al. Physics-driven proper orthogonal decomposition: A simulation methodology for partial differential equations[J]. *MethodsX*, 2023, 10: 102204.
- [25] LU K, GUO D, CHENG H, et al. Dynamic response analysis of a double-disc rotor system with rolling bearings based on POD method[J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2024, 158: 104569.
- [26] YANG Y F, WU Q Y, WANG Y L, et al. Dynamic characteristics of cracked uncertain hollow-shaft[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2019, 124: 36-48.
- [27] ZHANG K Y, LU K, GU X H, et al. Dynamic behavior analysis and stability control of tethered satellite formation deployment[J]. *Sensors*, 2021, 22(1): 62.
- [28] 杨喜关, 罗贵火, 原鹏, 等. 模态综合法在双转子系统建模中的应用与验证[J]. *机械科学与技术*, 2014, 33(10): 1450-1454.
- YANG Xiguan, LUO Guihuo, YUAN Peng, et al. Application and verification of the modal synthesis method in dual-rotor system modeling[J]. *Mechanical Science and Technology for Aerospace Engineering*, 2014, 33(10): 1450-1454.

(编辑:胥橙庭)