

DOI:10.16356/j.1005-2615.2024.05.019

零耦合度 Stewart 型并联机器人的位置正解个数

闻王虎¹, 尤晶晶^{1,2}, 叶鹏达³, 黄宁宁¹, 张毅¹, 李成刚⁴

(1. 南京林业大学机械电子工程学院, 南京 210037; 2. 重庆大学高端装备机械传动全国重点实验室, 重庆 400044; 3. 常州大学机械与轨道交通学院, 常州 213164; 4. 南京航空航天大学机电学院, 南京 210016)

摘要: 一般六自由度并联机构的位置正解是继空间 7R(R:转动副)机构位移分析完成后的又一机构学难题, 目前数学上尚无完备的解析求解方法。以零耦合度的“3-2-1”式 Stewart 型并联机器人为例, 研究了位置正解的个数, 并分析了正解个数发生变化的条件。首先, 基于杆长约束方程并运用四面体原理, 解析推导了机器人位置正解的全部 8 组解。其次, 通过分析动球铰的位置特性, 挖掘出正解方程分别为 8 组、4 组、2 组、1 组解析解时, 所需满足的数学条件。接着, 根据静球铰位置特性并结合正解算法流程, 研究了影响正解方程实数解个数的因素。最后, 剖析了并联机器人位置正解个数与 Hunt 奇异之间的内在联系。研究结论为并联机器人的实时控制和轨迹规划奠定了理论基础。

关键词: 并联机器人; 位置正解; 四面体; 解析解; 奇异性

中图分类号: TH112 **文献标志码:** A **文章编号:** 1005-2615(2024)05-0960-08

The Number of Forward Position Solutions for Zero Coupling Stewart-Type Parallel Robot

WEN Wanghu¹, YOU Jingjing^{1,2}, YE Pengda³, HUANG Ningning¹, ZHANG Yi¹, LI Chenggang⁴

(1. College of Mechanical and Electronic Engineering, Nanjing Forestry University, Nanjing 210037, China; 2. State Key Laboratory of Mechanical Transmission for Advanced Equipment, Chongqing University, Chongqing 400044, China; 3. School of Mechanical and Rail Transit, Changzhou University, Changzhou 213164, China; 4. College of Mechanical and Electrical Engineering, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing 210016, China)

Abstract: The forward kinematics of a general six-degree-of-freedom parallel mechanism is a significant challenge in mechanism theory, following the displacement analysis of spatial 7R (R: revolute joint) mechanisms. Currently, there is no comprehensive analytical solution available. Using the zero-coupling “3-2-1” Stewart-type parallel robot as an example, this study investigates the number of solutions for the forward kinematics and analyzes the conditions under which the number of solutions varies. First, based on the rod length constraint equations and applying the tetrahedron principle, all eight sets of solutions for the robot’s forward kinematics are analytically derived. Then, by examining the positional characteristics of the moving spherical joints, the mathematical conditions required for the solution equations to yield 8, 4, 2, or 1 analytical solutions are identified. Furthermore, by considering the positional characteristics of the fixed spherical joints and integrating the forward kinematics algorithm, the factors influencing the number of real solutions are explored. Finally, the intrinsic relationship between the number of solutions to the forward

基金项目: 国家自然科学基金(51405237); 高端装备机械传动全国重点实验室开放基金(SKLMT-MSKFKT-202330)。

收稿日期: 2024-05-31; **修订日期:** 2024-09-01

通信作者: 尤晶晶, 男, 博士, 副教授, 硕士生导师, E-mail: youjingjing251010@126.com。

引用格式: 闻王虎, 尤晶晶, 叶鹏达, 等. 零耦合度 Stewart 型并联机器人的位置正解个数[J]. 南京航空航天大学学报, 2024, 56(5): 960-967. WEN Wanghu, YOU Jingjing, YE Pengda, et al. The number of forward position solutions for zero coupling stewart-type parallel robot[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2024, 56(5): 960-967.

kinematics of the parallel robot and Hunt's singularities is analyzed. The findings of this research provide a theoretical foundation for the real-time control and trajectory planning of parallel robots.

Key words: parallel robot; forward position solution; tetrahedron; analytical solution; singularity

并联机构具有刚度大、精度高和结构紧凑等优良性能^[1],受到国内外学者的关注。其中,Stewart 型并联机器人在装配生产线^[2]、飞行模拟器^[3]和六维加速度传感器^[4]等领域应用前景广阔。并联机器人的运动学正解(也称为位置正解)是指根据驱动输入位移来计算动平台的输出位置和姿态,其数学本质是求解多元非线性代数方程组。

一般拓扑结构六自由度并联机器人的位置正解问题被喻为是空间机构运动分析中继 7R(R:转动副)机构位移分析后的又一座“珠穆朗玛峰”。它是轨迹规划、奇异性分析、工作空间分析和零位置校对等工作的基础^[5-6]。尽管学者们提出了一些解决方法,如牛顿迭代^[7]、BP 神经网络^[8]、粒子群^[9]、对偶四元数^[10]、结式消元^[11]等,但它们效率低、稳定性差、过度依赖初值、得不到全部解,或者无法给出输入、输出量的全解析映射表达式。一般拓扑结构六自由度并联机器人的位置正解问题至今尚未解决^[12],这限制了 Stewart 型并联机器人的实际应用。

文献检索后发现,并不是所有拓扑结构的六自由度并联机器人都具有解析式位置正解;即使存在解析正解,其求解过程也异常繁琐,且不具备普适性。根源在于并联机构的正向运动学涉及到较多的输入、输出量,并且它们之间强非线性耦合。沈惠平等^[13]研究发现,耦合度反映了机构拓扑结构的复杂程度。耦合度越高,则机构各单开链之间的耦合性越强、复杂度越高;耦合度为零,则可解析求解出机构的全部位置正解。

2021 年,文献[14]综合出一种零耦合度的“3-2-1”式 Stewart 型并联机器人,具有优异的静刚度性能及较大的工作空间,本文将对其位置正解个数开展研究。首先,结合机构的几何约束关系,推导位置正解表达式。其次,对所有可能出现的位置情况进行分析,确定机构的正解个数,并通过虚拟实验验证算法的正确性。接着,探究正解个数变化的条件,并分析影响实数解个数的因素。最后,剖析位置正解个数与 Hunt 奇异之间的关联。

1 结构模型及正解算法

1.1 结构模型

一般形式“3-2-1”式 Stewart 型并联机器人的机构简图如图 1 所示,主要由动平台、静平台及 6 条初

始长度为 l_0 的可伸缩支链组成。其中,安装在动、静平台上的球铰链在空间中任意布置;3 号支链与动平台之间通过 1 个一般球铰链连接,1、2 号支链与动平台之间通过 1 个二重复合球铰链连接,4、5、6 号支链与动平台之间通过 1 个三重复合球铰链连接。

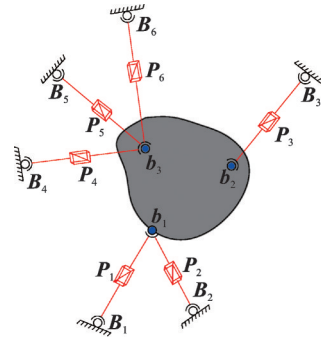


图 1 一般形式“3-2-1”式 Stewart 型并联机器人
Fig.1 General form of “3-2-1” Stewart-type parallel robot

为了便于表达零部件的加工和装配,本文将动平台设计为一个底边长为 $\sqrt{2}n$ 的正三棱锥,静平台为一个内边长为 $2l_0+n$ 的立方体空壳。为了最大程度地避开支链之间的碰撞,初始安装条件下,与同一个动球铰相连的几条支链相互垂直。具体机构简图如图 2 所示。

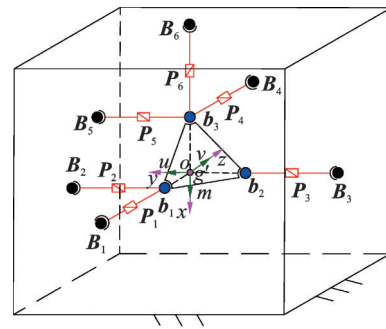


图 2 “3-2-1”式 Stewart 型并联机器人机构简图
Fig.2 Schematic diagram of mechanism of “3-2-1” Stewart-type parallel robot

1.2 正解算法

以静平台的中心为原点,分别在动、静平台上建立坐标系 $\{g'-mu v\}$ 、 $\{o-x y z\}$,初始状态下它们重合。将静球铰的中心记为 $B_1 \sim B_6$,动球铰的中心记为 $b_1 \sim b_3$;六条支链的实际长度记为 $l_1 \sim l_6$ 。 b_1, b_2, b_3 的坐标分别记为 $(u, v, w)^T, (r, s, t)^T, (x, y, z)^T$ 。6 个静球铰在 $\{o-x y z\}$ 中的坐标为

$$[B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -n & -n & -n-l_0 \\ 0 & l_0 & -n-l_0 & 0 & l_0 & 0 \\ -n-l_0 & -n & 0 & l_0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

从图2中提取第1个四面体(b_3 - B_4 - B_5 - B_6),如图3所示。

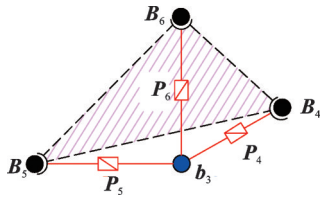


图3 四面体 I 结构简图

Fig.3 Schematic diagram of tetrahedron I

存在约束方程组

$$\begin{cases} \|B_4 - b_3\| = l_4 \\ \|B_5 - b_3\| = l_5 \\ \|B_6 - b_3\| = l_6 \end{cases} \quad (2)$$

式中“ $\|\bullet\|$ ”表示向量的范数。

将式(1)代入式(2),并展开

$$\begin{cases} (n+x)^2 + y^2 + (l_0-z)^2 = l_4^2 \\ (n+x)^2 + (l_0-y)^2 + z^2 = l_5^2 \\ (n+l_0+x)^2 + y^2 + z^2 = l_6^2 \end{cases} \quad (3)$$

求解式(3)可得 b_3 点坐标

$$\begin{cases} x = \frac{-2l_0^2 - l_4^2 - l_5^2 + 2l_6^2 - 6l_0n \pm b_{3m}}{6l_0} \\ y = \frac{-l_5^2 + l_6^2}{2l_0} - n - x \\ z = \frac{-l_4^2 + l_6^2}{2l_0} - n - x \end{cases} \quad (4)$$

式中 $b_{3m} = [2(l_4^2 l_5^2 + l_4^2 l_6^2 + l_5^2 l_6^2) + 4l_0^2(l_4^2 + l_5^2 + l_6^2) - 2(4l_0^4 + l_4^4 + l_5^4 + l_6^4)]^{\frac{1}{2}}$ 。

在图2中提取第2个四面体(b_1 - b_3 - B_1 - B_2),如图4所示。

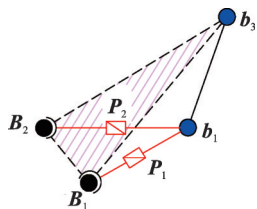


图4 四面体 II 结构简图

Fig.4 Schematic diagram of tetrahedron II

存在约束方程组

$$\begin{cases} \|B_1 - b_1\| = l_1 \\ \|B_2 - b_1\| = l_2 \\ \|b_3 - b_1\| = \sqrt{2}n \end{cases} \quad (5)$$

将式(1)代入式(5),并展开

$$\begin{cases} u^2 + v^2 + (n+l_0+w)^2 = l_1^2 \\ u^2 + (l_0-v)^2 + (n+w)^2 = l_2^2 \\ (x-u)^2 + (y-v)^2 + (z-w)^2 = 2n^2 \end{cases} \quad (6)$$

求解式(6)可得 b_1 点坐标

$$\begin{cases} u = \frac{\pm b_{1m}C_2 + C_3}{C_1x} \\ v = \frac{C_1xu - C_3 + C_2C_4}{C_1C_2} \\ w = \frac{-C_1xu + C_3 + C_2C_5}{C_1C_2} \end{cases} \quad (7)$$

式中: $C_1 = 2l_0^2(2x^2 + (n-y+z)^2 + 2(n-y+z)l_0 + l_0^2)$; $C_2 = n-y+z+1$; $C_3 = 2x^2(n-y+z)l_0^3 + x^2l_0^2(2(-n^2+x^2+y^2+2nz+z^2) + l_1^2 + l_2^2) + l_0(-x^2 + (n+y+z)(l_1^2 - l_2^2))$; b_{1m}, C_4, C_5 是关于 $x, y, z, n, l_0, l_1, l_2$ 的表达式,限于篇幅,这里省略。

从图2中提取第3个四面体(b_2 - b_1 - b_3 - B_3),如图5所示。

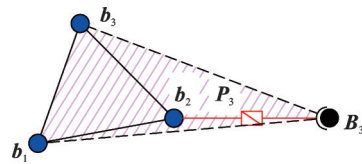


图5 四面体 III 结构简图

Fig.5 Schematic diagram of tetrahedron III

存在约束方程组

$$\begin{cases} \|B_3 - b_2\| = l_3 \\ \|b_3 - b_2\| = \sqrt{2}n \\ \|b_1 - b_2\| = \sqrt{2}n \end{cases} \quad (8)$$

将式(1)代入式(8),并展开

$$\begin{cases} r^2 + (n+l_0+s)^2 + t^2 = l_3^2 \\ (x-r)^2 + (y-s)^2 + (z-t)^2 = 2n^2 \\ (u-r)^2 + (v-s)^2 + (w-t)^2 = 2n^2 \end{cases} \quad (9)$$

求解式(9)可得 b_2 点坐标

$$\begin{cases} r = \frac{(p \pm b_{2m})D_1 + D_3}{m(2wx - 2uz)} \\ s = \frac{rm(2wx - 2uz) - D_3}{2D_1m} \\ t = \frac{D_2(rm(2wx - 2uz) - D_3) + D_1D_4}{D_1m(-2wx + 2uz)} \end{cases} \quad (10)$$

式中: $D_1 = -nw - wy + nz + vz - wl_0 + zl_0$; $D_2 =$

$-nu + nx + vx - uy - ul_0 + xl_0; D_3 = -3n^2w + wx^2 + wy^2 + 3n^2z - u^2z - v^2z - w^2z + wz^2 - 2nw l_0 + 2nz l_0 - wl_0^2 + wl_3^2 - zl_3^2; D_4 = -3n2u + 3n^2x - u^2x - v^2x - w^2x + ux^2 + uy^2 + uz^2 - 2nul_0 + 2nxl_0 - ul_0^2 + xl_0^2 + ul_3^2 - xl_3^2; b_{2m}, \rho$ 为关于 $u, v, w, x, y, z, n, l_0, l_3$ 的解析式; m 为关于 u, v, w, x, y, z, n, l_0 的解析式。

从图 2 中提取第 4 个四面体 ($g-b_1-b_2-b_3$), 如图 6 所示。

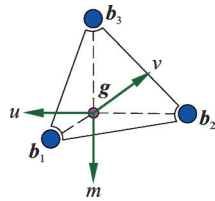


图 6 动平台结构简图

Fig.6 Schematic diagram of moving platform

存在约束方程

$$\begin{cases} \|b_1 - g\| = n \\ \|b_2 - g\| = n \\ \|b_3 - g\| = n \end{cases} \quad (11)$$

基于四面体理论, 点 g 有两种可能的镜像位置, 分别位于面 $b_1b_2b_3$ 的两侧。根据笛卡尔系的定义规则, 可筛选出唯一的坐标 g

$$g = \frac{1}{3}(b_1 + b_2 + b_3) + \frac{1}{3n}(b_2 - b_3) \times (b_1 - b_3) \quad (12)$$

式中算子“ \times ”表示向量的外积。

b_1g, b_2g, b_3g 分别对应于坐标系的 3 条坐标轴, 所以 $\{g'-mu\nu\}$ 相对于 $\{o-xyz\}$ 的旋转矩阵 R 可表示为

$$R = (g - b_3, g - b_2, g - b_1) / n \quad (13)$$

以上解析法未涉及到封闭方程 (即一元高次方程) 的求解, 却得到了机构的全部位置正解。值得一提的是, 该算法也适用于解决其他形式 (图 7) 零耦合度 Stewart 型并联机器人的位置正解问题。为了更清晰地表达支链布局, 下文将静平台外壳隐藏。

1.3 多解性说明

式 (4, 7, 10) 中均含有正负号, 这表明, 对于并联机器人的一组输入杆长, 可得到多组位置正解, 故机器人可以有多种装配形式。每一种装配形式可定义为一个构型。当机器人一旦完成装配后, 对应的构型就具有一个活动空间, 即“构型空间”。这样, 并联机器人的整个活动空间就被拆分为多个构型空间。

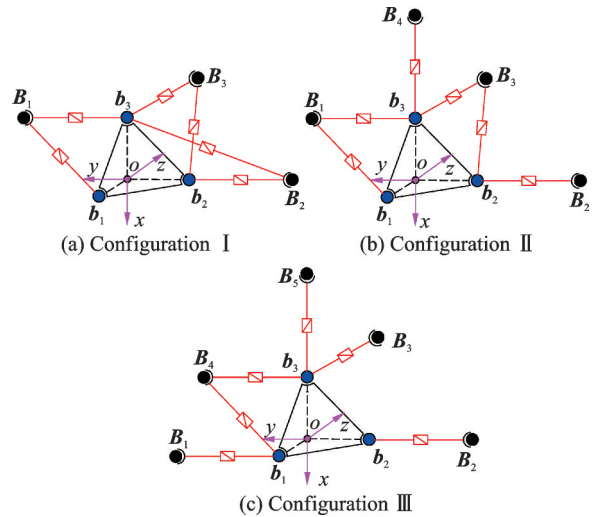


图 7 其他形式零耦合度 Stewart 型并联机器人的机构简图

Fig.7 Mechanism diagram of other forms of zero coupling Stewart-type parallel robots

并联机器人的不同位置正解分布在不同的构型空间内。由于各构型空间不连通, 而且机器人的运动是连续的, 故仅仅靠杆件伸缩驱动运动时不可能由一个构型空间进入另外一个构型空间。

1.4 算例验证

建立“3-2-1”式 Stewart 型并联机器人的虚拟样机, 如图 8 所示。其中, 动平台边长和支链初始长度分别设计为 $15\sqrt{2}$ mm、25 mm。

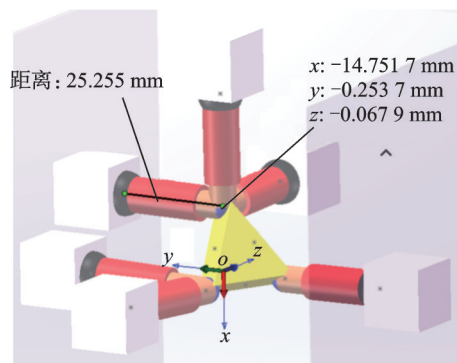


图 8 “3-2-1”式 Stewart 型并联机器人虚拟样机

Fig.8 Virtual prototype of “3-2-1” Stewart-type parallel robot

对虚拟样机施加驱动函数, 仿真后可测量出 6 条支链的长度 (杆长)、动平台的位置 g'' 、姿态以及所有动球铰的坐标。将虚拟实验中测量的杆长代入 1.2 节算法, 计算动平台参考点 g 的坐标。进行多组实验, 并将 g 点坐标与 g'' 点坐标进行对比, 绘制图 9。结果显示, 计算值与实验值完全吻合, 这验证了正解算法的准确性。

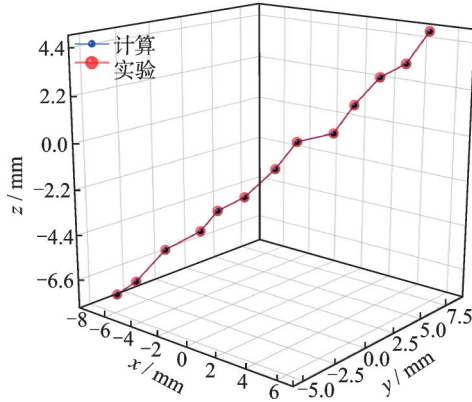


图9 正解算例验证

Fig.9 Forward position solution example verification

2 位置正解个数分析

2.1 正解重根的条件

由式(4)可知, b_3 点坐标的两组解均与 b_{3m} 有关。

显然,若 $b_{3m} = 0$,则

$$\begin{cases} x = \frac{-2l_0^2 - l_4^2 - l_5^2 + 2l_6^2 - 6l_0n}{6l_0} \\ y = \frac{-l_5^2 + l_6^2}{2l_0} - n - x \\ z = \frac{-l_4^2 + l_6^2}{2l_0} - n - x \end{cases} \quad (14)$$

$$2l_0^2(l_4^2 + l_5^2 + l_6^2) + l_4^2l_5^2 + l_4^2l_6^2 + l_5^2l_6^2 - 4l_0^4 - l_4^4 - l_5^4 - l_6^4 = 0 \quad (15)$$

观察图3可知,如果 b_3 点有两组解,则其分布在面 $B_4B_5B_6$ 的两侧(图10)。在面 $B_4B_5B_6$ 上建立坐标系 $\{B_5''-x'y'z'\}$, x' 轴沿 B_5B_4 方向, z' 轴与面 $B_4B_5B_6$ 垂直。图10中, $b_{i(j)}$ 表示 b_i 点的第 j 组坐标解。

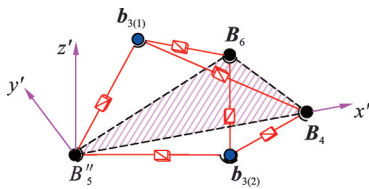


图10 两组解分布

Fig.10 Distribution of two sets of solutions

静球铰在 $\{B_5''-x'y'z'\}$ 中的坐标为

$$(B_4', B_5', B_6') = \begin{pmatrix} \sqrt{2}l_0 & 0 & \sqrt{2}l_0/2 \\ 0 & 0 & \sqrt{6}l_0/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (16)$$

联立式(2,16)可得 b_3 点坐标

$$\begin{cases} x' = \frac{2l_0^2 - l_4^2 + l_5^2}{2\sqrt{2}l_0} \\ y' = \frac{2l_0^2 + l_4^2 + l_5^2 - 2l_6^2}{2\sqrt{6}l_0} \\ z' = \pm \frac{\sqrt{b_{31}}}{\sqrt{6}l_0} \end{cases} \quad (17)$$

式中 $b_{31} = -4l_0^4 + 2l_0^2l_4^2 - l_4^4 + 2l_0^2l_5^2 + l_4^2l_5^2 - l_5^4 + 2l_0^2l_6^2 + l_4^2l_6^2 + l_5^2l_6^2 - l_6^4$ 。

据式(17)可知,当 $b_{31} = 0$ 时, b_3 点仅一解。对比发现, $b_{31} = 0$ 与式(15)等价,即当 b_3 点位于面 $B_4B_5B_6$ 上时, b_3 点的坐标解为重根。同理可知,当 $b_{1m} = 0$ 时, b_1 点位于面 $b_3B_1B_2$ 上,此时 b_1 点的坐标解为重根;当 $b_{2m} = 0$ 时, b_2 点位于面 $b_1b_3B_3$ 上时,此时 b_2 点的坐标解为重根。对应的 b_1, b_2 点的坐标分别为

$$\begin{cases} u = \frac{C_3}{C_1x} \\ v = \frac{C_1xu - C_3 + C_2C_4}{C_1C_2} \\ w = \frac{-C_1xu + C_3 + C_2C_5}{C_1C_2} \end{cases} \quad (18)$$

$$\begin{cases} r = \frac{D_1p + D_3}{m(2wx - 2uz)} \\ s = \frac{rm(2wx - 2uz) - D_3}{2D_1m} \\ t = \frac{D_2(rm(2wx - 2uz) - D_3) + D_1D_4}{D_1m(-2wx + 2uz)} \end{cases} \quad (19)$$

2.2 数值算例

当 b_3 点位于面 $B_4B_5B_6$ 上时,在虚拟样机中可测量得一组支链杆长(单位:mm)

$$\begin{cases} l_1 = 29.04 & l_2 = 25.00 & l_3 = 40.00 \\ l_4 = 31.79 & l_5 = 18.46 & l_6 = 16.97 \end{cases} \quad (20)$$

根据式(7,10,14,20),计算 $b_1 \sim b_3$ 点坐标,并绘制4组位形图(见图11)。

当 b_3 点位于面 $B_4B_5B_6$ 上,且 b_1 点位于面 $b_3B_1B_2$ 上时,在虚拟样机中可测量得一组支链杆长(单位:mm)

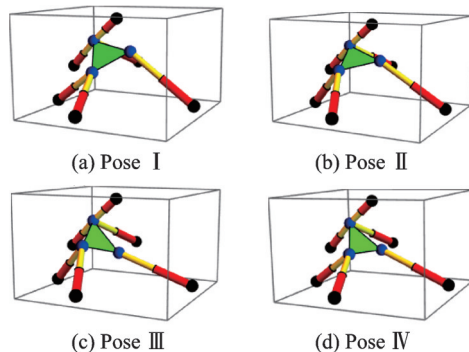


图11 4组解的位形图

Fig.11 Four sets of position diagrams

$$\begin{cases} l_1 = 29.04 & l_2 = 25.00 & l_3 = 40.00 \\ l_4 = 31.89 & l_5 = 19.85 & l_6 = 15.58 \end{cases} \quad (21)$$

根据式(10,14,18,21),计算 $b_1 \sim b_3$ 点坐标,并绘制两组正解位形图(见图 12)。

当 b_3 点位于面 $B_4B_5B_6$ 上、 b_1 点位于面 $b_3B_1B_2$ 上,且 b_2 点位于面 $b_1b_3B_3$ 上时,在虚拟样机中可测量得到一组支链杆长(单位:mm)

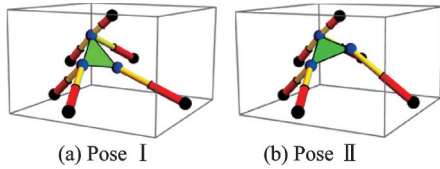


图 12 两组解的位形图

Fig.12 Two sets of position diagrams

$$\begin{cases} l_1 = 29.04 & l_2 = 25.00 & l_3 = 40.00 \\ l_4 = 36.51 & l_5 = 23.61 & l_6 = 13.56 \end{cases} \quad (22)$$

根据式(14,18,19,22),计算 $b_1 \sim b_3$ 点坐标,并绘制一组正解位形图(见图 13)。

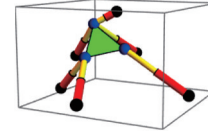


图 13 一组解的位形图

Fig.13 One set of position diagram

综上所述,该并联机器人的位置正解可能会出现 1 组解、2 组解、4 组解和 8 组解这 4 类情况,如表 1 所示。

表 1 位置正解的 4 种类型

Table 1 Four types of forward position solution

正解个数	判别依据	构型
8 组	$b_{1m} > 0, b_{2m} > 0, b_{3m} > 0$	$(b_{3(1)}, b_{1(1)}, b_{2(1)}); (b_{3(1)}, b_{1(1)}, b_{2(2)}); (b_{3(1)}, b_{1(2)}, b_{2(1)}); (b_{3(1)}, b_{1(2)}, b_{2(2)}); (b_{3(2)}, b_{1(1)}, b_{2(1)}); (b_{3(2)}, b_{1(1)}, b_{2(2)}); (b_{3(2)}, b_{1(2)}, b_{2(1)}); (b_{3(2)}, b_{1(2)}, b_{2(2)})$
4 组	$b_{1m} > 0, b_{2m} > 0, b_{3m} = 0$ $b_{1m} = 0, b_{2m} > 0, b_{3m} > 0$ $b_{1m} > 0, b_{2m} = 0, b_{3m} > 0$	$(b_3, b_{1(1)}, b_{2(1)}); (b_3, b_{1(1)}, b_{2(2)}); (b_3, b_{1(2)}, b_{2(1)}); (b_3, b_{1(2)}, b_{2(2)})$ $(b_{3(1)}, b_1, b_{2(1)}); (b_{3(1)}, b_1, b_{2(2)}); (b_{3(2)}, b_1, b_{2(1)}); (b_{3(2)}, b_1, b_{2(2)})$ $(b_{3(1)}, b_{1(1)}, b_2); (b_{3(1)}, b_{1(2)}, b_2); (b_{3(2)}, b_{1(1)}, b_2); (b_{3(2)}, b_{1(2)}, b_2)$
2 组	$b_{1m} = 0, b_{2m} > 0, b_{3m} = 0$ $b_{1m} > 0, b_{2m} = 0, b_{3m} = 0$ $b_{1m} = 0, b_{2m} = 0, b_{3m} > 0$	$(b_3, b_1, b_{2(1)}); (b_3, b_1, b_{2(2)})$ $(b_3, b_{1(1)}, b_2); (b_3, b_{1(2)}, b_2)$ $(b_{3(1)}, b_1, b_2); (b_{3(2)}, b_1, b_2)$
1 组	$b_{1m} = 0, b_{2m} = 0, b_{3m} = 0$	(b_3, b_1, b_2)

表 1 中,当 $b_{im} > 0$ 时, b_i 点有两组解;当 $b_{im} = 0$ 时, b_i 点仅一组解。

3 影响实数解个数的因素

“3-2-1”式 Stewart 型并联机器人在一般情况下存在 8 组解析解,包含实数解和复数解。接下来,对这 8 组解进行分析,探究实数解个数的影响因素。

3.1 影响因素 1

根据动、静球铰的位置关系,绘制两组 b_1 及两组 b_3 的位形图,如图 14 所示。

观察可知, $B_1, B_2, b_{3(2)}$ 点位于面 $B_4B_5B_6$ 的同一

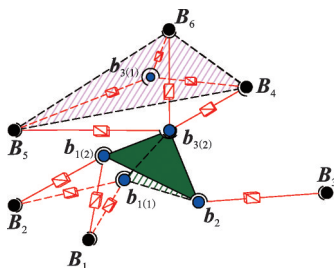


图 14 b_3 两组解与 b_1 两组解的位置关系

Fig.14 Positional relationship between two sets of solutions b_3 and two sets of solutions b_1

侧, $b_{3(1)}, b_{3(2)}$ 点关于面 $B_4B_5B_6$ 对称。若输入杆长满足构型 $(b_{3(2)}, b_{1(j)}, b_{2(j)})$, 则 $b_{1(j)}b_{3(2)}$ 的长度等于 $\sqrt{2}n$, 而 $b_{1(j)}b_{3(1)}$ 的长度不等于 $\sqrt{2}n$ 。按照图 14 中静球铰的布置方式,在确定输入杆长后只能得到构型 $(b_{3(1)}, b_{1(j)}, b_{2(j)})$ 或构型 $(b_{3(2)}, b_{1(j)}, b_{2(j)})$ 。故该机器人的位置正解中最多含有 4 组实数解。

若 $B_1 \sim B_6$ 布置在同一平面内且给定输入杆长时,存在 $b_{1(j)}b_{3(j)}, b_{1(j)}b_{2(j)}, b_{2(j)}b_{3(j)}$ 均为动平台边长的情况。静球铰按照该种方式布置,机器人的位置正解中最多含有 8 组实数解。由此可见,实数解的个数与静球铰的布置有关。

3.2 影响因素 2

据 1.2 节可知, b_3, b_1, b_2 点的坐标解分别与 b_{3m}, b_{1m}, b_{2m} 有关。 b_{3m} 与输入量 l_0, l_4, l_5, l_6 有关; b_{1m} 与输入量 n, l_0, l_1, l_2 有关; b_{2m} 与输入量 n, l_0, l_3 有关。若 $b_{3m}^2 < 0$, b_3 点坐标解为复数;若 $b_{1m}^2 < 0$, b_1 点坐标解为复数;若 $b_{2m}^2 < 0$, b_2 点坐标解为复数。从几何关系看,若输入杆长不能满足图 2~4 中四面体约束关系,所求正解为复数。因此,实数解的个数还与输入杆长有关。

4 位置正解个数与 Hunt 奇异的关联

1983年, Hunt^[15]研究发现,当并联机构的所有支链相交于一条公共直线时,发生奇异。这被称为“Hunt 奇异性判据”。接下来,运用该判据分析“3-2-1”式 Stewart 型并联机器人的 Hunt 奇异位形。

当 b_2 点运动至面 $b_1b_3B_3$ 上时(图 15), 驱动杆的 6 条线矢交于直线 b_1b_3 , 满足 Hunt 奇异条件(b_1b_3 为 Hunt 交线)。另外, 根据 2.1 节的研究可知, 此时, b_2 点的坐标解为重根。

$$J = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & \cdots & h_6 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (b_1 - g^o) \times h_1 & (b_1 - g^o) \times h_2 & \cdots & (b_3 - g^o) \times h_6 \end{bmatrix}^T \quad (23)$$

式中 h_i 为支链 i 的单位方向向量。

$$h_i = \frac{b_j - B_i}{l_i} \quad j = \begin{cases} 1 & i = 1, 2 \\ 2 & i = 3 \\ 3 & i = 4, 5, 6 \end{cases}$$

在工作空间范围内随机施加驱动函数, 监测 b_2 点到面 $b_1b_3B_3$ 的距离。另外, 计算可得每个位形下雅可比矩阵的行列式。绘制 b_2 点至面 $b_1b_3B_3$ 的距离与雅可比矩阵行列式之间的映射关系图, 如图 16 所示。图 16 中, 距离为负值代表点运动至面的另一侧。

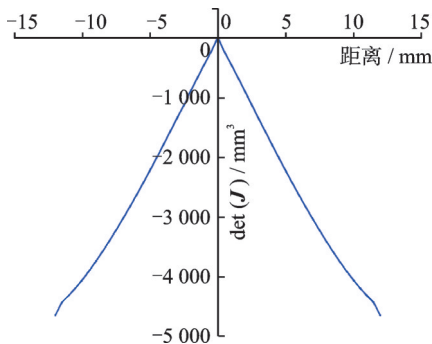


图 16 b_2 到 $b_1b_3B_3$ 的距离与雅可比行列式的关系
Fig.16 Relationship between distance from b_2 to $b_1b_3B_3$ and determinant of Jacobian matrix

观察发现, 当 b_2 点运动到面 $b_1b_3B_3$ 上时, 机器人的雅可比矩阵行列式正好为零。由此可见, 满足“ b_2 点坐标为一组解”条件的位形为 Hunt 奇异位形。

当 $b_1b_2b_3$ 与 $b_3B_1B_2$ 共面且 b_2b_3 不与 1、2 号任意一条支链平行时(图 17), 驱动杆的 6 条线矢交于直线 b_2b_3 , 满足 Hunt 奇异条件(b_2b_3 为 Hunt 交线)。另外, 根据 2.1 节的研究可知, 此时, b_1 点的坐标解为重根。

当 $b_1b_2b_3$ 与 $B_4B_5B_6$ 共面且 b_1b_2 不与 4、5、6 号任

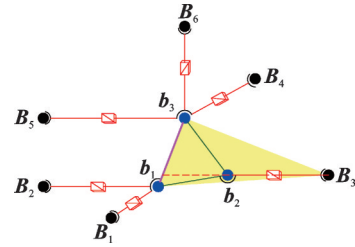


图 15 Hunt 奇异位形 I
Fig.15 Hunt singular configuration I

为进一步验证第 1 种 Hunt 奇异, 基于速度基点法, 推导机器人的雅可比矩阵 J

意一条支链平行时(图 18), 驱动杆的 6 条线矢交于直线 b_1b_2 , 满足 Hunt 奇异条件(b_1b_2 为 Hunt 交线)。另外, 根据 2.1 节的研究可知, 此时, b_3 点的坐标解为重根。

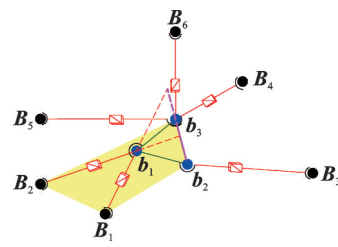


图 17 Hunt 奇异位形 II
Fig.17 Hunt singular configuration II

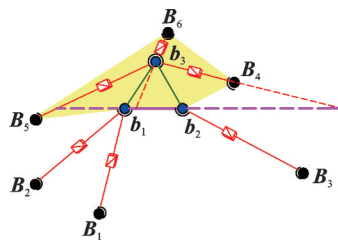


图 18 Hunt 奇异位形 III
Fig.18 Hunt singular configuration III

综上所述, “3-2-1”式 Stewart 型并联机器人若处于 Hunt 奇异位形, 位置正解个数一定减少; 反之, 若位置正解个数减少, 机器人不一定处于 Hunt 奇异位形。

5 结 论

针对“3-2-1”式 Stewart 型并联机器人, 运用四面体原理并结合支链约束条件, 构建了位置正解的算法模型, 研究结论如下:

- (1) 当满足“ b_3 点位于面 $B_4B_5B_6$ 上”或“ b_1 点位于面 $b_3B_1B_2$ 上”或“ b_2 点位于面 $b_1b_3B_3$ 上”条件时, 机器人位置正解的个数一定会变少。满足其一, 减为

4组解;满足其二,减为2组解;均满足,减为1组解。

(2) 静球铰布局以及输入杆长均影响正运动学方程实数解的个数。若静球铰布置在同一平面内,则机器人最多存在8组实数解,否则最多存在4组实数解。

(3) 若机器人处于 Hunt 奇异位形,则其位置正解个数一定少于8;反之,若位置正解个数少于8,则机器人不一定处于 Hunt 奇异位形。

参考文献:

- [1] 王澍声, 尤晶晶, 黄宁宁, 等. 一种新的可重构三自由度平面并联机构的结构设计及运动学分析[J]. 南京航空航天大学学报, 2023, 55(3): 437-443.
WANG Shusheng, YOU Jingjing, HUANG Ningning, et al. Structural design and kinematic analysis of a new reconfigurable 3-DOF planar parallel mechanism [J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2023, 55(3): 437-443.
- [2] 郑云. 并联机器人在预制构件生产线中的应用研究[J]. 机床与液压, 2018, 46(13): 104-106.
ZHENG Yun. Research on application of parallel robot in concrete precast construct producing line[J]. Machine Tool & Hydraulic, 2018, 46(13): 104-106.
- [3] LEILA G E V O. Neural networks based real time solution for forward kinematics of 6×6 UPU flight simulator[J]. Intelligent Service Robotics, 2022, 15(5): 611-626.
- [4] 尤晶晶, 李成刚, 吴洪涛. 六维加速度传感器的性能建模及结构优化[J]. 南京航空航天大学学报, 2013, 45(3): 380-389.
YOU Jingjing, LI Chenggang, WU Hongtao. Performance modeling structure optimizing of six-axis accelerometer [J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2013, 45(3): 380-389.
- [5] 黄宁宁, 尤晶晶, 王澍声, 等. 可重构 3-RRR 并联机器人的“点对点”路径规划[J]. 南京航空航天大学学报, 2024, 56(3): 415-423.
HUANG Ningning, YOU Jingjing, WANG Shusheng, et al. “Point-to-point” path planning for reconfigurable 3-RRR parallel robots[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2024, 56(3): 415-423.
- [6] 徐帅, 尤晶晶, 叶鹏达, 等. 一种可重构 3-RRR 平面并联机构及其工作空间分析[J]. 南京航空航天大学学报, 2022, 54(3): 466-472.
XU Shuai, YOU Jingjing, YE Pengda, et al. A reconfiguration 3-RRR planar parallel mechanism and its workspace analysis[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2022, 54(3): 466-472.
- [7] LIU M Z, GU Q X, YANG B, et al. Kinematics model optimization algorithm for six degrees of freedom parallel platform[J]. Applied Sciences, 2023, 13(5): 3082.
- [8] SAMARTÍN G F J, BARRIENTOS A. Kinematic modelling of a 3RRR planar parallel robot using genetic algorithms and neural networks[J]. Machines, 2023, 11(10): 952.
- [9] PAK Y J, KONG Y S, RI J S. Robust pid optimal tuning of a delta parallel robot based on a hybrid optimization algorithm of particle swarm optimization and differential evolution[J]. Robotica, 2023, 41(4): 1159-1178.
- [10] YANG X L, WU H T, LI Y, et al. A dual quaternion solution to the forward kinematics of a class of six-DOF parallel robots with full or reductant actuation [J]. Mechanism and Machine Theory, 2017, 107: 27-36.
- [11] HUSTY M L. An algorithm for solving the direct kinematics of general stewart-gough platforms[J]. Mechanism and Machine Theory, 1996, 31(4): 365-380.
- [12] DU Z Q, LI J, MENG Q M, et al. Symbolic position analysis for three 6-DOF parallel mechanisms and new insight[J]. Robotica, 2024, 42(5): 1628-1648.
- [13] 沈惠平, 尹洪波, 王振, 等. 基于拓扑结构分析的求解 6-SPS 并联机构位置正解的研究[J]. 机械工程学报, 2013, 49(21): 70-80.
SHEN Huiping, YIN Hongbo, WANG Zhen, et al. Research on forward position solutions for 6-SPS parallel mechanisms based on topology structure analysis[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2013, 49(21): 70-80.
- [14] YOU J J, XI F F, SHEN H P, et al. A novel stewart-type parallel mechanism with topological reconfiguration: Design, kinematics and stiffness evaluation[J]. Mechanism and Machine Theory, 2021(162): 104329.
- [15] HUNT K H. Structural kinematics of in-parallel-actuated robot-arms[J]. Journal of Mechanical Design, 1983, 105(4): 705-712.

(编辑:陈珺)