

DOI:10.16356/j.1005-2615.2024.04.010

## 改进 DBSCAN 的自动工作模态分析方法

孙嘉宝<sup>1</sup>, 康杰<sup>1</sup>, 董自瑞<sup>2</sup>, 季红侠<sup>2</sup>, 罗杰<sup>1</sup>, 刘晓腾<sup>1</sup>

(1. 南京航空航天大学航天学院, 南京 211106; 2. 上海卫星装备研究所, 上海 200240)

**摘要:** 为解决随机子空间法在模态参数识别过程中自动性差、虚假模态难以识别剔除等问题, 提出一种新的模态参数辨识方法。采用协方差驱动的随机子空间法 (Covariance-driven stochastic identification, SSI-COV) 识别系统的模态参数; 根据软硬准则初步剔除虚假模态并绘制三维稳定图; 对基于密度的带噪声的空间聚类算法 (Density-based spatial clustering algorithm with noise, DBSCAN) 进行改进, 自动确定敏感参数  $\epsilon$ , 并对候选模态进行聚类分析; 对每一簇类模态, 计算模态质量评价准则 (Modal quality assessment criterion, MQAC), 制定筛选准则, 自动剔除虚假模态并识别真实模态。利用本文方法对桁架结构、广州塔、Z24 桥实例进行模态参数识别验证, 结果表明该方法可实现典型工程结构的自动工作模态分析, 可有效剔除非白噪声激励及测量噪声导致的虚假模态。

**关键词:** 工作模态分析; 随机子空间法; 三维稳定图; 虚假模态; DBSCAN 算法

**中图分类号:** O32 **文献标志码:** A **文章编号:** 1005-2615(2024)04-0677-10

## Improved DBSCAN for Automated Operational Modal Analysis Method

SUN Jiabao<sup>1</sup>, KANG Jie<sup>1</sup>, DONG Zirui<sup>2</sup>, JI Hongxia<sup>2</sup>, LUO Jie<sup>1</sup>, LIU Xiaoteng<sup>1</sup>

(1. College of Astronautics, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing 211106, China; 2. Shanghai Institute of Spacecraft Equipment, Shanghai 200240, China)

**Abstract:** In order to solve the problems of poor automaticity and difficult identification and elimination of spurious modes by covariance-driven stochastic subspace method, a new modal parameter identification method is proposed. Firstly, the covariance-driven stochastic subspace method is used to identify the modal parameters of the system. Secondly, according to the soft and hard criteria, the spurious modes are preliminarily eliminated and the 3D stabilization diagram is drawn. Then, the density-based spatial clustering algorithm with noise (DBSCAN) is improved, the sensitive parameter  $\epsilon$  is automatically determined, and the candidate modes are clustered and analyzed. For each cluster of modalities, the modal quality assessment criterion (MQAC) is calculated, and a screening standard is formulated to determine the true modes of the system. Finally, the proposed method is used to verify the modal parameter identification of truss structure, Guangzhou Tower and Z24 bridge examples. The results indicate that this method can achieve autonomous modal analysis of typical engineering structures and effectively eliminate false modes caused by non-white noise excitation and measurement noise.

**Key words:** operational modal (OMA); stochastic subspace identification; 3D stabilization diagram; spurious mode; DBSCAN algorithm

**基金项目:** 航空航天结构力学及控制全国重点实验室青年学生项目 (MCAS-S-0224G04); 国家自然科学基金青年基金 (12102178); 南京航空航天大学新教师工作启动基金 (YAH20137)。

**收稿日期:** 2024-03-28; **修订日期:** 2024-05-16

**通信作者:** 康杰, 男, 博士, 讲师, E-mail: kangjie@nuaa.edu.cn。

**引用格式:** 孙嘉宝, 康杰, 董自瑞, 等. 改进 DBSCAN 的自动工作模态分析方法 [J]. 南京航空航天大学学报, 2024, 56(4): 677-686. SUN Jiabao, KANG Jie, DONG Zirui, et al. Improved DBSCAN for automated operational modal analysis method [J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2024, 56(4): 677-686.

工作模态分析(Operational modal analysis, OMA)可以获取结构在工作环境下的模态参数等数据,在结构设计、损伤识别等方面有重要的作用<sup>[1-4]</sup>。但在实际测量工况下,OMA方法辨识的结果会产生许多虚假模态,这时需要人为选择真实模态。人为选择真实模态有更高的不确定因素,如对同组数据,不同人员对模态的判定准则不同而选择不同的真实模态;OMA辨识结果中数据参数混乱,人为选择的难度大幅度提升<sup>[5]</sup>。由此,自动工作模态分析(Automated operational modal analysis, AOMA)在近几年发展得越来越迅速<sup>[6]</sup>。基于聚类的模态参数自动识别方法是AOMA中的一种方法,该方法首先对结构响应数据应用辨识方法,识别出结构模态参数,其次绘制稳定图,再通过聚类算法,如 $k$ -means聚类、层次聚类、基于密度的带噪声的空间聚类算法(Density-based spatial clustering algorithm with noise, DBSCAN)等对候选模态进行识别,最后对候选模态进行结果验证,筛选出系统真实模态<sup>[7]</sup>。

在众多聚类算法中, $k$ -means聚类很难处理非球形和不同形状的簇类,层次聚类计算复杂度高,计算缓慢,而DBSCAN能处理各种形状的簇类,计算效率高且聚类和识别噪声点能在同一步骤完成<sup>[8]</sup>,因此DBSCAN得到了广泛的应用。

基于DBSCAN的工作模态分析方法中,DBSCAN的最小点数阈值Minpts和邻域半径 $\epsilon$ 两个参数往往根据人为经验选择,这大幅度降低了程序的自动性和可靠性。Tronci等<sup>[9]</sup>虽利用 $k$ -dist图的“肘点”确定邻域半径,但“肘点”仍需人为确定选择;Rosalina等<sup>[10]</sup>研究发现,通过连接 $k$ -dist图中首尾两点得到直线,做出其他点到该直线的距离,距离直线最大的点即为所求“肘点”。徐帆<sup>[11]</sup>利用3种不同的聚类算法进行工作模态分析,但聚类参数仍根据经验公式计算得到;Boroschek等<sup>[12]</sup>提出基于OPTICS算法的AOMA方法,克服了对 $\epsilon$ 和Minpts参数的敏感性问题,但程序复杂,计算量较大;Zini等<sup>[13]</sup>确定了协方差驱动的随机子空间法(Covariance-driven stochastic identification, SSI-COV)中模型参数的最优范围,并制定模态质量指数对结果进行验证,但仍需人为筛选真实模态。

本文针对传统工作模态分析方法自动性差、难以识别剔除虚假模态等问题,提出一种基于改进DBSCAN的自动工作模态分析方法。首先,通过SSI-COV计算识别出候选模态,根据软硬准则初步剔除虚假模态并绘制三维稳定图;其次,对DBSCAN进行改进,由于Minpts与 $\epsilon$ 具有互配性,先确定出Minpts,再通过寻找 $k$ -dist图的“肘点”从而自动确定参数 $\epsilon$ ,并对候选模态进行聚类分析;最

后,根据模态质量评价准则,制定筛选阈值准则,自动识别出系统的真实模态。

## 1 模态参数识别方法

### 1.1 协方差驱动的随机子空间法

协方差驱动的随机子空间法<sup>[14]</sup>首先将结构响应数据构造成Hankel矩阵,再计算其协方差序列组成Toeplitz矩阵,最后对Toeplitz矩阵进行奇异值分解和特征值分解得到系统矩阵,从而初步得到系统的频率、阻尼比、振型等模态参数。Hankel矩阵定义为

$$Y_{0|2n-1} = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_0 & \mathbf{y}_1 & \cdots & \mathbf{y}_{m-1} \\ \mathbf{y}_1 & \mathbf{y}_2 & \cdots & \mathbf{y}_m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{y}_{n-1} & \mathbf{y}_n & \cdots & \mathbf{y}_{n+m-2} \\ \mathbf{y}_n & \mathbf{y}_{n+1} & \cdots & \mathbf{y}_{n+m-1} \\ \mathbf{y}_{n+1} & \mathbf{y}_{n+2} & \cdots & \mathbf{y}_{n+m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{y}_{2n-1} & \mathbf{y}_{2n} & \cdots & \mathbf{y}_{2n+m-2} \end{bmatrix} = \frac{Y_p}{Y_f} \quad (1)$$

式中:Hankel矩阵 $Y_{0|2n-1}$ 包含 $2n$ 块行、 $m$ 块列,由2个 $n \times m$ 维的过去输出矩阵 $Y_p$ 和未来输出矩阵 $Y_f$ 构成。每个块行具有 $l$ 行, $l$ 为输出通道个数。 $m$ 在理论上分析应趋向无穷大,但实际测量的数据是有限的。

假定输出数据 $\mathbf{y}_q$ 各态历经, $q$ 表示第 $q$ 个时刻,输出的协方差序列表示为

$$R_n = E[\mathbf{y}_{q+n} \mathbf{y}_q^T] = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum \mathbf{y}_{q+n} \mathbf{y}_q^T \quad (2)$$

实际测试中, $m$ 与测量结果的长度 $s$ 有关,一般为有限长度。因此,式(2)可写为

$$\hat{R}_n = \frac{1}{m} \sum_{q=0}^{m-1} \mathbf{y}_{q+n} \mathbf{y}_q^T \quad (3)$$

协方差序列组成的Toeplitz矩阵为

$$T_{1|n} = \begin{bmatrix} \hat{R}_n & \hat{R}_{n-1} & \cdots & \hat{R}_1 \\ \hat{R}_{n+1} & \hat{R}_n & \cdots & \hat{R}_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hat{R}_{2n-1} & \hat{R}_{2n-2} & \cdots & \hat{R}_n \end{bmatrix}_{n \times n} \quad (4)$$

式中: $T_{1|n}$ 下标表示协方差序列从1至 $n$ 。同理可得到 $T_{2|n+1}$ 。如果系统是可观和可控的,则Toeplitz矩阵的秩为系统阶次 $o$ ,通过对矩阵 $T_{1|n}$ 进行奇异值分解以及对状态空间方程的推导得

$$\begin{cases} T_{1|n} = \Gamma_n O_n \\ \Gamma_n = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}, O_n = [\theta_1 \quad \theta_2 \quad \cdots \quad \theta_n] \end{cases} \quad (5)$$

式中  $\theta_n = E[x_{q+n} y_q^T]$

$$T_{11n} = USV^T =$$

$$\begin{bmatrix} U_1 & U_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{bmatrix} = U_1 S_1 V_1^T \quad (6)$$

$$\Gamma_n = U_1 S_1^{1/2} \quad (7)$$

$$O_n = S_1^{1/2} V_1^T \quad (8)$$

$$T_{2|n+1} = \Gamma_n A O_n \quad (9)$$

式中:  $U$  表示左奇异矩阵,  $S$  表示奇异值矩阵,  $V$  表示右奇异矩阵; 取前  $o$  个奇异值构成对角矩阵  $S_1$ , 其对应的左、右奇异向量分别记为  $U_1$  和  $V_1$ ;  $\Gamma_n$ 、 $O_n$ 、 $A$  分别为拓展的可观矩阵、可控矩阵和系统矩阵。

由此可解得

$$A = S_1^{-1/2} U_1^T T_{2|n+1} V_1 S_1^{-1/2} \quad (10)$$

根据可观矩阵的定义可得, 输出矩阵  $C$  等于  $\Gamma_n$  的前  $l$  行,  $l$  为通道数量, 对于离散系统, 对系统矩阵进行特征值分解, 即

$$A = \Psi \Lambda \Psi^{-1} \quad (11)$$

式中:  $\Lambda$  为对角矩阵, 由离散时间复特征值组成;  $\Psi$  表示由特征值向量为列向量组成的矩阵。

最后根据系统矩阵的特征值和特征向量识别出系统的模态参数。

### 1.2 虚假模态初步剔除准则

真假模态的判别准则有软准则和硬准则<sup>[6]</sup>。软准则的取值介于 0 到 1 之间, 可理解为某种程度的概念; 硬准则的取值非 1 即 0, 为 1 时表示虚假模态, 为 0 时可能为真实模态。

#### 1.2.1 硬准则

结构在实际工况中会有能量损耗, 其阻尼比要大于 0 并且小于某值, 且模态成对共轭出现, 常用的硬准则如下

$$\text{Re}(\sigma_i) \geq 0 \quad (12)$$

$$\xi_i \geq \hat{\xi} \quad (13)$$

$$\text{Im}(\sigma_i) = 0 \quad (14)$$

式中:  $\sigma_i$  表示连续时间域的极点  $i$ ,  $\text{Re}(\cdot)$  和  $\text{Im}(\cdot)$  分别表示复数的实部和虚部,  $\xi_i$  表示模态  $i$  对应的阻尼比,  $\hat{\xi}$  表示阻尼比上限 (一般为 10%~20%), 满足式 (12~14) 的模态  $i$  为虚假模态。

#### 1.2.2 软准则

距离准则通过分析某阶模态与相邻阶模态间的最小归一化距离来判断其“稳定”程度<sup>[15]</sup>, 即

$$d(p_i, p_j) = \frac{|p_i - p_j|}{\max(p_i, p_j)} \quad (15)$$

式中  $p_i$ 、 $p_j$  分别表示模态  $i$  和模态  $j$  的模态参数 (频率、阻尼比、振型等)。

模态置信准则 (Modal assurance criterion, MAC) 衡量振型  $\phi_i$  和  $\phi_j$  之间的相关程度<sup>[16]</sup>, 即

$$\text{MAC}(\phi_i, \phi_j) = \frac{|\phi_i^H \phi_j|^2}{\|\phi_i\|_2^2 \cdot \|\phi_j\|_2^2} \quad (16)$$

式中: 上标 H 表示共轭转置, 当 MAC 取 0 时, 表示两阶模态的振型正交, 即完全不相关, 取 1 表示完全相关。由于存在误差, 若 MAC 的值略小于 1, 也可认为是同一阶模态。

### 1.3 三维稳定图构建

研究表明, 结构的真实模态随着模型参数的变化而保持稳定, 但虚假模态的稳定性较差, 利用这一性质, 在合适的取值范围内选取一系列不同的模型参数, 分别对结构进行模态辨识。

在运用随机子空间法时, 可构造行数和列数相等的 Hankel 矩阵, 则矩阵维度  $v$  等于行数  $n$  与列数  $m$ , 此时  $v$  的选择对随机子空间法的辨识结果影响十分显著, 因此针对不同的系统结构, 选择恰当的矩阵维度具有重要意义<sup>[17]</sup>。Hankel 矩阵维度确定为

$$2v - 1 \leq s \quad (17)$$

$$v \geq \frac{f_s}{f_0} \quad (18)$$

$$v \leq \frac{s + 1}{u + 1} \quad (19)$$

式中:  $v$  为 Hankel 矩阵的维度,  $s$  为采样数据的数量,  $u$  为传感器的数量,  $f_s$  和  $f_0$  分别为采样频率和结构基频。

由于结构动力系统的阶次  $o$  是未知的, 假定的模型阶次过少会导致真实模态遗漏, 而假设阶次过高会导致出现虚假模态, 但稳定图无需预估模型的确切阶次便可区分真假模态, 对结构模态参数的识别有极大的帮助<sup>[11]</sup>。

识别出模态参数后, 通过软准则对候选模态进行筛选, 通过硬准则对候选模态进行剔除; 其次同时改变两种模型参数, 即 Hankel 矩阵的维度和系统阶次, 以辨识的模态频率为横坐标, 可以构造出三维稳定图<sup>[18]</sup>, 系统可能的真实模态呈现出稳定的平面, 且三维稳定图相对于二维稳定图的极点数更多, 有利于后续的聚类分析和结果验证。三维稳定图示例如图 1 所示, 红色实心“o”表示满足软准则的稳定极点, 黑色空心“o”表示不稳定极点。

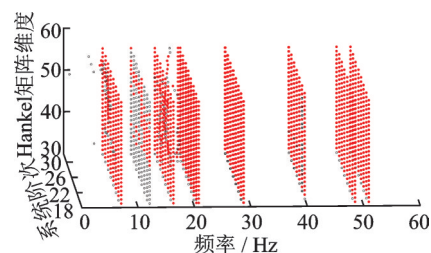


图 1 3D 稳定图

Fig.1 3D stabilization diagram

## 2 改进的DBSCAN

### 2.1 模态距离

聚类的目的是将特征相似的数据对象归为一类,因此进行聚类首先要定义一个聚类对象之间相似性的标准。模态参数包含频率、阻尼比和模态振型,考虑到随机子空间算法对阻尼比的识别精度较差,结合以往学者的经验,本文定义如下模态距离<sup>[19]</sup>作为聚类相似性准则,模态距离越小,则表明两个模态相似程度越高,反之,表明两个模态相似程度越低。

$$D(i, j) = \hat{D}(f_i, f_j) + 1 - \text{MAC}(\phi_i, \phi_j) \quad (20)$$

式中: $i$ 和 $j$ 分别表示模态极点 $i$ 和模态极点 $j$ , $f$ 表示频率, $\phi$ 表示模态振型, $\hat{D}(f_i, f_j) = |f_i - f_j|$ 。

### 2.2 聚类参数的自动确定

采用DBSCAN对候选模态进行聚类分析。该算法的核心是:从目标集的某一个核心点出发,寻找与该点所有直接密度可达的点,并形成一簇类。相较于层次聚类和 $k$ -means聚类算法,DBSCAN可将聚类和噪声点识别在同一步中完成,并且对不同形状的目标集有较高的识别能力<sup>[20]</sup>。

该算法需要指定两个参数:Minpts和 $\epsilon$ ,前者是定义核心点的点数阈值,后者是邻域半径。DBSCAN对于参数 $\epsilon$ 的敏感性较大且两参数具有互配性,Minpts确定范围<sup>[20-21]</sup>为

$$\text{Minpts} \geq \ln N \quad (21)$$

式中 $N$ 为极点个数,一般可取Minpts等于 $\ln N$ 。

当确定Minpts后,根据 $k$ -dist图确定参数 $\epsilon$ , $k$ -dist图是计算目标集中所有点到其第 $k$ 近的点的模态距离( $k = \text{Minpts} + 1$ ),将计算的距离按递减排序,再以点号为横坐标,距离为纵坐标作图。以往的研究是通过人为选择 $k$ -dist图曲线的“肘点”,“肘点”处的纵坐标即为 $\epsilon$ 值。通过研究发现, $k$ -dist曲线的“肘点”是其曲率最大的点,据此本文提出一种确定 $k$ -dist曲线“肘点”的方法,以如下示例进行说明。首先分别绘制 $k=4$ 、 $k=6$ 和 $k=8$ 时所对应的 $k$ -dist曲线,如图2所示。由于曲线平滑性较差,通过式(22)拟合函数,将曲线进行拟合,其中 $a$ 、 $b$ 、 $c$ 为拟合系数,如图3所示。

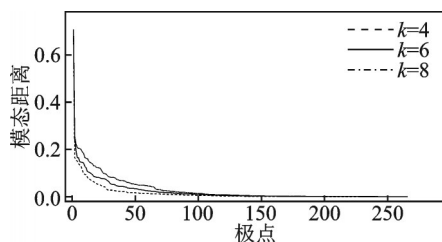


图2  $k$ -dist图

Fig.2  $k$ -dist diagram

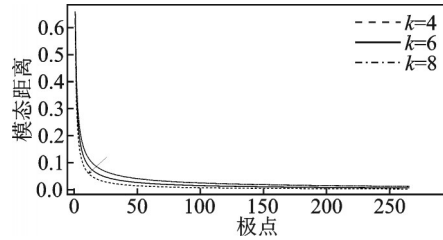


图3 拟合后 $k$ -dist图

Fig.3  $k$ -dist diagram after fit

$$y = a \cdot x^b + c \quad (22)$$

计算每一极点的曲率,曲率值最大的点所对应的模态距离即为所求 $\epsilon$ 。

## 3 虚假模态自动剔除方法

聚类完成后,对每一簇类进行辨识结果验证,引入模态质量评价准则<sup>[13]</sup>,即

$$\text{MQAC}_\tau = \frac{1}{\gamma} \sum_i \alpha_i I_i \quad (23)$$

式中: $\text{MQAC}_\tau$ 为第 $\tau$ 簇类候选模态的质量评价准则, $I_i$ 为模态验证指数, $\gamma$ 为选择的验证指数数量, $\alpha_i$ 为加权常数。MQAC的取值介于0和1之间,数值越大则表明候选模态的“质量”越高,更可能为真实模态。

描述模态振型的两个关键指标是模态相位共线性(Modal phase collinearity, MPC)准则<sup>[22]</sup>和模态振型平均相位偏差(MP deviation, MPD)<sup>[6]</sup>,即

$$\text{MPC}(\phi_j) = \left( \frac{2\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} - 1 \right)^2 \quad (24)$$

$$S_{\text{cov}} = \begin{bmatrix} \text{Re}(\phi_j)^T \text{Re}(\phi_j) & \text{Re}(\phi_j)^T \text{Im}(\phi_j) \\ \text{Re}(\phi_j)^T \text{Im}(\phi_j) & \text{Im}(\phi_j)^T \text{Im}(\phi_j) \end{bmatrix} \quad (25)$$

式中 $\lambda_1$ 、 $\lambda_2$ 分别为 $S_{\text{cov}}$ 特征值的最大值和最小值。

$\text{MPD}(\phi_j) =$

$$\frac{\sum_{|\phi_{j_o}| > 0, o=1}^{n_y} \beta_o \arccos \left| \frac{\text{Re}(\phi_{j_o})V_{22} - \text{Im}(\phi_{j_o})V_{12}}{\sqrt{V_{12}^2 + V_{22}^2} |\phi_{j_o}|} \right|}{\sum_{o=1}^{n_y} \beta_o} \quad (26)$$

$$\begin{bmatrix} \text{Re}(\phi_j) & \text{Im}(\phi_j) \end{bmatrix} = U_2 S_2 V_2^T = U_2 S_2 \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{bmatrix}^T \quad (27)$$

式中: $\sum_{o=1}^{n_y} \beta_o \neq 0$ , $\beta_o$ 为权重向量。由式(27)进行奇异值分解可求得 $V_{12}$ 、 $V_{22}$ ,从而求出MPD值。

计算出两个振型指标,可以得到 $I_{\text{MPD},\tau}$ 、 $I_{\text{MPC},\tau}$ 两个模态验证指数

$$I_{MPD,\tau} = 1 - \frac{\sum_{j=1}^{N_\tau} MPD(\phi_j)}{N_\tau} \quad (28)$$

$$I_{MPC,\tau} = \frac{\sum_{j=1}^{N_\tau} MPC(\phi_j)}{N_\tau} \quad (29)$$

式中: $N_\tau$ 为簇类 $\tau$ 内极点的个数,两验证指数的加权常数 $\alpha$ 均等于1。对于真实模态,验证指数趋向于1,反之结果趋向于0。

此外,还考虑代表簇类分布的统计验证指数为

$$I_{f,\tau} = 1 - \frac{\text{std}(f_\tau)}{\bar{f}_\tau} \quad (30)$$

$$I_{\xi,\tau} = 1 - \frac{\text{std}(\xi_\tau)}{\bar{\xi}_\tau} \quad (31)$$

式中: $\text{std}(f_\tau)$ 、 $\text{std}(\xi_\tau)$ 分别为第 $\tau$ 簇类的频率、阻尼比的标准差, $\bar{f}_\tau$ 、 $\bar{\xi}_\tau$ 分别为第 $\tau$ 簇类的频率和阻尼比的平均值。频率和阻尼比验证指数的加权常数 $\alpha$ 分别为1和0.8。对于真实模态,验证指数趋向于1。得到4个验证指数后,由式(23)计算得到MQAC值。

完成稳定图极点的聚类后,通过如下准则对获得的簇类进行筛选,挑选出结构真实模态参数所在的簇类为

$$MQAC_\tau \geq 0.85 \quad (32)$$

$$N_\tau \geq 0.8 \times \delta \times \vartheta \quad (33)$$

式中: $N_\tau$ 为第 $\tau$ 簇类极点个数; $\delta$ 为所选系统阶次的数量; $\vartheta$ 为所选Hankel矩阵维度的数量。满足式(32)及式(33)的候选模态为真实模态。

### 4 方法流程

改进DBSCAN的自动工作模态分析方法的流程如下:

(1)将测量结果导入SSI-COV中得到初始的候选模态。

(2)根据软硬准则,设定容差对初始候选模态进行筛选;绘制以模态频率为横坐标,假定系统阶次 $o$ 的范围、通过式(17~19)确定Hankel矩阵维度 $v$ 的范围作为纵坐标的三维稳定图。

(3)以初步剔除虚假模态后的数据集为目标,对其进行DBSCAN分析。

通过式(21)确定Minpts的值进而得到 $k$ 值,之后根据拟合后的 $k$ -dist图自动计算得到 $\epsilon$ 。确定两个参数后,通过DBSCAN,再根据式(33),不统计极点筛选范围外的簇类,得到聚类结果。

(4)根据式(28~31)计算每一簇类的4个验证指数,由式(23)得到模态质量验证准则,并根据式(32)的筛选准则,自动剔除虚假模态,得到系统真

实模态。

### 5 仿真实例验证

#### 5.1 桁架结构仿真算例验证

利用桁架结构模型<sup>[23]</sup>验证基于改进DBSCAN的自动工作模态分析方法。桁架模型如图4所示,其弹性模量为 $6.98 \times 10^{10}$  Pa,材料密度为 $2770 \text{ kg/m}^3$ ,在节点1、2、3、4上加入454 kg的额外质量。算例中添加3种激励类型,分别是有色噪声、白噪声和谐波激励,其中谐波激励是由频率为12 Hz的正弦函数模拟,有色噪声由高斯白噪声经过二阶滤波器滤波得到,滤波函数如下

$$G(r) = \frac{1}{r^2 + 2\hat{\xi}_0 \hat{\omega}_0 r + \hat{\omega}_0^2} \quad (34)$$

式中: $r$ 为Laplace变换算子,阻尼比 $\hat{\xi}_0 = 0.5\%$ ,固有频率 $\hat{\omega}_0 = 40 \text{ Hz}$ 。

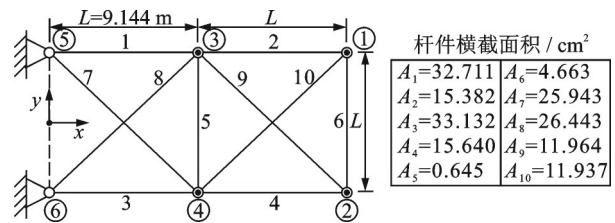


图4 桁架结构图<sup>[23]</sup>

Fig.4 Truss structure<sup>[23]</sup>

本文在节点1的 $x$ 和 $y$ 方向同时作用谐波激励和有色噪声激励,在节点2、3、4的 $x$ 和 $y$ 方向作用互不相关的白噪声激励。使用Newmark- $\beta$ 法,对桁架结构1、2、3、4号节点在 $x$ 和 $y$ 方向8个自由度的位移响应进行分析,时间步长为 $1/1024 \text{ s}$ ,采集时间320 s,随后对响应进行128 Hz的重采样,在重采样响应中加入不相关高斯序列模拟传感器测量噪声,信噪比为20 dB。

将测量结果导入SSI-COV中得到初始的候选模态。根据软硬准则,设定频率容差2%,阻尼比容差8%,MAC值容差5%,对初始候选模态进行筛选;绘制以模态频率为横坐标,假定系统阶次 $o$ 从18阶至32偶数次阶、通过式(17~19)确定Hankel矩阵维度 $v$ 从30~55为纵坐标的三维稳定图如图5所示,其中红色实心“o”为满足软准则的稳定

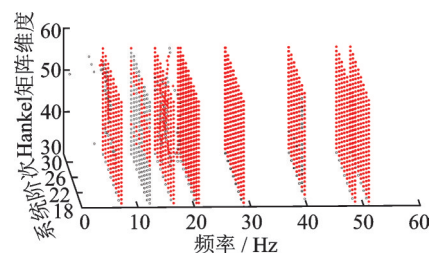


图5 桁架结构3D稳定图

Fig.5 3D stabilization diagram of truss structure

极点;黑色空心“o”为不稳定极点。

以初步剔除虚假模态后的数据集为目标,对其进行DBSCAN分析。通过式(21)确定Minpts=8,从而得到 $k=9$ ,根据拟合后的 $k$ -dist图自动计算可得 $\epsilon=0.1635$ ,如图6所示。

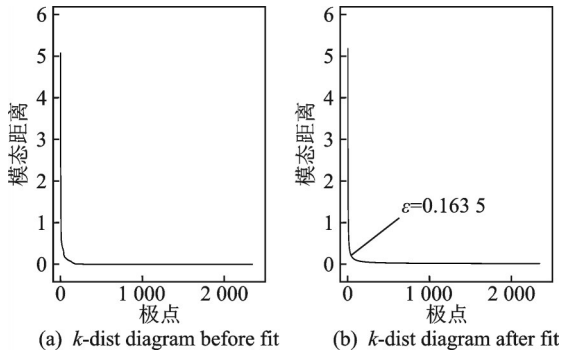


图6 桁架结构 $k$ -dist图

Fig.6  $k$ -dist diagrams of truss structure

确定两个参数后,通过DBSCAN,再根据式(33),不统计极点筛选范围外的簇类,得到聚类结果,如图7所示,其中噪声点表示没有归为任何簇类的极点。

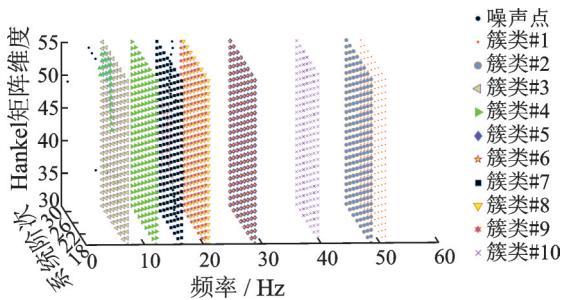


图7 桁架结构聚类结果

Fig.7 Clustering results of truss structure

根据式(28~31)计算每一簇类的4个验证指数,由式(23)得到模态质量验证准则,辨识结果如表1所示,其中11.99 Hz处模态以及40 Hz处模态的MQAC值分别为0.43和0.79,根据式(32),将其自动剔除。振型结果对比如图8所示,其中红色虚线为本文方法辨识振型,黑色实线为理论振型。

为进一步突出本文方法的优势,利用经典的基于层次聚类的AOMA方法对稳定图中的极点进行分析。在层次聚类AOMA方法中,模态距离仍通过式(20)计算,簇类筛选准则仍如式(32)和式(33)所示。此外,层次聚类AOMA方法中还需确定聚类树截断距离 $\mu$ ,该参数需根据不同应用场景进行人为挑选,自动性较差,且对辨识结果影响较大。通过试凑法选取 $\mu$ 值,分析结果如表1最后两列所示。可以看出,当 $\mu$ 取0.17时,层次聚类AOMA方法与本文方法结果相近,当 $\mu$ 取值为0.18

表1 桁架结构模态辨识结果

Table 1 Modal identification results of truss structure

阶次	理论模态 频率/Hz 阻尼比/%	本文方法辨 识频率/Hz 阻尼比/% MQAC	层次聚类法 辨识频率/Hz 阻尼比/% MQAC	
			$\mu=0.17$	$\mu=0.18$
			一	6.97 0.98
二	16.23 0.42	11.99 0.02 0.43	11.99 0.02 0.43	11.99 0.02 0.43
		16.23 0.43 0.91	16.23 0.40 0.91	16.23 0.40 0.91
三	20.33 0.32	20.32 0.34 0.98	20.33 0.34 0.87	20.33 0.34 0.87
		20.74 0.34 0.86	20.74 0.32 0.89	20.74 0.35 0.83
四	28.68 0.22	28.66 0.24 0.99	28.66 0.22 0.99	28.67 0.22 0.99
		28.73 0.24 0.99	28.73 0.23 0.99	28.73 0.23 0.99
五	48.56 0.18	40.00 0.54 0.79	40.00 0.54 0.79	40.00 0.54 0.79
		48.48 0.14 0.99	48.48 0.14 0.99	48.48 0.14 0.99
六	51.05 0.14	50.94 0.14 0.99	50.94 0.13 0.99	50.94 0.14 0.99

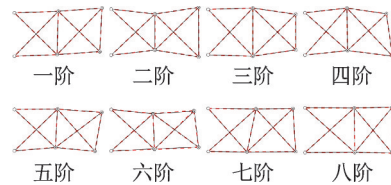


图8 桁架结构振型图

Fig.8 Mode shapes of truss structure

时,层次聚类AOMA方法辨识第4阶模态的MQAC值为0.83,按照式(32)应将其剔除,显然该阶模态为真实模态,由此可以看出经典基于层次聚类的AOMA方法自动性及辨识精度不足。而本文方法自动确定聚类参数,不需要人为干预,在保证辨识精度的前提下,提高了程序的自动性。

结果表明,本文方法可有效剔除由有色噪声、白噪声和谐波激励产生的虚假模态,能准确辨识密集模态,自动性较高,辨识结果与理论结果误差较小,从而得到系统真实模态。

### 5.2 广州塔实例验证

采用广州塔加速度响应数据对本文方法进行验证。共 20 个加速度计被部署在塔的 8 个位置,每个通道的测量数据长度均为 14 400,采样频率为 4 Hz,数据采集及加速度计位置部署<sup>[24-25]</sup>如图 9 所示。根据文献<sup>[24-25]</sup>可知,在 0~1 Hz 的频段内,0.043 Hz 对应的模态为环境激励产生的虚假模态。

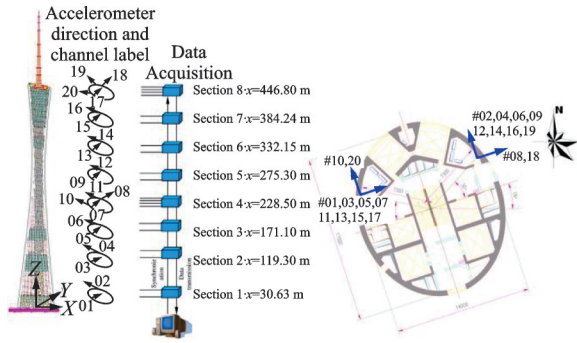


图 9 广州塔测量系统分布图<sup>[24-25]</sup>

Fig.9 Configuration of the measurement system deployed in Guangzhou Tower<sup>[24-25]</sup>

将传感器测量结果导入 SSI-COV 中得到初始的候选模态。根据软硬准则,设定频率容差 2%,阻尼比容差 8%,MAC 值容差 5%,对初始候选模态进行筛选;绘制以模态频率为横坐标,假定系统阶次  $o$  从 32 阶至 50 偶数次阶、通过式(17~19)确定 Hankel 矩阵维度  $v$  从 45~70 为纵坐标的三维稳定图如图 10 所示。其中红色实心“o”为满足软准则的稳定极点;黑色空心“o”为不稳定极点。

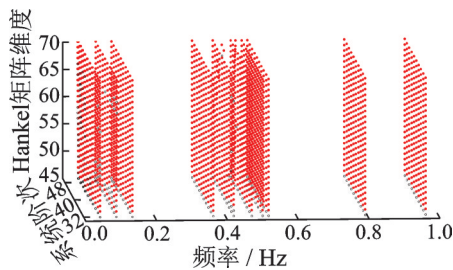


图 10 广州塔 3D 稳定图

Fig.10 3D stabilization diagram of Guangzhou Tower

以初步剔除虚假模态后的数据集为目标,对其进行 DBSCAN 分析。通过式(21)确定  $Minpts=8$ ,从而得到  $k=9$ ,根据拟合后的  $k$ -dist 图自动计算可得  $\epsilon=0.0388$ ,如图 11 所示。

确定两个参数后,通过 DBSCAN,再根据式(33),不统计极点筛选范围外的簇类,得到聚类结果,如图 12 所示,其中噪声点表示没有归为任何簇类的极点。

根据式(28~31)计算每一簇类的 4 个验证指数,由式(23)得到模态质量验证准则,辨识结果如表 2 所示,其中 0.045 Hz 处模态的 MQAC 值为

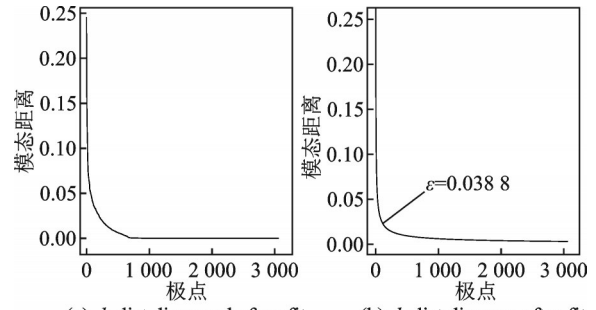


图 11 广州塔  $k$ -dist 图

Fig.11  $k$ -dist diagrams of Guangzhou Tower

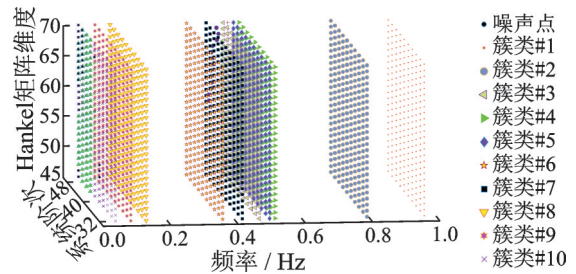


图 12 广州塔聚类结果

Fig.12 Clustering results of Guangzhou Tower

表 2 广州塔模态辨识结果

Table 2 Modal identification results of Guangzhou Tower

阶次	专家辨识	本文方法	层次聚类法
	频率 <sup>[26]</sup> /Hz 阻尼比/%	辨识频率/Hz 阻尼比/% MQAC	辨识频率/Hz 阻尼比/% MQAC
一	0.042	0.045	0.048
	0.094	5.520	6.220
	1.200	0.650	0.600
二	0.138	0.093	0.092
	0.48	1.300	1.290
三	0.366	0.920	0.920
	0.260	0.138	0.139
四	0.424	0.470	0.470
	0.210	0.48	0.970
五	0.475	0.366	0.366
	0.12	0.230	0.230
六	0.506	0.424	0.424
	0.100	0.160	0.160
七	0.522	0.980	0.980
	0.270	0.474	0.475
八	0.796	0.070	0.070
	0.230	0.990	0.990
九	0.966	0.505	0.506
	0.360	0.110	0.110
十		0.980	0.980
		0.522	0.522
		0.130	0.130
		0.980	0.980
		0.795	0.795
		0.190	0.190
		0.980	0.980
		0.965	0.964
		0.200	0.200
		0.980	0.980

0.65,根据式(32)将其自动剔除,振型结果如图13所示。

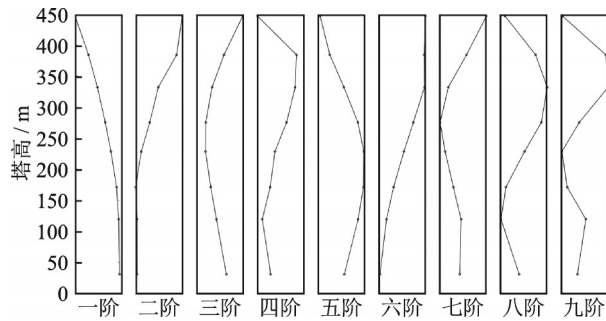


图13 广州塔(Y方向)振型图

Fig.13 Identification mode shapes of Guangzhou Tower(Y-axis)

将本文方法与基于层次聚类的AOMA辨识方法进行对比,根据聚类树选择截断距离 $\mu$ 为0.03,虽然层次聚类也能成功剔除虚假模态,但截断距离

$\mu$ 需要人为反复试凑,自动性较差。而本文方法自动确定聚类参数,不需要人为干预,在保证辨识精度的前提下,提高程序的自动性。

将本文方法辨识结果与专家辨识结果<sup>[26]</sup>进行对比,结果表明本文方法能有效剔除由环境激励产生的虚假模态,辨识误差较小,从而准确得到系统真实模态。

### 5.3 Z24桥实例验证

采用Z24桥加速度响应数据对本文方法进行验证,数据采集及加速度计位置部署<sup>[27]</sup>如图14所示,监测共有9个分布,第五分布有27个通道,其余分布有33个通道,其中有28个通道分布在桥面(第五分布仅有22个通道位于桥面),并将各分布的最后5个通道作为参考通道(3个位于桥面、2个位于桥墩),每个通道的测量数据长度均是21 839,采样频率33 Hz。

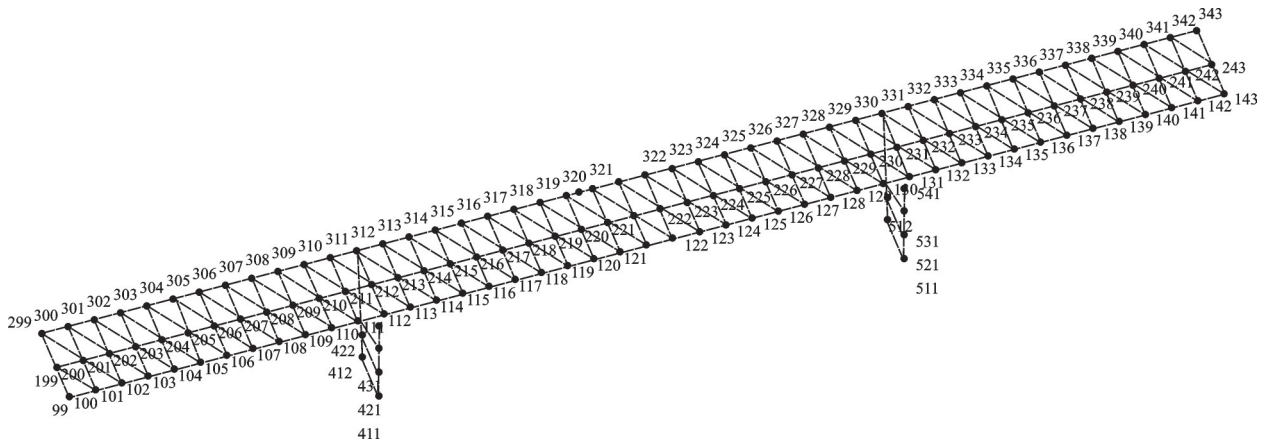


图14 Z24桥加速度传感器分布图<sup>[27]</sup>

Fig.14 Distribution of acceleration sensors on Z24 bridge<sup>[27]</sup>

将传感器测量结果导入SSI-COV中得到初始的候选模态。根据软硬准则,设定频率容差2%,阻尼比容差8%,MAC值容差5%,对初始候选模态进行筛选;绘制以模态频率为横坐标,假定系统阶次 $o$ 由26阶至44偶数次阶、通过式(17~19)确定Hankel矩阵维度 $v$ 由15~45为纵坐标的稳定图如图15所示,其中红色实心“o”为满足软准则的稳定极点;黑色空心“o”为不稳定极点。

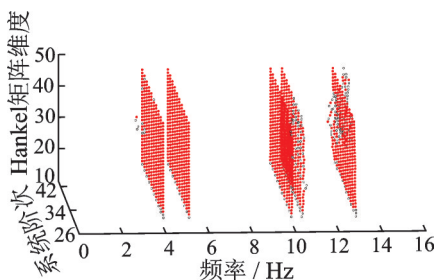


图15 Z24桥3D稳定图

Fig.15 3D stabilization diagram of Z24 bridge

以初步剔除虚假模态后的数据集为目标,对其进行DBSCAN分析。通过式(21)确定 $Minpts=8$ ,从而得到 $k=9$ ,根据拟合后的 $k$ -dist图自动计算可得 $\epsilon=0.0458$ ,如图16所示。

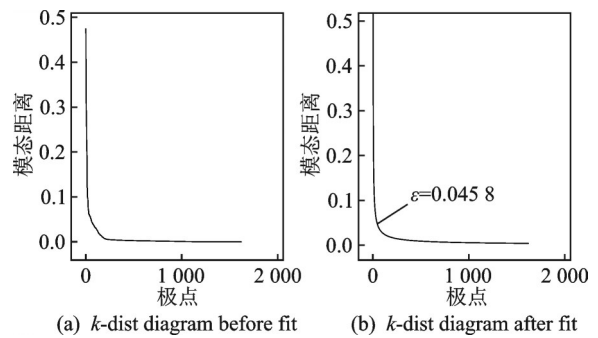


图16 Z24桥k-dist图

Fig.16 k-dist diagrams of Z24 bridge

确定两个参数后,通过DBSCAN,再根据式(33),不统计极点筛选范围外的簇类,得到聚类结果,如图17所示,其中噪声点表示没有归为任何簇



类的极点。

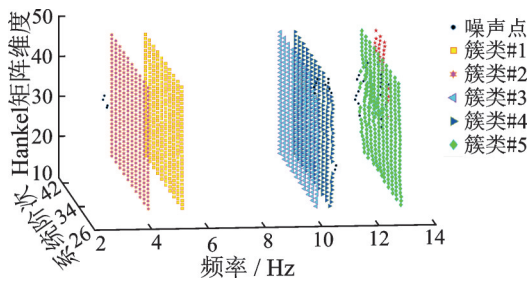


图 17 Z24 桥聚类结果

Fig.17 Clustering results of Z24 bridge

根据式(28~31)计算每一簇类的 4 个验证指数,由式(23)得到模态质量验证准则,辨识结果如表 3 所示,辨识振型如图 18 所示。

表 3 Z24 桥模态辨识结果

Table 3 Modal identification results of Z24 bridge

阶次	专家辨识	本文方法	层次聚类方法
	频率 <sup>[28]</sup> /Hz 阻尼比/%	辨识频率/Hz 阻尼比/% MQAC	辨识频率/Hz 阻尼比/% MQAC
一	3.87	3.87	3.87
	0.80	0.60 0.97	0.60 0.97
二	4.82	5.05	5.06
	1.40	1.36 0.98	1.36 0.98
三	9.77	9.79	9.79
	1.40	1.42 0.93	1.42 0.94
四	10.51	10.31	10.31
	1.30	1.17 0.91	1.16 0.91
五	12.42	12.67	12.70
	2.80	2.76 0.88	2.84 0.88

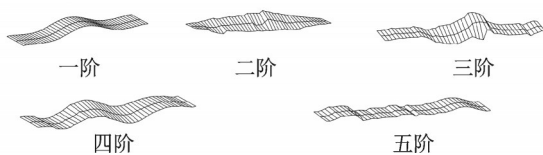


图 18 Z24 桥振型图

Fig.18 Identification mode shapes of Z24 bridge

将本文方法与基于层次聚类的 AOMA 辨识方法进行对比,根据聚类树选择截断距离  $\mu$  为 0.04,虽层次聚类也能成功剔除虚假模态,但截断距离  $\mu$  需要人为反复试凑,自动性较差。而本文方法自动确定聚类参数,不需要人为干预,在保证辨识精度的前提下,提高程序的自动性。

将本文方法的辨识结果与专家辨识结果<sup>[28]</sup>进行对比,结果表明本文方法辨识误差较小,能精准识别出系统的真实模态。

## 6 结 论

本文提出的改进 DBSCAN 的自动工作模态分析方法,首先是通过 SSI-COV 识别系统模态参数,根据软硬准则初步剔除虚假模态并绘制出三维稳定图;其次,对 DBSCAN 进行改进,确定 Minpts 后通过寻找  $k$ -dist 图的“肘点”自动确定敏感参数  $\epsilon$ ,提高了程序的效率和自动性;对候选模态进行聚类分析,根据模态质量评价准则,计算每一簇类模态的 MQAC 值,并根据制定的筛选准则,自动识别出系统的真实模态。最后应用本文方法对桁架结构仿真算例、Z24 桥和广州塔实例进行自动工作模态分析,证实本文方法可有效剔除谐波激励、有色噪声激励及测量噪声导致的虚假模态,并能够辨识密集模态。

### 参考文献:

[1] 房芳,郑辉,汪玉,等.机械结构健康监测综述[J].机械工程学报,2021,57(16):269-292.  
FANG Fang, ZHENG Hui, WANG Yu, et al. Summary of Structural health monitoring of machinery[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2021, 57(16): 269-292.

[2] 刘宇飞,辛克贵,樊健生,等.环境激励下结构模态参数识别方法综述[J].工程力学,2014,31(4):46-53.  
LIU Yufei, XIN Kegui, FAN Jiansheng, et al. Overview of structural modal parameter identification methods under environmental excitation[J]. Engineering Mechanics, 2014, 31(4): 46-53.

[3] 何立强,王鹏,胡学满.基于 Virtual. Lab 的燃油泵调节器结构的模态分析[J].南京航空航天大学学报,2021,53(4):537-545.  
HE Liqiang, WANG Peng, HU Xueman. Modal analysis of fuel pump regulator structure based on Virtual. Lab[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2021, 53(4): 537-545.

[4] FAN W. Vibration-based damage identification methods: A review and comparative study[J]. Structural Health Monitoring, 2011, 10(1): 83-111.

[5] LAU J, LANSLOTS J, PEETERS B, et al. Automatic modal analysis. Reality or myth[J]. VDI Berichte, 2007, 1982: 103.

[6] REYNDERS E, HOUBRECHTS J, DE ROECK G. Fully automated (operational) modal analysis[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2012, 29: 228-250.

[7] 王飞宇,胡志祥,黄潇.基于密度峰值聚类算法的模态参数识别[J].振动与冲击,2019,38(2):172-178.  
WANG Feiyu, HU Zhixiang, HUANG Xiao. Modal parameter identification based on density peak clustering algorithm[J]. Journal of Vibration and Shock, 2019,

- 38(2): 172-178.
- [8] 金建国. 聚类方法综述[J]. 计算机科学, 2014, 41(11): 288-293.  
JIN Jianguo. Overview of clustering methods[J]. Computer Science, 2014, 41(11): 288-293.
- [9] TRONCI E M, DE ANGELIS M, BETTI R, et al. Semi-automated operational modal analysis methodology to optimize modal parameter estimation[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2020, 187: 842-854.
- [10] ROSALINA E, SALIM F D, SELIS T. Automated density-based clustering of spatial urban data for interactive data exploration[C]//Proceedings of 2017 IEEE Conference on Computer Communications Workshops. Atlanta:IEEE, 2017: 8116392.
- [11] 徐帆. 基于密度聚类的结构模态参数自动识别[D]. 哈尔滨:哈尔滨工业大学, 2020.  
XU Fan. Automatic identification of structural modal parameters based on density clustering[D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2020.
- [12] BOROSCHEK R L, BILBAO J A. Interpretation of stabilization diagrams using density-based clustering algorithm[J]. Engineering Structures, 2019, 178: 245-257.
- [13] ZINI G, BETTI M, BARTOLI G. A quality-based automated procedure for operational modal analysis [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2022, 164: 108173.
- [14] VAN OVERSCHEE P, DE MOOR B. Subspace identification for linear systems: Theory - implementation - applications[M]. [S. l]: Springer Science & Business Media, 2012.
- [15] CHARBONNEL P É. Fuzzy-driven strategy for fully automated modal analysis: Application to the SMART2013 shaking-table test campaign[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2021, 152: 107388.
- [16] PASTOR M, BINDA M, HARČARIK T. Modal assurance criterion[J]. Procedia Engineering, 2012, 48: 543-548.
- [17] POURGHOLI M, GILARLUE M M, VAHDAINI T, et al. Influence of Hankel matrix dimension on system identification of structures using stochastic subspace algorithms[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2023, 186: 109893.
- [18] MARRONGELLI G, MAGALHÃES F, CUNHA Á. Automated operational modal analysis of an arch bridge considering the influence of the parametric methods inputs[J]. Procedia Engineering, 2017, 199: 2172-2177.
- [19] MAGALHÃES F, CUNHA A, CAETANO E. On-line automatic identification of the modal parameters of a long span arch bridge[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2009, 23(2): 316-329.
- [20] TRONCI E, DE ANGELIS M, BETTI R, et al. Multi-stage semi-automated methodology for modal parameters estimation adopting parametric system identification algorithms[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2022, 165: 108317.
- [21] BIRANT D, KUT A. ST-DBSCAN: An algorithm for clustering spatial-temporal data[J]. Data & Knowledge Engineering, 2007, 60(1): 208-221.
- [22] PAPPA R S, ELLIOTT K B, SCHENK A. Consistent-mode indicator for the eigensystem realization algorithm[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1993, 16(5): 852-858.
- [23] ARAÚJO I G, SÁNCHEZ J A G, ANDERSEN P. Modal parameter identification based on combining transmissibility functions and blind source separation techniques[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2018, 105: 276-293.
- [24] NI Y, XIA Y, LIAO W, et al. Technology innovation in developing the structural health monitoring system for Guangzhou New TV Tower[J]. Structural Control and Health Monitoring: The Official Journal of the International Association for Structural Control and Monitoring of the European Association for the Control of Structures, 2009, 16(1): 73-98.
- [25] GUO Y, KAREEM A, NI Y, et al. Performance evaluation of Canton tower under winds based on full-scale data[J]. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, 2012, 104: 116-128.
- [26] ZHANG F L, NI Y Q, NI Y C, et al. Operational modal analysis of Canton tower by a fast frequency domain Bayesian method[J]. Smart Structures and Systems, 2016, 17(2): 209-230.
- [27] 宋明亮. 环境激励下结构模态参数自动识别研究[D]. 杭州:浙江大学, 2017.  
SONG Mingliang. Research on automatic identification of structural modal parameters under environmental excitation[D]. Hangzhou: Zhejiang University, 2017.
- [28] REYNDERS E, DE ROECK G. Reference-based combined deterministic-stochastic subspace identification for experimental and operational modal analysis [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2008, 22(3): 617-637.