

DOI:10.16356/j.1005-2615.2024.04.003

## 高超声速带奇性轴外形热流准确预示的混合算法 研究与应用

谭国灼, 李沁, 黄潇, 翁谊辉, 严攀, 尤延铖  
(厦门大学航空航天学院, 厦门 361102)

**摘要:** 准确的热流预示在超/高超声速复杂流动数值模拟是一个难点问题。当计算网格中出现奇性轴时, 进一步增加了准确流场模拟、热流计算的难度。本文针对奇性轴在有限差分计算中出现的流场结构不稳定、热流预测误差大等难题, 在通量重构方法的基础上, 结合基于守恒变量的重构方法, 提出了一种采用高精度格式计算带奇性轴问题的混合算法。该算法在奇性轴附近使用基于守恒变量的重构方法, 有效反映奇性轴附近流场分布对奇性轴计算的影响, 能够有效解决奇性轴问题。采用该混合算法并对比应用 WENO3-JS 和高分辨率 WENO3-PRM<sub>1,1</sub><sup>2</sup> 格式, 本文对高超声速球头、HB-2、球钝锥及 Apollo 等外形绕流问题进行了数值模拟, 结果表明: 新方法能够有效解决含奇性轴问题计算中的流场结构不稳定问题, 并且可以实现准确的热流预示。

**关键词:** 高超声速; 气动热; 奇性轴; 混合算法; 高精度格式

中图分类号: V211 文献标志码: A 文章编号: 1005-2615(2024)04-0609-13

### Research on Hybrid Algorithm for Accurate Heat Flux Prediction on Hypersonic Flows with Singularity Axis

TAN Guozhuo, LI Qin, HUANG Xiao, WENG Yihui, YAN Pan, YOU Yancheng  
(School of Aerospace Engineering, Xiamen University, Xiamen 361102, China)

**Abstract:** Accurate heat flux prediction is a key problem in the numerical simulation of hypersonic flows. When the singularity axis appears in the grid, it further increases the difficulty of accurate flow simulation and heat flux calculation. Aiming at the problems of instability of flow structure and large errors of heat flux prediction in the finite difference calculation of singularity axis problems, a hybrid algorithm for solving the singularity axis problem with high-precision difference schemes is proposed by combining the flux reconstruction and conservation reconstruction. The algorithm is based on conservative variables reconstruction near the singularity axis, which can reflect the influence of the flow field distribution near the singularity axis. The algorithm can effectively solve the singularity axis problem in numerical simulation. Applying the hybrid algorithm with WENO3-JS and WENO3-PRM<sub>1,1</sub><sup>2</sup> scheme, the numerical simulations of hypersonic flow around sphere, HB-2, sphere cone and Apollo are carried out. The results show that the new method can effectively solve the problems of flow instability with singularity axis, and can achieve accurate heat flux prediction.

**Key words:** hypersonic; aerodynamic heat; singularity axis; hybrid algorithm; high accuracy scheme

高超声速飞行器具备飞行速度快、突防成功率高等特点, 已经成为世界航空航天强国重点研发的关键型号。轴对称旋成体外形是高超声速飞行器的典型外形之一, 其 CFD 准确预示对高超声速飞

收稿日期: 2024-02-21; 修订日期: 2024-05-13

通信作者: 李沁, 男, 教授, 博士生导师, E-mail: q.li@xmu.edu.cn。

引用格式: 谭国灼, 李沁, 黄潇, 等. 高超声速带奇性轴外形热流准确预示的混合算法研究与应用[J]. 南京航空航天大学学报, 2024, 56(4): 609-621. TAN Guozhuo, LI Qin, HUANG Xiao, et al. Research on hybrid algorithm for accurate heat flux prediction on hypersonic flows with singularity axis[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2024, 56(4): 609-621.

行器研制至关重要。为了获得准确的摩阻和热流,贴体结构网格是数值模拟常采用的网格之一。在结构网格中,表面网格在头部汇集成一点,称为奇性点;在空间上形成体网格后,这些点就构成了奇性轴。在此轴线上网格导数雅可比 $J^{-1}=0$ ,在CFD计算中需要特殊处理,从而产生奇性轴问题。为消除网格奇性对计算结果的影响,工程上通常采用分区对接网格以及有限体积法避免奇性轴的出现<sup>[1-4]</sup>,但高于二阶有限体积法的构造和实施比较困难,特别是在多维问题上,其计算精度的提高会导致计算量的大幅增加,因此不易实现三阶以上精度的数值模拟。如果采用有限差分方法进行分区对接网格计算,则当高超声速流动的强间断出现在对接边界附近时,高精度非线性差分格式通量计算常会导致边界虚拟节点上的流场变量求解困难,不能保证通量守恒、影响计算稳定性和收敛性等<sup>[3]</sup>。如果网格包含奇性轴,传统有限差分计算通常采取令奇性轴上点的流向通量为零的基本处理方法,此外采用轴上的流场参数由相邻(两层)网格节点参数插值后再周向求和平均得到。无迎角(Angle of attack, AoA)时采用这样的方法似乎是合理的,但当轴附近的网格较稀时,所得计算结果往往具有较大误差<sup>[5]</sup>,出现误差向奇性轴集中、计算出现波动等现象,这在热流计算结果上尤为突出;当有迎角时,由于物理空间内奇性轴的面积为零,虽然实际流动穿过奇性轴,但是由于通量为零的奇性轴处理使得轴上变量没有直接参与流动方程计算,计算缺乏轴附近流场的直接影响,其结果可能导致奇性轴附近流场出现结构失真或不稳定<sup>[6]</sup>。

另一方面,有限差分方法由于形式简洁且不断有创新算法被提出,往往有助于提高高超声速摩阻、热流预示精度,尤其是降低驻点热流的计算误差,从而推进该高超声速计算难点问题的解决。最有代表性的有限差分方法是文献[7]提出的加权本质无波动格式WENO-JS,该类方法也一直是CFD研究的热点。Henrick等发现五阶WENO格式存在临界点降阶问题,为了进一步提高WENO-JS的实际计算精度和分辨率,其基于映射函数法发展了WENO-M格式<sup>[8]</sup>。在此基础上,Feng等<sup>[9]</sup>和Li等<sup>[10]</sup>分别开展了基于多项式的映射函数研究,其中Li等<sup>[10]</sup>强调了在分段区域构建高阶多项式的思路,提出一类具有很强调节性能的新分段有理多项式映射函数及WENO3-PRM<sub>1,1</sub><sup>2</sup>格式,该格式具有良好的结构分辨率和计算稳定性,已经在二维和三维锥形激波与管道轴对称边界层干扰的数值模拟<sup>[11]</sup>,高超声速升力体外形摩阻、热流的预示<sup>[12]</sup>中开展相关计算应用,前者得到清晰的流场波系结构

和新流场干扰结构模型,后者采用新格式比较不同气体模型和滑移边界条件的影响。此外本文也注意到WENO类格式的若干研究新成果,如WENO-P<sup>[13]</sup>,三阶尺度无关格式WENO-ZM<sup>[14]</sup>,TEN0<sup>[15]</sup>,与低价WENO格式混合以提高稳定性的WENO-AO<sup>[16]</sup>,还有为了提高鲁棒性提出的正保持技术<sup>[17-18]</sup>等。正如文献[10]指出,提高分辨率的同时保持计算稳定性对实际应用来说至关重要。因此,如果能够进一步发展有效求解奇性轴的有限差分算法并与有限差分方法的新进展相结合,无疑可以有助于在高超声速带奇性轴问题的摩阻、热流预示能力,同时也推进奇性轴问题数值计算研究取得进展。

本文提出了一种混合算法来解决有限差分格式奇性轴计算问题,具体地:在奇性轴附近采用基于守恒变量重构的有限差分方法,有效反映奇性轴上变量与周围流场之间的相互影响;在离开奇性轴的区域采用传统基于通量重构的有限差分法。由于基于守恒变量重构避免了通量计算中奇性轴面积为零而造成信息传递不充分问题,从而较好地解决了奇性轴在计算中出现的问题。基于上述算法,本文采用改进的WENO3-PRM<sub>1,1</sub><sup>2</sup>作为守恒变量或通量的重构格式,实现了一种奇性轴计算的混合算法。通过对典型外形算例的计算,验证了混合算法在解决奇性轴计算中出现流场不稳定问题的有效性,并且取得了较好的热流计算结果。

## 1 奇性轴计算的混合算法

### 1.1 奇性轴传统处理方法

参照文献[19]给出奇性轴示意图及坐标示意图,如图1所示。奇性轴在物理空间为一条直线,在计算空间内为一个平面,如图1中AA'BB'所示。在本文的分析及计算中,约定 $\xi$ 对应流向网格线并以 $i$ 指标表示,其中 $i=1$ 代表奇性轴, $\eta$ 对应法向网格线并以 $j$ 指标表示, $\zeta$ 方向对应于周向网格线并以 $k$ 指标表示。奇性轴上的网格点虽然理论上绕轴旋转,但是 $x$ 、 $y$ 、 $z$ 不发生改变,从而有 $x_\zeta=y_\zeta=z_\zeta=0$ ,故 $\hat{\xi}_{x,y,z}=\hat{\eta}_{x,y,z}=0$ <sup>[19]</sup>,其对应的几何意义是物理空间内奇性轴的面积为零,因此在传统差分方法中常采用令奇性轴上通量为0的方法。计算结果表明,零迎角时,这种处理方法可以得到正常的速度、压力、温度等流场参数,但壁面热流计算结果仍不准确;有迎角时,奇性轴附近的压力、温度等参数分布出现明显的失真,驻点热流预示误差较大。

针对奇性轴在物理空间内的面积为0、网格导数有奇性问题,传统奇性轴计算方法如下:

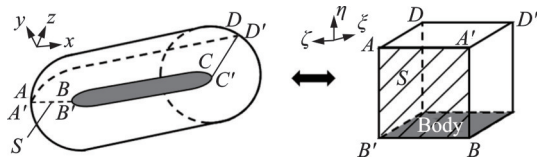


图 1 奇性轴示意图及坐标示意图<sup>[19]</sup>

Fig.1 Singularity axis diagram and coordinate diagram<sup>[19]</sup>

(1)轴上变量求解一般通过插值得到。首先针对某 $(j, k)$ 指标位置,沿 $i$ 方向插值得到轴上 $(i=1)$ 的参量,不同 $k$ 位置可能插值给出不同的轴上参量;其次,将得到的值沿周向(遍历 $k$ 取值的所有点)取代数平均后作为轴上的值。以变量 $u$ 为例,插值有两种方式:(a)零梯度条件: $(\partial u / \partial \xi)_{i=1} = 0$ ,可以采用一阶或二阶差分离散,其中一阶离散即直接赋值,这在高超声速情况下通常被采用;(b)等变化率,即轴外第二点的流向二阶导数为零,具体实现为: $u_i = 2u_{i+1} - u_{i+2}$ 。

(2) $i=3/2$ 位置网格导数计算。由于计算需要求取 $i=3/2$ 数值通量,故仍要计算 $i=3/2$ 处的网格导数。有两种方法可以得到相应网格导数:一种方法是直接计算导数。此时 $i=3/2$ 处网格点没有奇性,可以采用常规方法计算得到;另一种方法是将轴上 $i=1$ 的网格导数与 $i=2$ 处的网格导数进行简单平均,这就需要给出奇性轴上网格导数的表达,可以采用如下形式: $\hat{\xi}_x = \hat{\xi}_y = \hat{\xi}_z = 0, \hat{\eta}_x = \hat{\eta}_y = \hat{\eta}_z = 0, \hat{\xi}_x = y_\xi z_\eta - y_\eta z_\xi, \hat{\xi}_y = x_\eta z_\xi - x_\xi z_\eta, \hat{\xi}_z = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi, J^{-1} = \epsilon, \epsilon = 1 \times 10^{-20}$ 。其中约定带“ $\hat{\cdot}$ ”的物理量吸收了雅可比的倒数 $J^{-1}$ ,例如: $\hat{\xi}_x = J^{-1} \xi_x$ 。

### 1.2 奇性轴混合算法

前面分析指出,奇性轴传统求解方法引起轴附近流场失真,其来源是由于轴上变量不是直接由流动方程求解得到,因而缺乏轴附近流场对其影响。为解决这个问题,本文采用守恒变量重构来避免奇性轴给基于通量计算带来困难,具体介绍如下:

以一维标量双曲守恒律方程为例

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

式中: $u(x, t)$ 为守恒变量; $f(u(x, t))$ 描述其通量, $t \in [0, +\infty]$ 及 $x \in [x_0, x_N]$ 。理论上,若 $f(x) = \frac{1}{\Delta x} \int_{x-\Delta x/2}^{x+\Delta x/2} h(x') dx'$ ,则 $f'(u_j) = \frac{(h_{j+1/2} - h_{j-1/2})}{\Delta x}$ 。显然, $f(x)$ 是 $h(x)$ 的网格平均,基于网格节点上的通量 $f(x_j)$ ,给出 $h(x)$ 在网格边界的值 $h(x_{j\pm 1/2})$ 的近似,这一过程称为“重构”。守恒型差分格式表示为

$$\frac{\partial f(u_j)}{\partial x} = \frac{(\hat{f}_{j+1/2} - \hat{f}_{j-1/2})}{\Delta x} \quad (2)$$

式中: $\hat{f}(x)$ 为 $h(x)$ 的数值近似,其精度关系是 $h(x) = f(x) + O(\Delta x^2)$ 。更完整的精度公式为<sup>[7]</sup>

$$\hat{f}_{j+1/2} = f_{j+1/2} - \frac{1}{24} \Delta x^2 \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_{j+1/2} + \frac{7}{5760} \Delta x^4 \left( \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} \right)_{j+1/2} + O(\Delta x^6) \quad (3)$$

为构造关于 $h(x_{j\pm 1/2})$ 的近似 $\hat{f}(x_{j\pm 1/2})$ ,通常有两种做法:(1)直接采用基于通量 $f(x_j)$ 的Lagrange插值、Newton插值多项式(高精度格式)等求出(重构)出 $\hat{f}(x_{j\pm 1/2})$ 值以满足精度关系,即通量重构。(2)采用 $\hat{h}_{j\pm 1/2} \approx f(\hat{u}_{j\pm 1/2})$ , $\hat{u}_{j\pm 1/2}$ 为重构得到的数值守恒变量,其求解(重构)在形式上可采用高精度重构格式,从而得到数值通量 $f(\hat{u}_{j\pm 1/2})$ ,这种做法本文称为守恒变量重构。NASA的CFD求解软件OVERFLOW采用的便是基于守恒变量重构的方法。为达到更高精度,通常在重构过程采用高精度(三阶及以上)格式,但此时采用高精度(三阶及以上)重构算法并不意味着计算达到了高阶精度,即基于守恒变量采用高精度重构格式无法达到真正意义上的高阶精度。其原因可由如下命题给出:

命题:基于守恒变量重构采用高精度重构格式的有限差分方法,其精度最大只有二阶。

命题证明如下:

文献[7]中给出了数值通量的精度关系式,对于二阶以上重构格式 $\hat{f}$

$$\hat{f}_{j+1/2} = f_{j+1/2} - \frac{1}{24} \Delta x^2 \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_{j+1/2} + O(\Delta x^4)$$

由于

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial u} &= \left( \frac{\partial f}{\partial u} \right)_{j+1/2} + \left( \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \right)_{j+1/2} (u - u_{j+1/2}) + O(\Delta u^2) = \\ &\left( \frac{\partial f}{\partial u} \right)_{j+1/2} + \left( \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \right)_{j+1/2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{j+1/2} (x - x_{j+1/2}) + \\ &O(\Delta x^2) \end{aligned}$$

以及

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial u} \right)$$

于是

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_{j+1/2} &= \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{j+1/2} \left( \frac{\partial f}{\partial u} \right)_{j+1/2} + \\ &\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{j+1/2}^2 \left( \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \right)_{j+1/2} + O(\Delta x) \end{aligned}$$

因此有

$$\hat{f}_{j+1/2} = f_{j+1/2} - \frac{1}{24} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{j+1/2} \left( \frac{\partial f}{\partial u} \right)_{j+1/2} \Delta x^2 - \frac{1}{24} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{j+1/2}^2 \left( \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \right)_{j+1/2} \Delta x^2 + O(\Delta x^4)$$

定义与 $\hat{f}_{j+1/2}$ 形式相同的重构格式 $\hat{u}_{j+1/2}$ ,类似成立

$$\hat{u}_{j+1/2} = u_{j+1/2} - \frac{1}{24} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{j+1/2} \Delta x^2 + O(\Delta x^4)$$

因此

$$f(\hat{u}_{j+1/2}) = f(u_{j+1/2}) + \left( \frac{\partial f}{\partial u} \right)_{j+1/2} \cdot \left( -\frac{1}{24} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{j+1/2} \Delta x^2 \right) + O(\Delta x^4)$$

由此可得

$$\hat{f}_{j+1/2} - f(\hat{u}_{j+1/2}) = -\frac{1}{24} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{j+1/2}^2 \left( \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \right)_{j+1/2} \Delta x^2 + O(\Delta x^4)$$

命题得证。

由上述命题可知,基于守恒变量重构的方式最大精度只能达到二阶,基于守恒变量重构采用高精度重构格式,并不能提高计算精度,因此,在奇性轴计算中,轴附近采用基于守恒变量重构不需要采用五阶或更高的精度。

### 1.3 三阶精度 WENO3-PRM<sub>1,1</sub><sup>2</sup> 格式

为实现高超声速气动力、热的准确预示,需要采用高精度、高分辨率格式。在实际应用中,多采用三阶及以上的高精度格式,特别在气动热计算中,格式的特性对计算结果有很大影响,其中三阶加权本质无波动格式在超声速激波、气动热计算方面有较好的表现,得到广泛使用。为提高计算精度,本文重构格式采用如下改进的具有良好的分辨率和鲁棒性的三阶 WENO3-PRM<sub>1,1</sub><sup>2</sup> 格式。

考虑守恒型差分格式(式(1)),以 WENO-JS 为例,在传统基于通量重构的方法中 $\hat{f}_{j+1/2} = \sum_{k=0}^{r-1} \omega_k q_k^r$ ,  $q_k^r = \sum_{l=0}^{r-1} \alpha_{kl}^r f(u_{j-r+k+l+1})$ 。其中 $r$ 为子模板数量以及各子模板包含的网格点数, $\omega_k$ 为非线性加权系数, $\alpha_{kl}^r$ 为子模板的系数,非线性加权系数可由线性加权系数 $d_k^r$ 计算得到

$$\omega_k = \frac{\alpha_k}{\sum_{l=0}^{r-1} \alpha_l}, \alpha_k = \frac{d_k^r}{(\varepsilon + IS_k^{(r)})^2} \quad (4)$$

$$IS_k^{(r)} = \sum_{m=0}^{r-2} c_m^r \left( \sum_{l=0}^{r-1} b_{kml}^r f(u_{j-r+k+l+1}) \right)^2 \quad (5)$$

式中: $\varepsilon$ 为一小量以防止分母为零; $b_{kml}^r, c_m^r, d_k^r$ 等系数的取值均在文献[10]附录 I 给出。取 $r=2$ 时,即为 WENO3-JS 格式。

传统 WENO-JS 格式在一阶临界点时会发生降阶问题,从而无法达到目标精度,常见的解决方法包括映射函数法和改进光滑度量因子法等。Li 等<sup>[10]</sup>基于映射函数法,发展了具有优良性能的分段有理多项式映射函数 PRM,提出了具有增强分辨率,精度和鲁棒性的格式。映射函数 PRM 的形式为

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{PRM}_{n,m;m;c_1,c_2}^{L,n+1} = d_k + \frac{(\omega - d_k)^{n+1}}{(\omega - d_k)^n + (-1)^{1+n} c_2^L (\omega - d_k) \omega^{m_1} + (-1)^n c_1^L \omega^{m+1}} \\ \text{PRM}_{n,m;m;c_1,c_2}^{R,n+1} = d_k + \frac{(\omega - d_k)^{n+1}}{(\omega - d_k)^n + c_2^R (\omega - d_k)(1 - \omega)^{m_1} + c_1^R (1 - \omega)^{m+1}} \end{array} \right. \quad (6)$$

式中具有若干的自由参数 $c_1, c_2, m_1$ 可以自由调节,因此 PRM 映射函数具有良好的可调节性。在文献中[10],研究给出了 WENO-PRM<sub>1,1</sub><sup>2</sup> 中映射函数自由参数的取值。当 $n=1$ 时,PRM 映射函数与 WENO3-JS 结合,将式(4)中非线性加权系数 $\omega_k$ 映射得到一个新加权系数,从而构成 WENO3-PRM<sub>1,1</sub><sup>2</sup> 格式。为研究不同取值对气动热预示的影响,本文给出了另一组不同自由参数取值并以“Test”作为标识,如表 1 所示。进一步通过采用绕中空柱长裙流动算例,研究自由参数对气动热等预示的影响。以下给出文献[20]中若干典型算例的计算结果比较,以显示 WENO3-PRM<sub>1,1</sub><sup>2</sup> 格式在高超声速数值模拟中的优良性能,如图 2、3 所示。

表 1 三阶 PRM<sub>1,1</sub><sup>2</sup> 及 Test 映射函数参数表

Table 1 Parameter table of third-order PRM<sub>1,1</sub><sup>2</sup> and Test mapping functions

Function	$d_i$	L/R	$n$	$c_1$	$c_2$	$m_1$
PRM <sub>1,1</sub> <sup>2</sup> [10]	$d_0=1/3$	L	1	1	$7 \times 10^7$	5
		R	1	1	$3 \times 10^6$	5
	$d_i=2/3$	L	1	1	$1 \times 10^5$	4
		R	1	1	$3 \times 10^6$	4
Test	$d_0=1/3$	L	1	1	$1 \times 10^4$	4
		R	1	1	$1 \times 10^4$	4
	$d_i=2/3$	L	1	1	$1 \times 10^4$	4
		R	1	1	$1 \times 10^4$	4

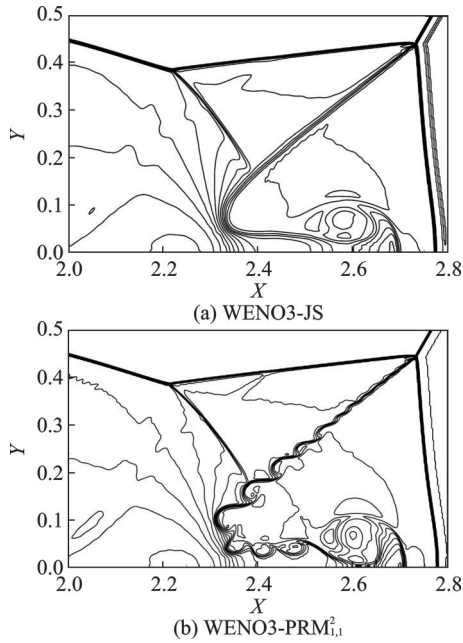


图 2 双马赫反射问题<sup>[20]</sup>

Fig.2 Double mach reflection problem<sup>[20]</sup>

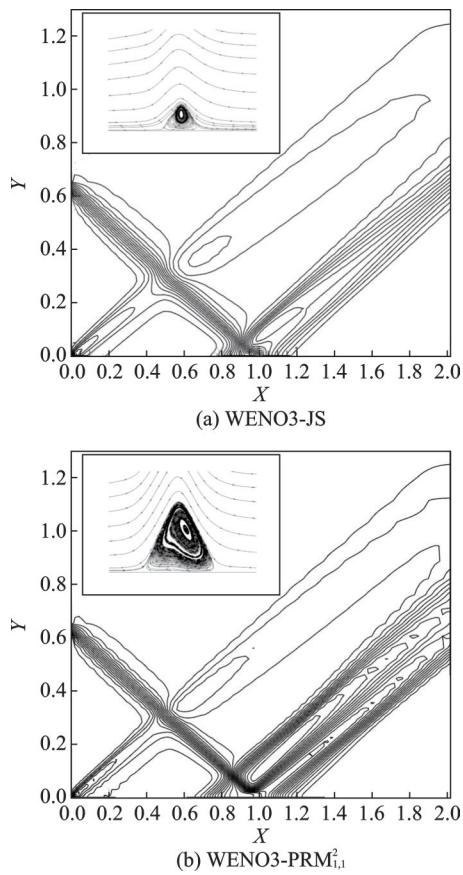


图 3 平板激波/层流边界层干扰<sup>[20]</sup>

Fig.3 Plate shock/laminar boundary-layer interference<sup>[20]</sup>

图 4 中给出映射函数  $PRM_{1,1}^2$  与“Test”的比较,其中“Exact”表示恒等映射关系。图中结果表明,“Test”在线性权  $d_i$  处的平坦度和在端点处收敛到恒等映射的速度都逊于  $PRM_{1,1}^2$ ,这预示后者具有在光滑区域具有更好的分辨率以及在间断点附近更好的稳定性。

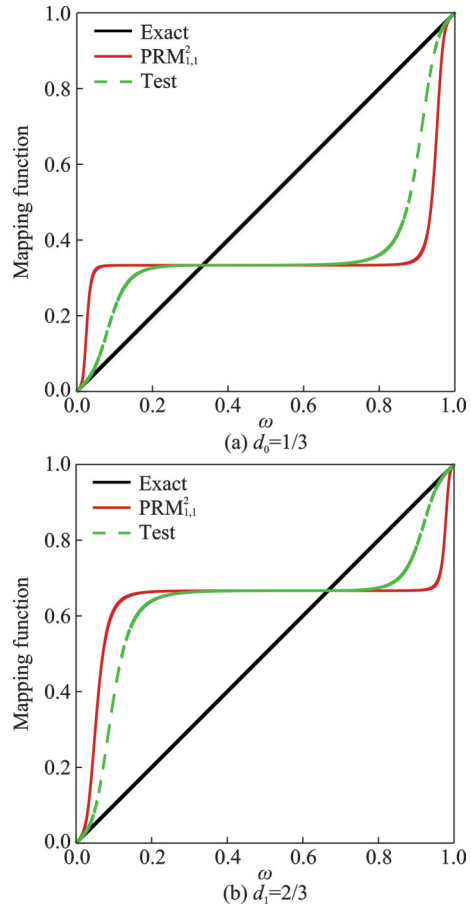


图 4 不同映射函数比较

Fig. 4 Comparison of different mapping functions

为了比较 WENO3-PRM 格式的自由参数对气动热等预示的影响,本文采用绕中空柱长裙流动算例进行数值模拟。计算条件<sup>[20]</sup>为:来流马赫数  $Ma_\infty=11.35$ ,单位雷诺数  $Re=3.596 \times 10^5$ ,来流温度  $T_\infty=79\text{ K}$ ,壁面温度  $T_w=294\text{ K}$ ,来流为氮气,计算格式采用 WENO3-JS、WENO3- $PRM_{1,1}^2$  以及“Test”。图 5 和图 6 分别给出了壁面热流系数  $C_H$  和壁面压力系数  $C_p$  对比,可以看出 WENO3-JS 的热流系数和压力系数与实验值(EXP)误差较大,其预示的分离区显著偏小,WENO3- $PRM_{1,1}^2$  则给出了相对最为准确的分离预示及热流、压力分布,而作为对比的“Test”格式,其结果虽然较 WENO3-JS 有一定改进,但仍不如 WENO3- $PRM_{1,1}^2$  结果准确,因此计算表明,文献[10]给出的 WENO3- $PRM_{1,1}^2$ ,参数取值使其具有较高的热流等预示精度。此外,文献[10]中还给出了详尽分析与更多计算比较,具体细节可参见文献。因此,本文三阶 WENO3- $PRM_{1,1}^2$  的映射函数参数采用文献[10]的推荐取值。

为进一步提高奇性轴混合算法的计算精度,本文将三阶精度 WENO3- $PRM_{1,1}^2$  用于混合算法中的重构格式,具体地:在 1.1 节奇性轴传统处理方法

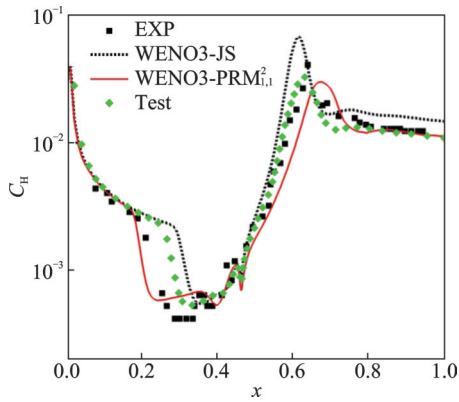


图5 绕中空柱长裙流动壁面热流系数分布对比

Fig.5 Comparison of wall heat flux coefficient distribution around hollow cylinder/flare flow

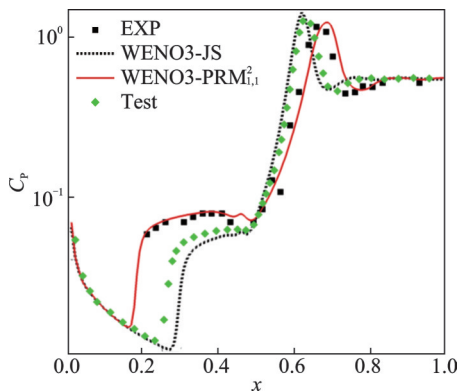


图6 绕中空柱长裙流动壁面压力系数分布对比

Fig.6 Comparison of wall pressure coefficient distribution around the hollow cylinder/flare flow

的基础上,采用高精度格式 WENO3-PRM<sub>1,1</sub><sup>2</sup> 作为重构格式,在奇性轴附近的计算域(如:  $i \leq i_{sa}$ ,  $i_{sa} = 10$ ,  $j \in [1, j_{max}]$ ,  $k \in [1, k_{max}]$ , 以下简称为  $i \leq i_{sa}$ ), 计算采用基于守恒变量重构的方式,用重构后的数值守恒变量来计算数值通量  $f(\hat{u}_{j+1/2})$ , 以解决奇性轴附近计算的流场失真等问题;在此外区域,计算采用基于通量重构的方式,即直接重构数值通量  $\hat{f}_{j+1/2}$ 。值得指出的是,当仅考虑流向的跨轴流动,即仅在  $\xi$  方向的数值通量采用基于守恒变量重构的方法计算时,流场参数分布仍可能在奇性轴附近出现波动;而当流向  $\xi$  和周向  $\zeta$  方向的数值通量均采用基于守恒变量重构的方法时,才能得到正确的流场分布结果。因此,本文为了简化计算,轴附近计算域在 3 个方向上均采用基于守恒变量重构的方法。为了比较,本文计算在基于守恒变量和通量重构的格式中还采用了 WENO3-JS。此外,混合算法中采用守恒变量重构的奇性轴区域(或  $i$  指标范围)确定方面,建议采用如下方式:计算无迎角时,守恒变量重构的范围可以取  $i_{sa} = 10$ ;有迎角时,则可以适当增加采用守恒变量重构的区域,尽可能使驻点包含在  $i < i_{sa}$  的指标范围内。

## 2 混合算法在高超声速球头热流预示中的验证

为了验证混合算法,本文首先对带奇性轴的球头开展计算,采用 WENO3-JS 或 WENO3-PRM<sub>1,1</sub><sup>2</sup> 作为重构格式,通量分裂采用 Steger-Warming 格式。时间推进采用 LU-SGS 格式。计算条件为<sup>[21]</sup>:来流马赫数  $Ma_\infty = 10$ ,基于球头半径  $R$  的雷诺数  $Re = 1 \times 10^5$ ,来流温度  $T_\infty = 79$  K,壁面温度  $T_w = 294$  K,  $AoA = 0^\circ, 30^\circ$ 。

本文通过改变网格数量和网格分布研究考察采用 WENO3-PRM<sub>1,1</sub><sup>2</sup> 的奇性轴混合算法的网格适应性,给出两类网格如表 2 所示:(1)第一类网格的数量保持不变(流向  $61 \times$  法向  $101 \times$  周向  $37$ ),壁面第一层网格最小高度  $\Delta_1/R$  设为  $1 \times 10^{-5}$ 、 $2 \times 10^{-5}$ 、 $8 \times 10^{-5}$ ,共计 3 套网格;(2)第二类网格的周向和流向网格分布不变,在保持  $\Delta_1/R = 2 \times 10^{-5}$  的情况下,法向网格数量分别为 71、101、131,共计 3 套网格。采用以上两类网格完成迎角  $0^\circ$  和  $30^\circ$  计算。

表 2 计算网格设置

Table 2 Setting of computing meshes

Case	第一层网格最小高度 $\Delta_1/R$	网格数量 (流向 $\times$ 法向 $\times$ 周向)
1	1.0E-5	$61 \times 101 \times 37$
2	2.0E-5	$61 \times 101 \times 37$
3	8.0E-5	$61 \times 101 \times 37$
4	2.0E-5	$61 \times 71 \times 37$
5	2.0E-5	$61 \times 131 \times 37$

图 7 给出了采用第一类网格,不同位置角度 ( $\theta$ ) 处的球头热流分布  $Q_w$ ,结果显示远离驻点区域,不同高度  $\Delta_1/R$  网格得到的热流分布差异不大;在驻点附近,当来流迎角为  $0^\circ$  时,  $\Delta_1/R = 1.0E-5$  和  $2.0E-5$  网格得到的热流分布明显与实验值更为吻合;  $\Delta_1/R = 8.0E-5$  得到热流偏离实验值;当来流迎角为  $30^\circ$  时,与  $0^\circ$  迎角计算结果类似,  $\Delta_1/R$  越小,其球头热流分布与实验值更为接近。图 8 给出了第二类网格得到的球头热流分布以显示计算网格收敛性,具体包括壁面热流分布  $Q_w$  与对称子午面  $y=0$  压力分布  $p$ 。从图 8(a,b) 可以看出,无论迎角是  $0^\circ$  还是  $30^\circ$  工况,随着法向网格数量的增大,热流计算显示出网格收敛性,并逐渐向实验值收敛;如图 8(c,d) 所示,子午面  $y=0$  压力分布情况表明,无论来流迎角是  $0^\circ$  还是  $30^\circ$ ,法向网格数量较少时 (Case 4) 计算得到的激波较厚,而 Case 2 和 Case 5 的压力分布符合一致且基本不再变化,这表明法向网格数量的增加,在数值上实现对激波预示的网格收敛。因此本节计算网格数量为  $61 \times 101 \times 37$ 。

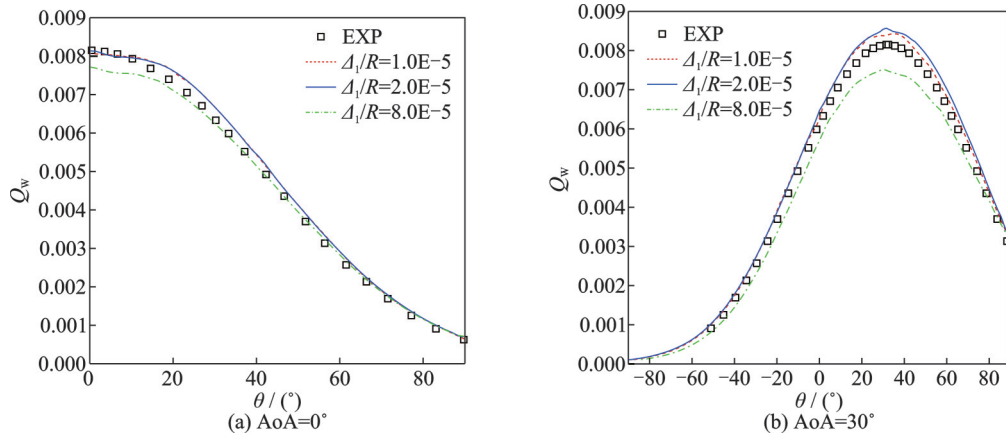


图 7 采用 WENO3-PRM<sub>1,1</sub><sup>2</sup> 的奇性轴混合算法在不同  $\Delta_1/R$  网格上计算的壁面热流分布

Fig.7 Wall heat flow distribution calculated by singularity axis hybrid algorithm with WENO3-PRM<sub>1,1</sub><sup>2</sup> on grid of different  $\Delta_1/R$

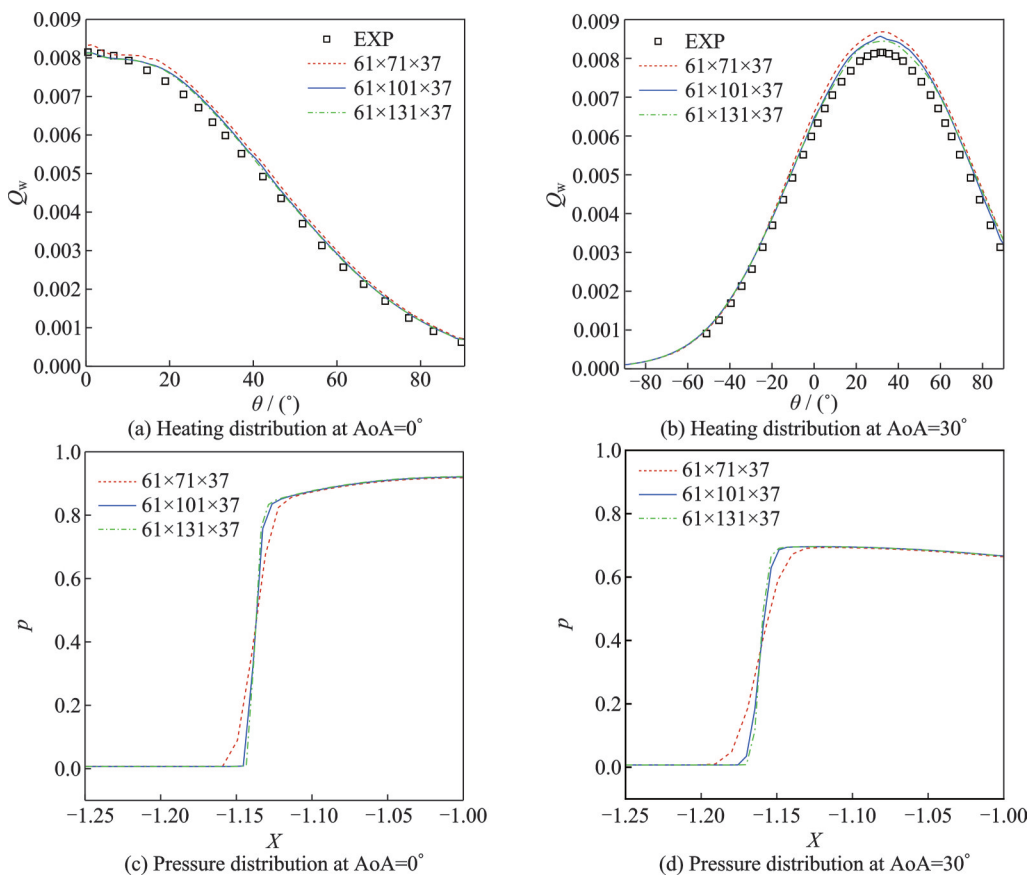


图 8 采用 WENO3-PRM<sub>1,1</sub><sup>2</sup> 的奇性轴混合算法在不同网格的绕球头壁面热流分布与沿对称子午面  $y=0$  直线压力分布

Fig.8 Wall heat flux distribution and pressure distribution around sphere at symmetric meridian plane where  $y=0$  calculated by singularity axis hybrid algorithm

在  $0^\circ$  迎角计算中,包含奇性轴在内的整个计算域仅采用基于通量重构的方法,并设置轴上的通量为零。为简洁起见,本文仅给出 WENO3-JS 作为重构格式的传统通量方法和奇性轴混合算法结果。计算结果如图 9(a)所示,传统通量方法计算得到的速度、压力等流场参数均正常,然而物面热流的计算结果却出现了较大波动。如前面分析,其原因是奇性轴上缺乏足够的耗散,虽然宏观上流场结构正常,但奇性轴附近的局部流场的温度梯度却

有较大的波动,进而在热流等难点预示上产生失真结果。作为对比,混合算法计算(具体在轴附近  $i \leq 10$  的范围内采用基于守恒变量重构)的物面热流如图 9(b)所示,可见混合算法消除了轴上的奇性,可以计算出正常的热流分布结果。

为了显示不同重构格式在混合算法中的差异,图 10 和图 11 分别给出 WENO3-JS 和 WENO3-PRM<sub>1,1</sub><sup>2</sup> 在  $0^\circ$  迎角下的壁面压力  $p_w$  和热流分布  $Q_w/(\rho u_\infty^3)$  对比。由图可见,两种格式的壁面压无

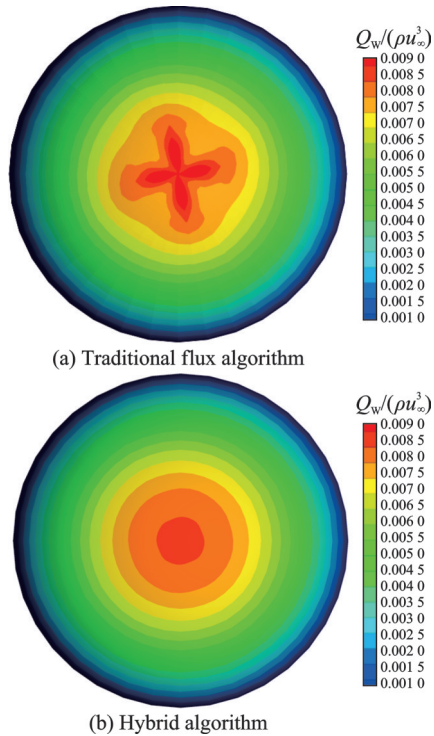


图9 0°迎角壁面无量纲热流  $Q_w/(\rho U_\infty^3)$  等值线分布(WENO3-JS)

Fig.9 Distribution of dimensionless wall heat flux  $Q_w/(\rho U_\infty^3)$  contour lines at AoA=0° (WENO3-JS)

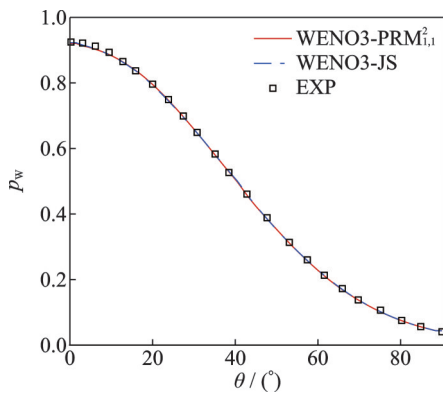


图10 0°迎角壁面压力分布(混合算法)

Fig.10 Wall pressure distribution at AoA=0° (Hybrid algorithm)

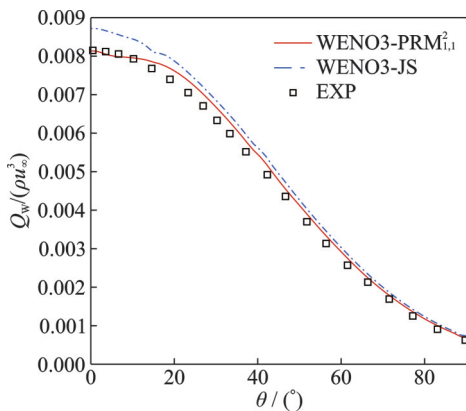


图11 0°迎角壁面无量纲热流  $Q_w/(\rho U_\infty^3)$  分布(混合算法)

Fig.11 Dimensionless wall heat flux  $Q_w/(\rho U_\infty^3)$  distribution at AoA=0° (Hybrid algorithm)

量纲结果几乎完全相同、与实验结果符合良好；而在热流计算方面，WENO3-PRM<sup>2</sup><sub>1,1</sub>的热流结果则与实验值符合更好，尤其是在驻点热流上，WENO3-PRM<sup>2</sup><sub>1,1</sub>的误差小于0.5%，而WENO3-JS的误差约7%。结果说明，混合算法采用改进的高精度WENO3-PRM<sup>2</sup><sub>1,1</sub>重构格式在热流预示难点问题上优于WENO3-JS格式。

对于来流存在迎角的情况，本文针对30°迎角工况分别采用传统通量方法和混合算法进行计算比较。为简洁，两种方法均采用WENO3-JS作为重构格式。图12(a)给出传统通量方法计算的压力云图及等值线分布。从图上可以看出，奇性轴附近的压力分布存在局部失真现象，其源于有迎角时，传统方法中奇性轴通量为零使得轴附近的流场信息传递不够充分；混合方法在轴附近采用基于守恒变量重构，轴上的参量参与相邻点的计算，则可得到正确的流场结构，如图12(b)所示。

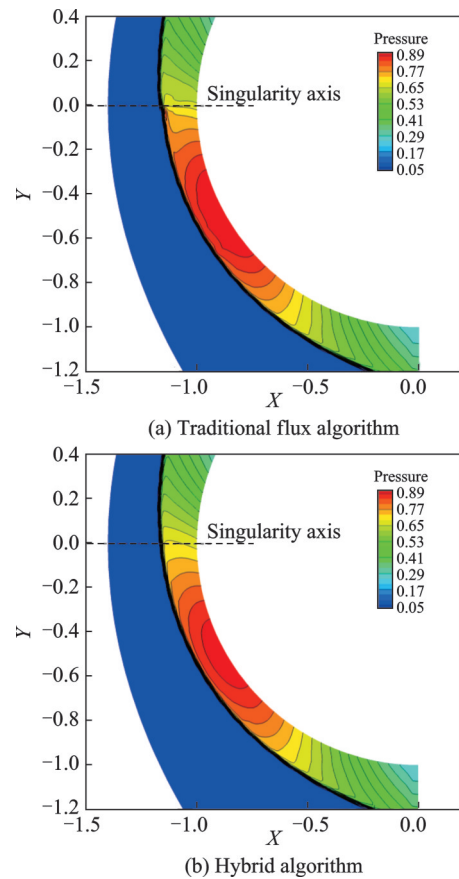


图12 30°迎角压力分布云图(WENO3-JS)

Fig.12 Pressure distribution cloud diagram at AoA=30° (WENO3-JS)

为了显示在混合方法中，奇性轴区域取值  $i_{sa}$  对热流预示的影响，本文分别采用不同  $i_{sa}$  进行计算比较，这里重构格式进一步采用了WENO3-PRM<sup>2</sup><sub>1,1</sub>。图13(a)显示，如果当  $i_{sa} = 10$  时(此时驻点位于基于通量重构的区域内)，热流预示出



现了较大的误差,定性上表现为周向对称性被破坏,定量上驻点热流值误差达到了约 12%;而当扩大使用守恒变量重构方法的范围: $i_{sr} = 10$ (此时驻点将位于基于守恒变量重构的区域内),物面热流计算结果恢复正常,如图 13(b)和图 13(c)所示。结果说明,当计算有迎角时且驻点位于通量重构区域时,其驻点热流计算更容易失稳且误差较大;当扩大采用守恒变量重构的区域使得驻点位于其中时,得到的热流结果更加合理、准确。

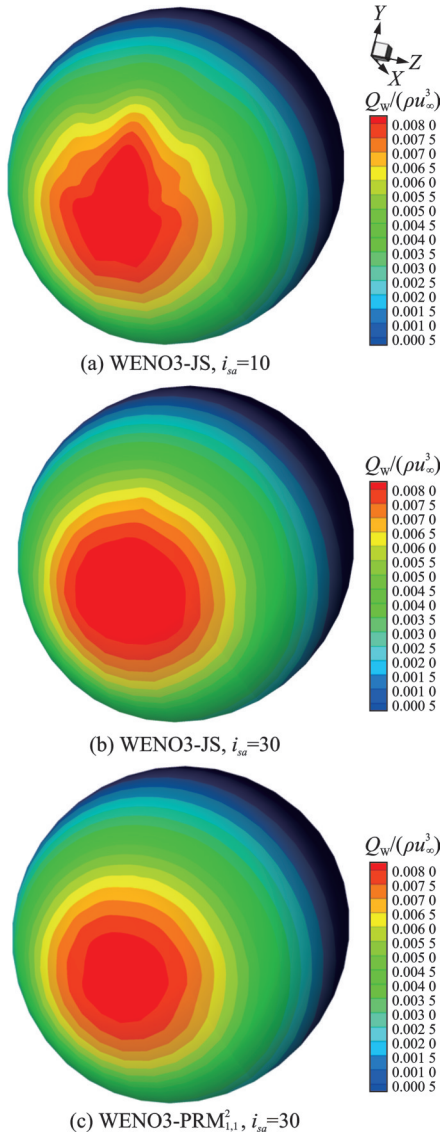


图 13 30°迎角壁面无量纲热流  $Q_w/(\rho_{\infty}^3)$  等值线分布(混合算法)

Fig.13 Distribution of dimensionless wall heat flux  $Q_w/(\rho_{\infty}^3)$  contour lines at AoA=30° (Hybrid algorithm)

图 14 给出了对称面上的热流分布  $Q_w$  对比,图中实验值结果由 0°迎角的实验值转换而来。结果显示,相较于 WENO3-JS、WENO3-PRM<sup>2</sup><sub>i,1</sub> 的热流预示结果更接近实验值的结果,说明混合方法中采用高精度的 WENO3-PRM<sup>2</sup><sub>i,1</sub> 可以进一步提高热流预示精度。

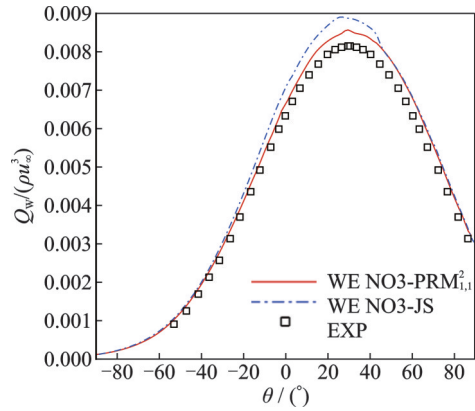


图 14 30°迎角壁面无量纲热流  $Q_w/(\rho_{\infty}^3)$  分布(混合算法, WENO3)

Fig.14 Dimensionless wall heat flux  $Q_w/(\rho_{\infty}^3)$  distribution at AoA=30° (Hybrid algorithm, WENO3)

### 3 混合算法在典型高超声速带奇性轴问题中的应用

根据混合算法在高超声速球头热流预示得出的研究成果及结论,对钝锥-柱-裙(HB-2)<sup>[22]</sup>、球钝锥<sup>[23]</sup>和 Apollo<sup>[24]</sup>飞船开展计算应用,采用 WE-NO3-PRM<sup>2</sup><sub>i,1</sub> 作为重构格式,WENO3-JS 格式作为比较使用,通量分裂采用 Steger-Warming 格式,时间推进采用 LU-SGS 格式。

#### 3.1 高超声速钝锥-柱-裙绕流

钝锥-柱-裙(HB-2)外形如图 15 所示。本文选取了文献[22]中的工况 Case 2 与 Case 3 进行数值模拟,计算条件如表 3 所示,其中 Case 2 只有热流的实验数据,而 Case 3 只有压力的实验数据。来流迎角为 0°,网格数量为 128×81×19。计算采用混合算法,由于来流迎角为零,驻点在壁面奇点附近,因此轴附近  $i \leq 10$  的范围内采用基于守恒变量重构,此外区域采用基于通量重构。

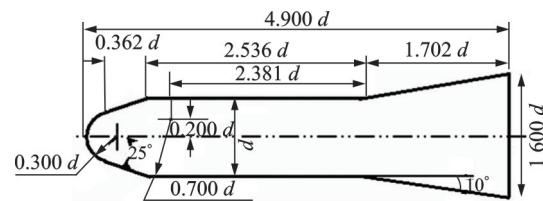


图 15 HB-2 外形示意图

Fig.15 Profile diagram of HB-2

表 3 HB-2 来流条件

Table 3 HB-2 inflow conditions

Case	$Ma_{\infty}$	$Re$	$P_{\infty}/Pa$	$\rho_{\infty}/(kg \cdot m^{-3})$	$T_{\infty}/K$
2	9.59	$2.1 \times 10^6$	75	$5.0 \times 10^{-3}$	52
3	7.50	$1.3 \times 10^5$	210	$9.1 \times 10^{-3}$	138.9

图 16 给出 Case 2 工况的马赫数,图 17 给出 Case 2 两种格式的壁面热流对比,其中  $Q_0$  为驻点

热流分布。可以看出,混合算法能够很好地处理奇性轴问题,计算的壁面热流,特别是头部奇性轴区域,与实验结果符合较好,WENO3-PRM<sub>1,1</sub><sup>2</sup>格式的热流计算结果略微更接近实验值。图18给出Case 3两种格式的壁面压力分布,均与实验值拟合较好,其中P<sub>0</sub>为驻点压强。

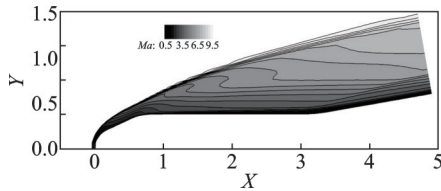


图16 Case 2 马赫数云图(WENO3-PRM<sub>1,1</sub><sup>2</sup>)

Fig.16 Mach number cloud diagram of Case 2 (WENO3-PRM<sub>1,1</sub><sup>2</sup>)

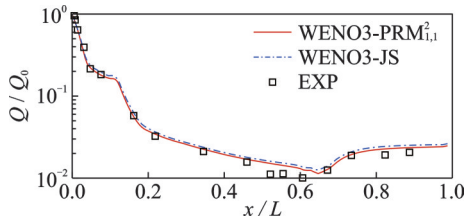


图17 Case 2 壁面热流分布图

Fig.17 Wall heat flux distribution of Case 2

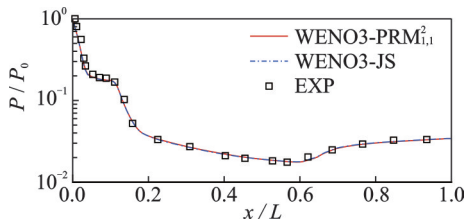


图18 Case 3 壁面压力分布

Fig.18 Wall pressure distribution of Case 3

### 3.2 球钝锥绕流

球钝锥外形如图19所示,其半锥角为15°,头部球半径为R<sub>n</sub>=0.028 m,总长度为16倍R<sub>n</sub>。计算条件<sup>[23]</sup>为:来流马赫数Ma<sub>∞</sub>=10.6,雷诺数Re=4.7×10<sup>6</sup>,来流温度T<sub>∞</sub>=47.3 K,壁面温度T<sub>w</sub>=294.44 K,来流迎角为20°,计算网格数量为97×69×181。

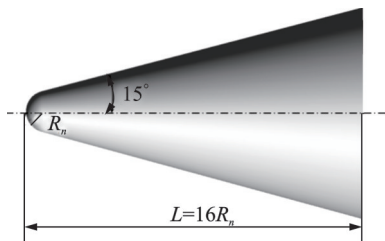


图19 球钝锥外形示意图

Fig.19 Profile diagram of sphere-cone

前面分析指出,当来流存在迎角时,为使头部热流计算正常,驻点应当在守恒变量重构区域内,

因此选取轴附近*i*≤15的范围内采用基于守恒变量重构的方法。图20给出了WENO3-JS和WENO3-PRM<sub>1,1</sub><sup>2</sup>背风区极限流线分布对比,两种格式均能清楚分辨到背风区的一次分离;WENO3-PRM<sub>1,1</sub><sup>2</sup>格式还能清楚地捕捉到流动的二次分裂,显示其比WENO3-JS格式具有更高的分辨率。

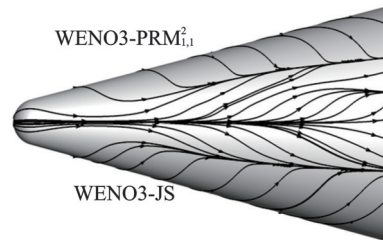
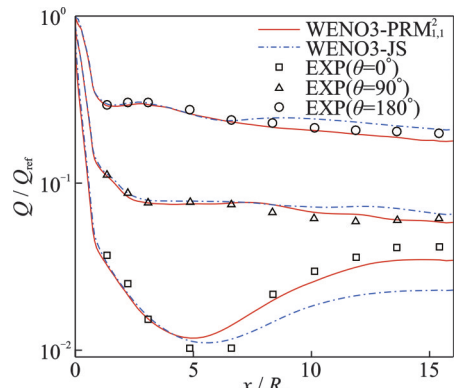


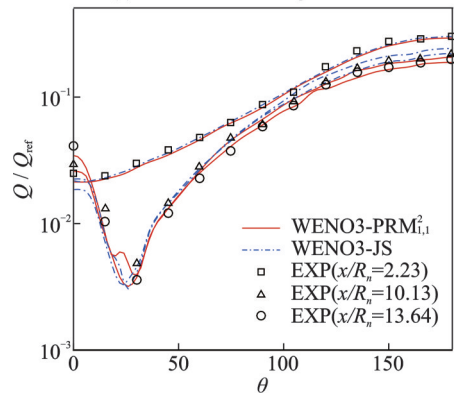
图20 球钝锥背风区表面流线分布对比

Fig.20 Comparison of surface streamline distribution in leeward area of sphere-cone

图21给出了两种格式计算得到的物面热流值比较,其中0°为背风面,180°为迎风面,参考热流Q<sub>ref</sub>=2×10<sup>5</sup> W/m<sup>2</sup>。由图可见,在球钝锥的尾部背风区,WENO3-JS格式的热流计算值与实验值误差较大,而WENO3-PRM<sub>1,1</sub><sup>2</sup>格式结果则与实验值较为接近,其结果明显优于WENO3-JS格式。



(a) Streamwise heating distributions



(b) Circumferential heating distributions

图21 球钝锥绕流的物面热流与实验结果对比

Fig.21 Comparison of surface heat flux with experimental results of sphere-cone

### 3.3 高超声速绕 Apollo 飞船流动的数值模拟

Apollo 飞船是典型的高超声速轴对称外形之一,其外形及尺寸如图 22 所示,所有尺寸单位均为 inch。Apollo 几何外形在肩部后方采用倒锥结构,单块三维网格可由二维网格旋转得到,网格前后均存在一个奇性轴。这种双奇性轴的网格如果在数值计算中没有得到很好的处理,将会影响轴附近流场结构以及壁面热流的预示,因此算例为混合算法提供了一个很好的应用测试。针对该外形,本文选取如下计算条件<sup>[24]</sup>:来流马赫数  $Ma_\infty=10$ ,迎角  $\alpha=33^\circ$ ,雷诺数  $Re=1.31\times 10^6$ ,参考长度为垂直于  $x$  轴的最大横截面直径,来流温度  $T_\infty=50\text{ K}$ ,壁面温度  $T_w=1\ 500\text{ K}$ 。计算网格数量为  $70\times 71\times 41$ 。计算采用混合算法,前奇性轴附近  $i\leq 15$ 、后奇性轴取  $i\leq 6$  的范围内采用基于守恒变量重构的方法,此外区域采用通量重构方式。表 4 给出了计算的 Apollo 飞船气动系数与风洞试验<sup>[24]</sup>、文献<sup>[25]</sup>数值计算的结果对比,其中混合算法采用 WENO3-PRM<sub>1,1</sub> 作为重构格式,结果显示混合方法计算结果与风洞实验值相当接近。

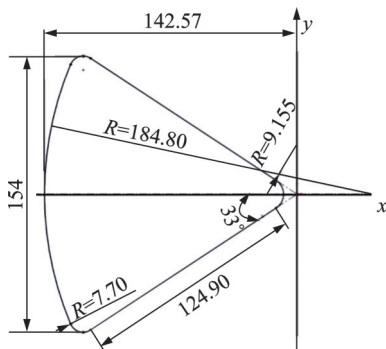


图 22 Apollo 计算模型

Fig.22 Apollo computational model

表 4 Apollo 飞船气动系数与实验值比较

Table 4 Comparison of Apollo aerodynamic coefficients with experimental values

气动系数	风洞试验结果 <sup>[24]</sup>	数值计算结果 <sup>[25]</sup>	混合算法结果
$C_A$	1.100	1.070	1.096
$C_N$	0.135	0.136	0.135
$C_D$	0.990	0.981	0.992
$C_L$	0.480	0.468	0.483
$L/D$	0.475	0.482	0.485

前文分析当来流存在迎角时,奇性轴的存在导致采用传统通量方法无法获得奇性轴附近正确的流场结构,如图 23(a)所示  $33^\circ$ 迎角绕 Apollo 流动采用传统通量方法计算的结果,在轴附近流场压力分布出现局部失真,而在轴附近  $i\leq 15$  的范围内采

用基于守恒变量重构的混合算法则避免了轴附近网格奇性的影响,可以计算出正常的压力分布结果,如图 23(b,c)所示。这里为比较,计算还采用了 WENO3-JS。

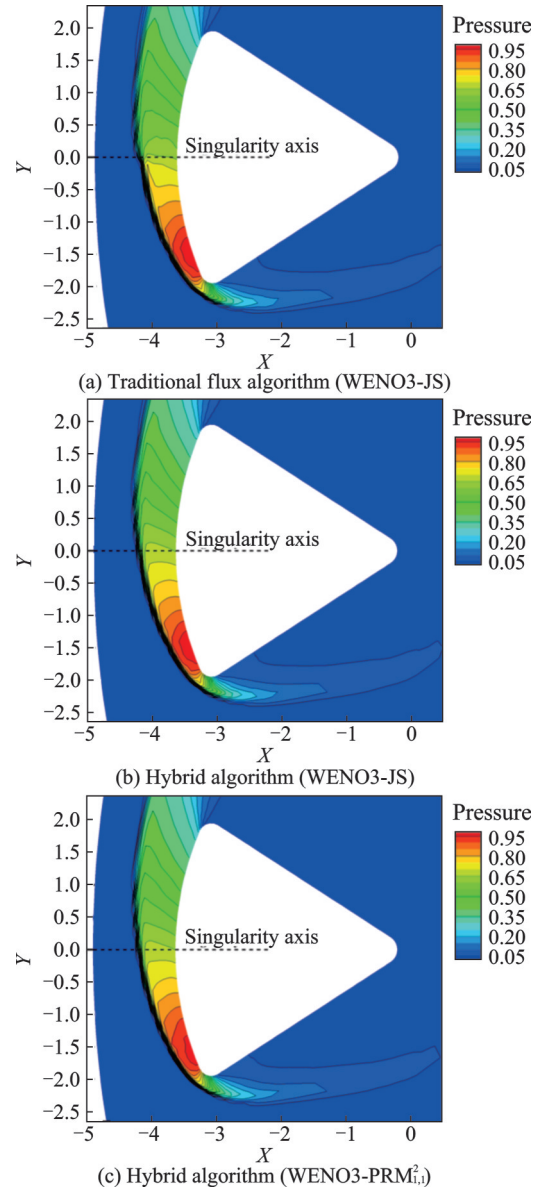


图 23  $33^\circ$ 迎角绕 Apollo 流动压力分布云图

Fig.23 Pressure distribution cloud diagram of Apollo at  $AoA=33^\circ$

图 24 给出了  $33^\circ$ 迎角 Apollo 飞船绕流的壁面无量纲热流分布,图 24(a)可以看出传统通量方法的壁面热流等值线在轴附近集中并出现失真的分布。而图 24(b, c)则显示,混合算法计算给出轴附近的热流分布恢复正常,热流等值线在壁面奇性轴位置处较为光滑。此外,相比与 WENO3-JS 计算, WENO3-PRM<sub>1,1</sub> 格式的热流计算结果在对称子午面和飞船肩部分布更为集中,整个热流的变化更加光滑,更好地描述了热流在肩部的快速变化,其热流预示总体上更为合理和准确。

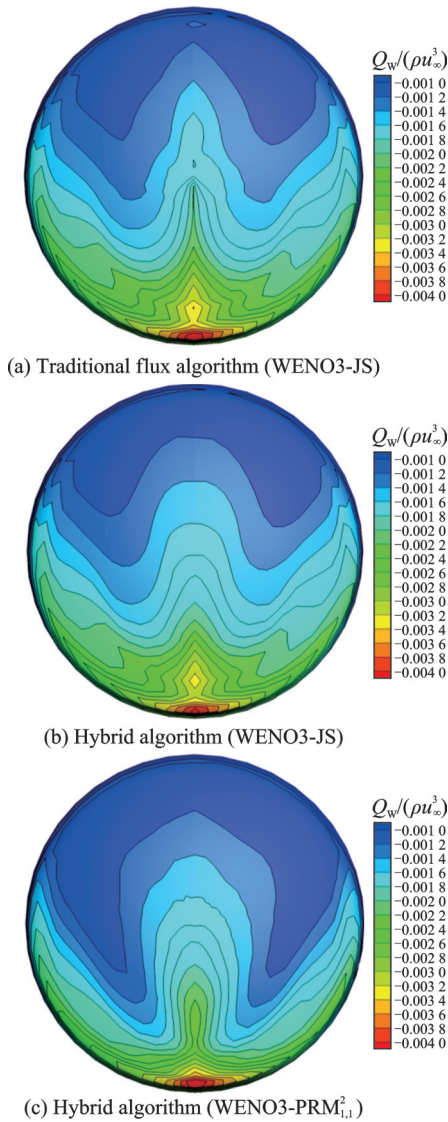


图24 33°迎角绕 Apollo 流动壁面无量纲热流  $Q_w/(\rho u_\infty^3)$  分布

Fig.24 Dimensionless wall heat flux  $Q_w/(\rho u_\infty^3)$  distribution of the flow around Apollo at AoA=33°

## 4 结 论

本文针对有限差分框架下奇性轴网格计算,以及高精度热流预示问题,提出了一种采用高精度格式计算带奇性轴问题的混合算法,研究和分析了基于通量重构和守恒变量重构两种方法对奇性轴计算、热流计算的影响,得到以下结论:

(1)混合算法在奇性轴附近采用基于守恒变量重构的方法,可以得到奇性轴附近正确的流场结构、热流分布;同时在离开奇性轴的区域采用基于通量重构的方法,可以应用高精度算法以提高热流预示精度。

(2)球头、Apollo 飞船等算例计算结果表明,奇性轴及其附近流场采用基于守恒变量重构的方法时,可以有效避免热流计算出现的失真或不稳定问

题;在有迎角时可以得到正确的流场结构,当驻点在基于守恒变量重构的区域内,驻点热流计算更为准确。

(3)各算例计算结果显示,混合算法中采用 WENO3-PRM<sub>1,1</sub><sup>2</sup> 格式在气动热预示上相较于 WENO3-JS 格式更为准确。

## 参考文献:

- [1] 毛枚良, 邓小刚, 向太平. 分区对接网格算法的应用研究[J]. 空气动力学学报, 2002, 20(2): 179-183.  
MAO Meiliang, DENG Xiaogang, XIANG Daping. Applied study of method for multi-block patched mesh [J]. Acta Aerodynamica Sinica, 2002, 20(2): 179-183.
- [2] 杨小亮. 飞行器多自由度耦合摇摆运动数值模拟研究[D]. 长沙:国防科学技术大学, 2012.  
YANG Xiaoliang. Numerical investigation of aircraft rock in multiple degrees of freedom [D]. Changsha: National University of Defense Technology, 2012.
- [3] 毛枚良, 陈坚强, 邓小刚, 等. 高超声速分区对接网格算法研究[J]. 空气动力学学报, 2003, 21(2): 173-181.  
MAO Meiliang, CHEN Jianqiang, DENG Xiaogang, et al. Study of algorithm for multi-block patched mesh applied to hypersonic flow [J]. Acta Aerodynamica Sinica, 2003, 21(2): 173-181.
- [4] 王惠玲, 李玉亮, 倪鸿礼, 等. 爆炸波与超声速运动物体相互作用的数值研究[J]. 实验流体力学, 2006(2): 1-6, 17.  
WANG Huiling, LI Yuliang, NI Hongli. Numerical simulation of interaction of blast wave and supersonic moving body [J]. Journal of Experiments In Fluid Mechanics, 2006(2): 1-6, 17.
- [5] 程用胜, 刘焯, 薛雷平. 采用 NND 方法计算三维喷管气流场[J]. 力学季刊, 2005(4): 529-533.  
CHENG Yongsheng, LIU Hua, XUE Leiping. Numerical simulation of three dimensional nozzle flows by using NND difference scheme [J]. Chinese Quarterly of Mechanics, 2005(4): 529-533.
- [6] 郭智权, 叶友达. 高超声速化学非平衡欧拉方程数值模拟[J]. 空气动力学学报, 1999, 12(4): 423-428.  
GUO Zhiquan, YE Youda. Numerical simulation of hypersonic chemical non-equilibrium flows around re-entry bodies using Euler equations [J]. Acta Aerodynamica Sinica, 1999, 12(4): 423-428.
- [7] JIANG G S, SHU C W. Efficient implementation of weighted ENO schemes [J]. Journal of Computational Physics, 1996, 126: 202-228.
- [8] HENRICK K, ASLAM T D, POWERS J M. Mapped weighted essentially non-oscillatory schemes: achieving optimal order near critical points [J]. Journal of Computational Physics, 2005, 207: 542-567.

- [9] FENG H, HU F X, WANG R. A new mapped weighted essentially non-oscillatory scheme [J]. *Journal of Scientific Computing*, 2012, 51: 449-473.
- [10] LI Q, YAN P, HUANG X. et al. On developing piecewise rational mapping with fine regulation capability for weno schemes [J]. *Journal of Scientific Computing*, 2021, 88(3): 75-130.
- [11] WEN Y H, LI Q, TAN G Z. Numerical investigations on interactions between 2D/3D conical shock wave and axisymmetric boundary layer at  $Ma=2.2$  [J/OL]. *Aerospace Science and Technology*, 2023, <https://doi.org/10.48550/axXiv.2303.12985>.
- [12] 严攀, 李沁, 黄潇, 等. 不同气体模型与滑移边界模型下升力体摩阻热流预示研究 [J]. *北京航空航天大学学报*, 2023. DOI: 10.13700/j.bh.1001-5965.2023.0209. YAN Pan, LI Qin, HUANG Xiao, et al. Research on friction and heat flux prediction of lift-body under different gas models and slip boundary models [J]. *Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics*. 2023. DOI: 10.13700/j.bh.1001-5965.2023.0209.
- [13] HA Y, KIM C H, YANG H, et al. Construction of an improved third-order WENO scheme with a new smoothness indicator [J]. *Journal of Scientific Computing*, 2020. DOI: 10.1007/s10915-020-01164-6.
- [14] LI Q, HUANG X, YAN P, et al. Third-order scale-independent WENO-Z scheme achieving optimal order at critical points [J]. *Computation Fluids*, 2021. DOI: 10.48550/arXiv.2107.13225.
- [15] LIANG T, FU L. A new type of non-polynomial based TENO scheme for hyperbolic conservation laws [J]. *Journal of Computational Physics*, 2023, 497: 112618.
- [16] HUANG C S, ARBOGAST T, TIAN C Y. Multidimensional WENO-AO reconstructions using a simplified smoothness indicator and applications to conservation laws [J]. *Journal of Scientific Computing*, 2023. DOI: 10.1007/s10915-023-02319-x.
- [17] ZHANG Xiangxiong, SHU Chiwang. Positivity-preserving high order finite difference WENO schemes for compressible Euler equations [J]. *Journal of Computational Physics*, 2012, 231 (5): 2245-2258.
- [18] FAN Chuan, ZHANG Xiangxiong, QIU Jianxian. Positivity-preserving high order finite difference WENO schemes for compressible Navier-Stokes equations [J]. *Journal of Computational Physics*, 2022, 467: 11446.
- [19] PULLIAM T H, STEGER J. Implicit finite-difference simulations of three-dimensional compressible flow [J]. *AIAA Journal*, 1980, 18(2): 159-164.
- [20] 严攀, 黄潇. WENO3-PRM<sub>1,1</sub> 格式高超声速气动热与激波/边界层干扰预示特性研究 [C]// 第二十届全国激波与激波管学术会议论文集. 合肥: [s.n.], 2022. YAN Pan, HUANG Xiao. Study on the prediction characteristics of WENO3-PRM<sub>1,1</sub> scheme hypersonic aerodynamic heating and shock wave/boundary layer interaction [C]// *Proceedings of the 20th National Conference on Shock Wave and Shock Tube*. Hefei: [s.n.], 2022.
- [21] 毛枚良, 江定武, 邓小刚. 高超声速层流气动热预测混合算法研究 [J]. *空气动力学学报*, 2009, 27(3): 275-280. MAO Meiliang, JIANG Dingwu, DENG Xiaogang. Study of hybrid scheme for the prediction of aerodynamic heat transfer-rate in hypersonic laminar flow [J]. *Acta Aerodynamica Sinica*, 2009, 27(3): 275-280.
- [22] TISSERA S, DRIKAKIS D. Computational fluid dynamics methods for hypersonic flow around blunted-cone-cylinder-flare [J]. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 2010, 47(47): 563-570.
- [23] GREENE F A. Application of the multigrid solution technique to hypersonic entry vehicles [J]. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 1994, 31(5): 744-750.
- [24] GRAHAM R E, HUGHES J E, MOSELEY W C JR. Aerodynamic stability characteristics of the apollo command module: NASA-TN-D-4688 [R]. [S. l.]: NASA, 1968.
- [25] 黎作武, 张涵信. 绕 Apollo 飞船的高超声速化学非平衡流动的数值模拟 [J]. *力学学报*, 1996(1): 8-22. LI Zuowu, ZHANG Hanxin. Numerical simulation for hypersonic flow of nonequilibrium gases around the Apollo command module [J]. *Acta Mechanica Sinica*, 1996(1): 8-22.

(编辑:孙静)