

DOI:10.16356/j.1005-2615.2024.03.019

## 分布动载荷时域识别的动标定试验方法

陈奥辉, 姜金辉

(南京航空航天大学航空航天结构力学及控制全国重点实验室, 南京 210016)

**摘要:** 在工程应用中, 作用于工程结构上的载荷多为分布载荷, 因此分布载荷识别技术一直备受关注。动标定技术通过建立载荷与响应之间的关系识别载荷, 传统动标定方法根据有限元仿真获得标定矩阵, 识别结果受到模型误差影响。基于 Gauss-Legendre 积分将无限维的动标定转换为有限维的动标定, 通过傅里叶逆变换和卷积积分得到时域标定矩阵, 对施加于结构上的分布载荷进行时域识别, 并用仿真实验验证了该方法的有效性和高精度。在响应中加入噪声, 考察该方法的抗噪性, 并与传统仿真标定方法进行对比, 并讨论了不同高斯点总数对识别精度的影响。

**关键词:** 分布载荷识别; 试验动标定; Gauss-Legendre 积分; 正交多项式; 时域

**中图分类号:** TB123; O327 **文献标志码:** A **文章编号:** 1005-2615(2024)03-0561-10

## Research on Dynamic Calibration Experiment of Distributed Dynamic Load Identification in Time-Domain

CHEN Aohui, JIANG Jinhui

(State Key Laboratory of Mechanics and Control for Aerospace Structure, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing 210016, China)

**Abstract:** In engineering applications, the loads acting on engineering structures are mostly distributed loads, so distributed load identification technology has always attracted much attention. The dynamic calibration technology identifies the load by establishing the relationship between the load and the response, and the traditional dynamic calibration method obtains the calibration matrix according to the finite element simulation, and the recognition results are affected by the model error. Based on the Gauss-Legendre integral, the infinite-dimensional dynamic calibration is converted into the finite-dimensional dynamic calibration, the time-domain indexing matrix is obtained through inverse Fourier transform and convolutional integration, the time-domain identification of the distributed load applied to the structure is carried out, and the effectiveness and high accuracy of the proposed method are verified by simulation. The noise is added to the response to test the noise resistance of the method, and compared with the traditional simulation calibration method. And the influence of the total number of Gaussian points on the recognition accuracy is discussed.

**Key words:** distributed load identification; experimental dynamic calibration; Gauss-Legendre integral; orthogonal polynomial; time domain

随着计算机有限元仿真和动态测试技术的发展, 自 20 世纪 70 年代起, 动载荷识别技术逐渐应用于航空领域<sup>[1]</sup>。此后, 逐渐应用于各个领域, 经过多年的发展, 载荷识别技术已经有了巨大的发

收稿日期: 2024-01-10; 修订日期: 2024-03-22

通信作者: 姜金辉, 男, 教授, E-mail: jiangjinhui@nuaa.edu.cn。

引用格式: 陈奥辉, 姜金辉. 分布动载荷时域识别的动标定试验方法[J]. 南京航空航天大学学报, 2024, 56(3): 561-570. CHEN Aohui, JIANG Jinhui. Research on dynamic calibration experiment of distributed dynamic load identification in time-domain[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2024, 56(3): 561-570.

展,在工程应用上也突破了很多难题。对于载荷识别的研究,集中载荷<sup>[2-3]</sup>的研究较多,但识别分布载荷对于工程应用也十分重要。与集中载荷相比,识别分布载荷的讨论相对较少,识别也更加困难。根据识别的类型不同,将载荷识别方法分为时域法<sup>[4]</sup>和频域法<sup>[5-6]</sup>。频域法<sup>[5-6]</sup>相关的研究起步较早,理论也较为成熟,结构的数学模型为外激励与动响应线性相乘,通过逆运算即可求得外部激励。时域法<sup>[7-8]</sup>适用于识别作用时间较短的载荷,但将时间离散之后的建模精度较差,在进行识别时出现病态问题。

对于分布载荷识别的研究现状,Wang等<sup>[9]</sup>构建了一种不确定分布式动态载荷识别方法,并提出了一种载荷识别传感器布置的优化准则。Jiang等<sup>[10]</sup>基于模态坐标变换对作用于二维薄板上的分布载荷进行分解,建立了分布载荷时间函数系数与模态力之间的线性关系,从而识别分布载荷。Liu等<sup>[11]</sup>结合正交多项式和贝叶斯框架开发了一种新的分布载荷识别方法,用仿真表明此方法的高精度与抗噪性。Liu等<sup>[12]</sup>依据部分结构响应识别时变分布载荷的空间分布函数和时间历程。

动标定技术是建立响应与输入之间的关系,从而识别载荷。姜昊<sup>[13]</sup>基于非接触分布激励下对板和梁进行动标定识别分布载荷,并用仿真验证了标定方法的有效性。徐梅<sup>[14]</sup>将空间映射应用于标定技术中,解决了标定技术只能应用于简单结构的问题,成功地识别出复杂结构的载荷。罗淑一等<sup>[15]</sup>基于 Gauss-Legendre 积分将无限维的动标定转换为有限维的动标定,用试验的方法得到标定矩阵,消除了模型误差给识别结果带来的影响。但目前试验标定对于分布载荷的识别只实现了频域的识别,本文通过 Gauss-Legendre 积分将无限维的动标定转换为有限维的动标定,通过试验获得频响函数从而得到时域标定矩阵,消除模型误差给识别精度带来的影响。

$$\begin{pmatrix} w_1(t_1) \\ w_1(t_2) \\ \vdots \\ w_1(t_s) \\ w_2(t_1) \\ w_2(t_2) \\ \vdots \\ w_r(t_s) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} HT_{111}(1, t_1) & HT_{112}(1, t_1) & \cdots & HT_{11L}(1, t_1) & HT_{121}(1, t_1) & HT_{122}(1, t_1) & \cdots & HT_{JKL}(1, t_1) \\ HT_{111}(1, t_2) & HT_{112}(1, t_2) & \cdots & HT_{11L}(1, t_2) & HT_{121}(1, t_2) & HT_{122}(1, t_2) & \cdots & HT_{JKL}(1, t_2) \\ \vdots & \vdots \\ HT_{111}(1, t_s) & HT_{112}(1, t_s) & \cdots & HT_{11L}(1, t_s) & HT_{121}(1, t_s) & HT_{122}(1, t_s) & \cdots & HT_{JKL}(1, t_s) \\ HT_{111}(2, t_1) & HT_{112}(2, t_1) & \cdots & HT_{11L}(2, t_1) & HT_{121}(2, t_1) & HT_{122}(2, t_1) & \cdots & HT_{JKL}(2, t_1) \\ HT_{111}(2, t_2) & HT_{112}(2, t_2) & \cdots & HT_{11L}(2, t_2) & HT_{121}(2, t_2) & HT_{122}(2, t_2) & \cdots & HT_{JKL}(2, t_2) \\ \vdots & \vdots \\ HT_{111}(r, t_s) & HT_{112}(r, t_s) & \cdots & HT_{11L}(r, t_s) & HT_{121}(r, t_s) & HT_{122}(r, t_s) & \cdots & HT_{JKL}(r, t_s) \end{bmatrix} \quad (5)$$

可将式(5)简写为

$$w_{r \times s} = HT_{(r \times s) \times (J \times K \times L)} \cdot A_{J \times K \times L} \quad (6)$$

## 1 二维结构分布载荷识别与试验动标定方法

### 1.1 弹性薄板结构分布载荷时域识别理论

图1为厚度远远小于平面面积的弹性薄板,边界条件四边简支,且受二维分布载荷 $f(x, y, t)$ 作用。

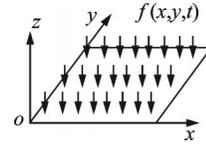


图1 分布载荷作用下的薄板模型

Fig.1 Thin plate model under distributed loads

弹性薄板结构分布动载荷与结构响应的关系为

$$w(x_p, y_q, t) = \int_0^t \int_0^b \int_0^a h(x_p, x, y_q, y, t - \tau) f(x, y, t) dx dy d\tau \quad (1)$$

式中: $(x_p, y_q)$ 为响应点的位置, $(x, y)$ 为载荷的空间位置分布, $h(x_p, x, y_q, y, t)$ 为传递函数。对于分布载荷 $f(x, y, t)$ ,可用三维Legendre正交多项式展开

$$f(x, y, t) = \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^L T_j(x) T_k(y) T_l(t) \cdot a_{jkl} \quad (2)$$

则式(1)可写成

$$w(x_p, y_q, t) = \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^L \int_0^t \int_0^b \int_0^a h(x_p, x, y_q, y, t - \tau) \cdot T_j(x) T_k(y) T_l(t) dx dy d\tau \cdot a_{jkl} \quad (3)$$

记正交多项式载荷 $T_j(x) T_k(y) T_l(t)$ 作用于弹性薄板结构上, $(x_p, y_q)$ 位置的响应为 $HT_{jkl}$ ,其表达式为

$$HT_{jkl}(x_p, y_q, t) = \int_0^t \int_0^b \int_0^a h(x_p, x, y_q, y, t - \tau) \cdot T_j(x) T_k(y) T_l(t) dx dy d\tau \quad (4)$$

激励下系统响应与基函数作用下系统的响应是线性叠加关系,选取 $r=p \times q$ 个响应点,时间采样数为 $s$ ,可以得到以下的线性代数方程

当 $r \times s = J \times K \times L$ 时,对动标定矩阵 $HT$ 求逆,可得到正交多项式矩阵系数 $A_{jkl} = [HT]^{-1} * w$ ;

当  $r \times s > J \times K \times L$  时,对动标定矩阵  $HT$  求广义逆,可得正交多项式矩阵系数  $A_{jkl} = [HT]^+ * w$ 。

最后,将多项式系数  $A_{jkl}$  代入正交多项式,即可拟合出所要求的动态载荷  $f(x, y, t)$ ,但工程中无法在实际结构上施加正交多项式载荷。本文基于 Gauss-Legendre 积分提出分布动载荷时域识别的动标定试验方法,通过对高斯点和响应点之间的频响函数逆傅里叶变换得到单位脉冲响应函数,与  $T_l(t)$  卷积得到作用于高斯点的单点激励响应。

### 1.2 弹性薄板结构试验动标定方法

本文提出的时域动标定技术可通过 Gauss-Legendre 积分实现,即

$$\int_0^b \int_0^a f(x, y) dx dy = \frac{a \times b}{4} \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N A_m A_n f\left(\frac{a}{2} x_m, \frac{b}{2} y_n\right) \quad (7)$$

式中:  $M$ 、 $N$  为高斯点总数,  $x_m$ 、 $y_n$  分别为区间  $[0, a]$ 、 $[0, b]$  的高斯点坐标,  $A_m$ 、 $A_n$  分别为高斯点  $x_m$ 、 $y_n$  对应的权重。结合式(4)和式(7),可以得到

$$HT_{jkl}(x_p, y_q, t) = \int_0^t \sum_m \sum_n A_m A_n h(x_p, x_m, y_q, y_n, t - \tau) T_j(x_m) T_k(x_n) T_l(\tau) d\tau \quad (8)$$

但对于试验来说,单位脉冲响应较难测得,可以通过测量高斯点与响应点之间的频响函数,再进行逆傅里叶变换得到,具体公式为

$$h(x_p, x_m, y_q, y_n, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H(x_p, x_m, y_q, y_n, \omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (9)$$

通过计算梁上高斯点和响应点之间的响应以及相应的 Legendre 正交多项式具体值,求解出具体的时域动标定矩阵,从而识别载荷。其标定流程图如图 2 所示,动标定过程为

- (1) 确定板的几何模型和材料参数;
- (2) 选取高斯点总数,根据高斯积分表获得高

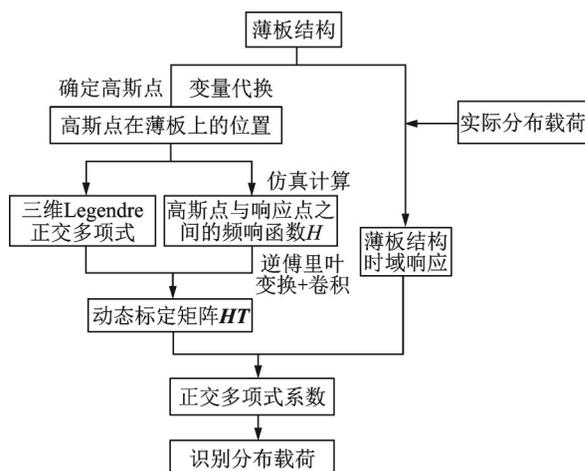


图 2 弹性薄板结构动态标定流程图

Fig.2 Flow chart of dynamic calibration of elastic thin plate structure

斯点坐标及其权重;

(3) 通过变量代换获得高斯点在板上的坐标,获得高斯点与响应点之间的频响函数;

(4) 通过高斯点与响应点之间的频响函数,根据上述理论构建时域标定矩阵。

## 2 仿真算例

为了验证该方法的有效性与高精度,对图 1 中弹性薄板施加分布载荷  $f(x, y, t)$ ,真实载荷信号为  $X(i)$ ,识别载荷信号为  $Y(i)$ ,根据上文所述方法识别载荷,分布载荷  $f(x, y, t)$  以及识别结果误差表达式分别如下。

分布载荷

$$f(x, y, t) = \sin(\pi x/a + \pi y/b) \cdot (\sin t + \cos t) \quad (10)$$

绝对误差

$$\text{Error1}(i) = |X(i) - Y(i)| \quad (11)$$

相对误差

$$\text{Error2}(i) = |(X(i) - Y(i))/X(i)| \quad (12)$$

四边简支的弹性薄板,几何参数和材料参数如表 1 所示。

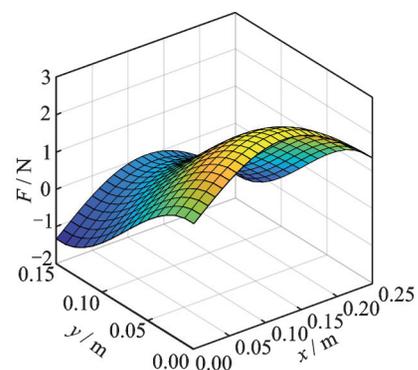
表 1 弹性薄板的几何参数和材料属性

Table 1 Geometric parameters and material properties of elastic thin plate

弹性薄板参数	数值
长度 $a/m$	0.25
宽度 $b/m$	0.15
厚度 $h/m$	0.001
弹性模量 $E/GPa$	210
密度 $\rho/(kg \cdot m^{-3})$	7 800
阻尼比 $\zeta$	0.02
泊松比 $\nu$	0.3

### 2.1 算例一

在弹性薄板上施加载荷  $f(x, y, t)$ ,加载时间取  $0 \sim 1$  s,时间间隔为  $0.000 5$  s。选取梁上的 10 个点为测量点,正交多项式阶数为  $J \times K \times L = 5 \times 5 \times 5$ ,高斯点总数  $M=9$ 、 $N=9$ 。在不考虑噪声的情况下对分布载荷进行识别,并与传统仿真标定进行对比,分别如图 3、4 所示;随后在响应加入  $0.1\%$  噪声



(a) Load identification results in spatial distribution

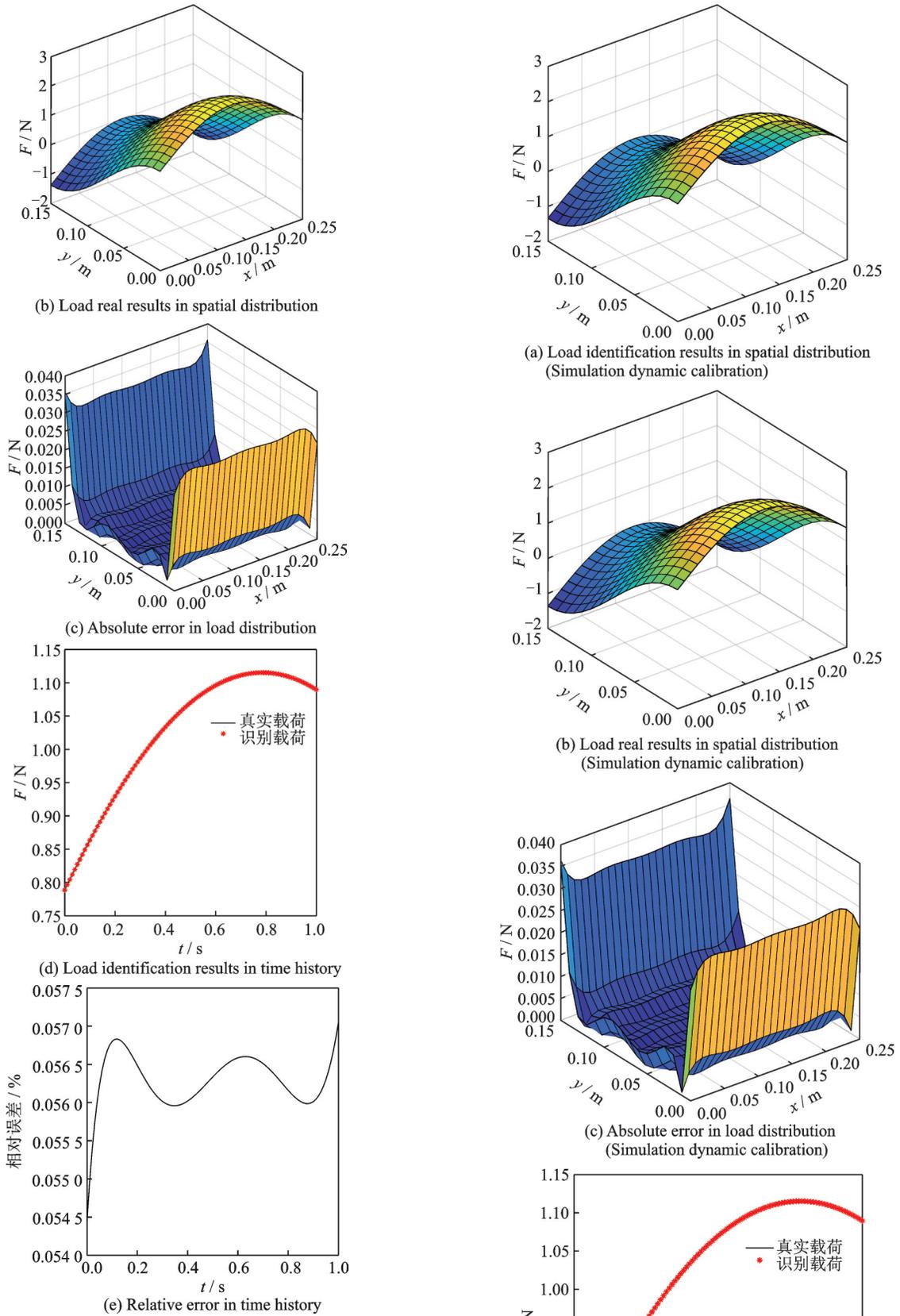
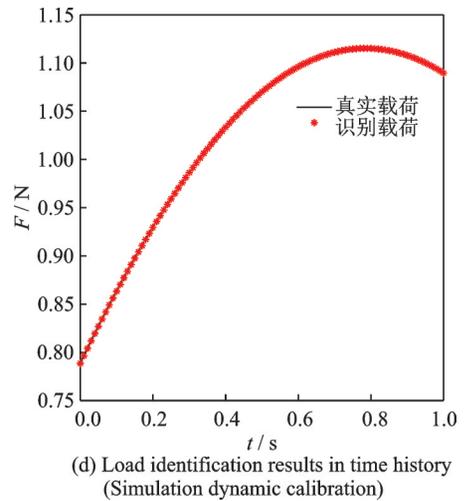
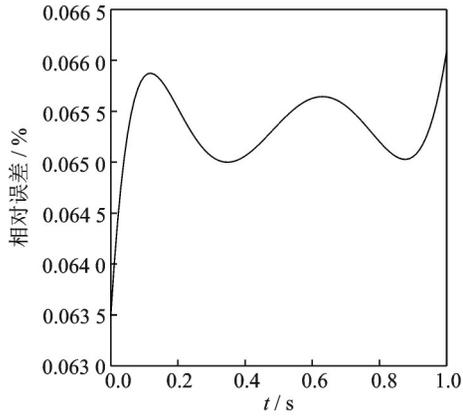


图3 载荷识别结果(试验动标定)

Fig.3 Load identification results (Test dynamic calibration)

和1%噪声,考察识别效果的抗噪性,并与相同条件下传统仿真动标定进行对比。载荷识别结果包括载荷空间分布识别结果和时间历程识别结果,载荷分布识别结果取 $t=1\text{ s}$ 时载荷在薄板上的分布情况,时间历程识别结果取薄板 $x=0.06\text{ m}$ 、 $y=$





(e) Relative error in time history (Simulation dynamic calibration)

图 4 载荷识别结果(仿真动标定)

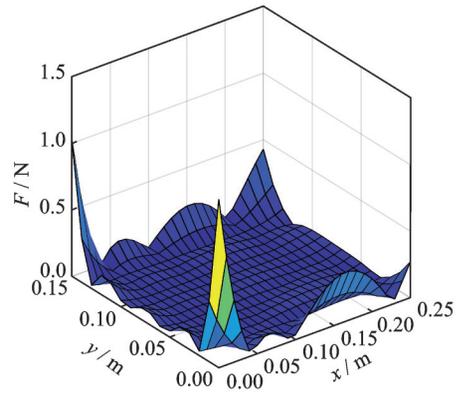
Fig.4 Load identification results (Simulation dynamic calibration)

0.07 m 处的时间历程。

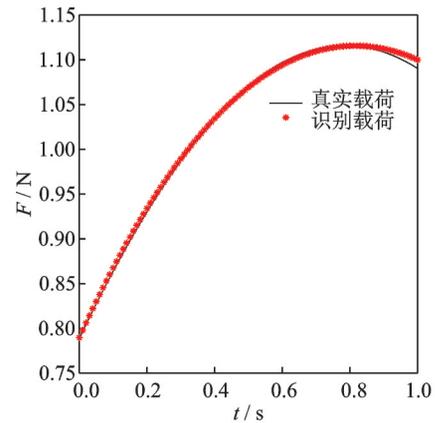
为了考察识别方法的抗噪性,在响应信号中加入 0.1% 的随机噪声,并用试验动标定和仿真动标定进行识别,结果分别如图 5、6 所示。

在保持所有参数不变的情况下,对响应加入 1% 噪声,试验动标定和仿真动标定识别结果如分别图 7、8 所示。

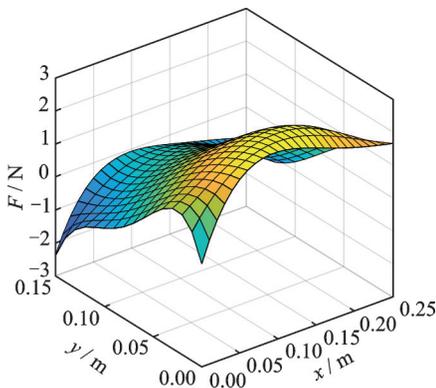
载荷识别和时间历程识别结果误差对比分别如表 2、3 所示。由表 2、3 可知,在无噪声的情况下,试验动标定空间分布识别结果最大绝对误差和



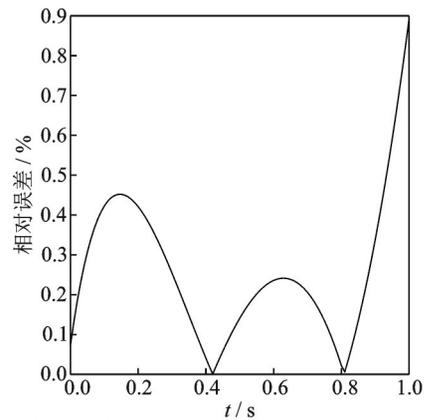
(c) Absolute error in load distribution with 0.1% noise



(d) Load identification results in time history with 0.1% noise



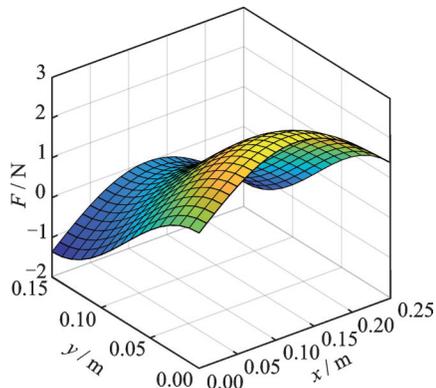
(a) Load identification results in spatial distribution with 0.1% noise



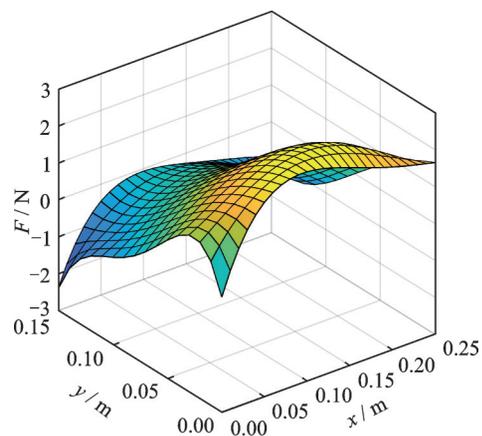
(e) Relative error in time history with 0.1% noise

图 5 载荷识别结果(0.1% 噪声)

Fig.5 Load identification results with 0.1% noise



(b) Load real results in spatial distribution with 0.1% noise



(a) Load identification results in spatial distribution with 0.1% noise(Simulation dynamic calibration)

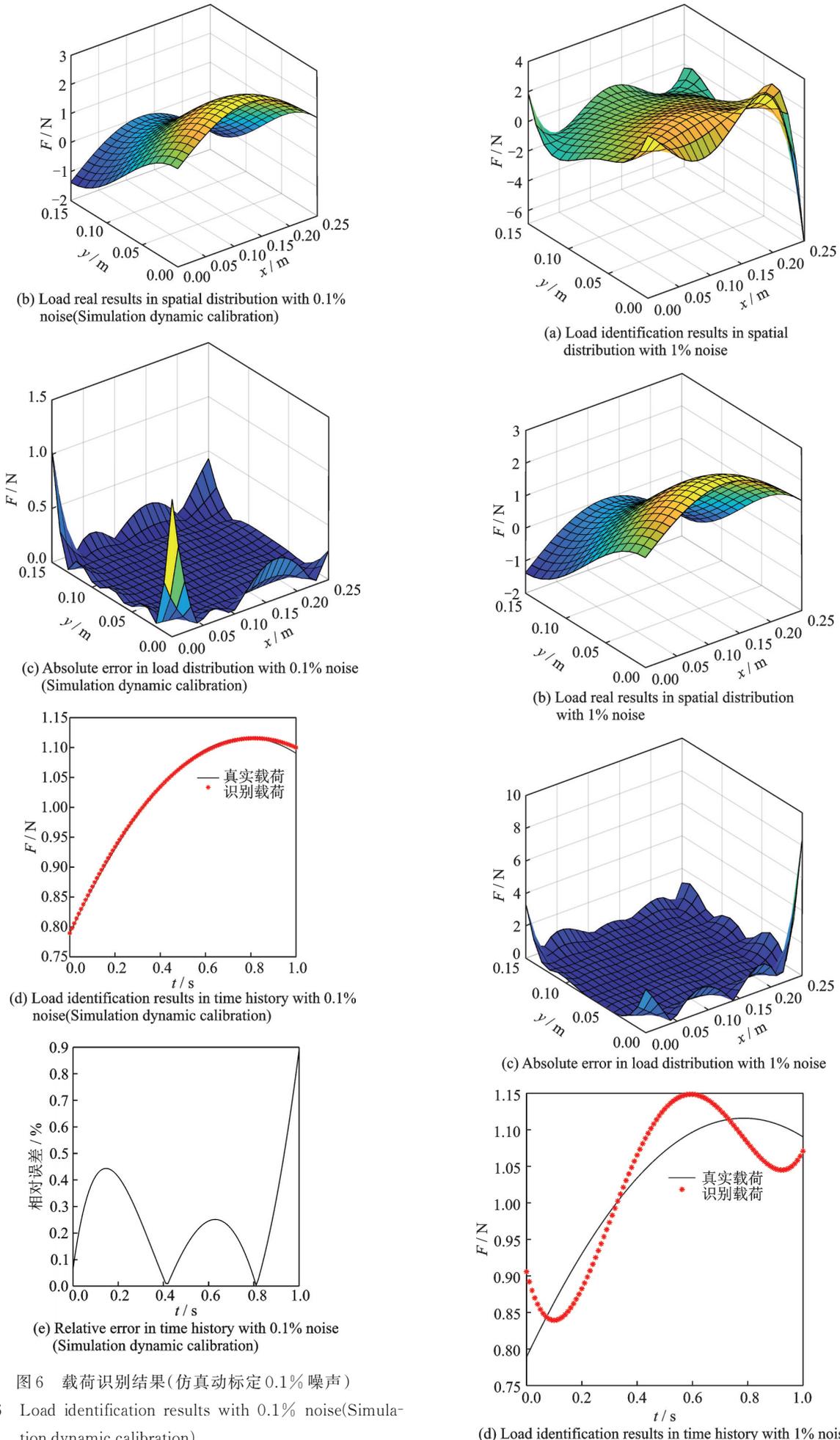
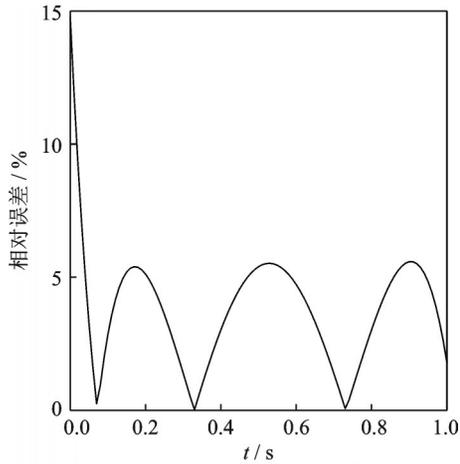


图6 载荷识别结果(仿真动标定0.1%噪声)

Fig.6 Load identification results with 0.1% noise(Simulation dynamic calibration)

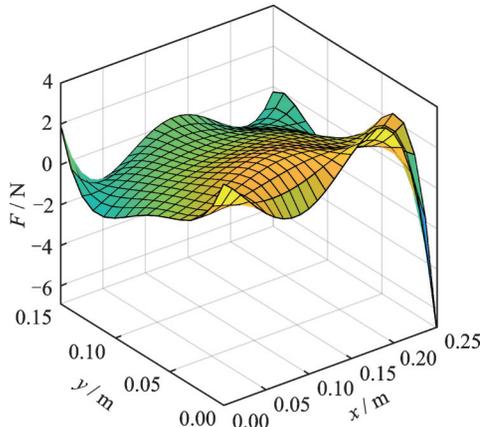
(d) Load identification results in time history with 1% noise



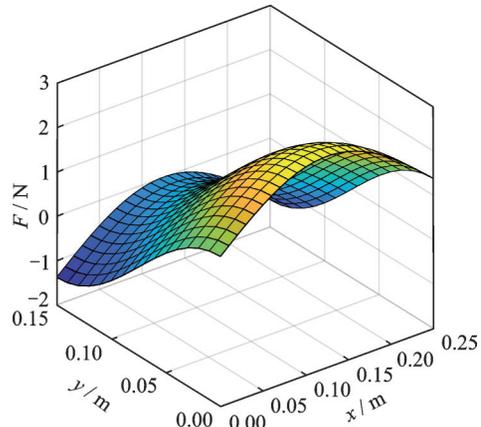
(e) Relative error in time history with 1% noise

图 7 载荷识别结果(1% 噪声)

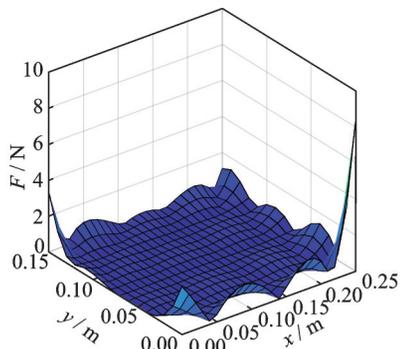
Fig.7 Load identification results with 1% noise



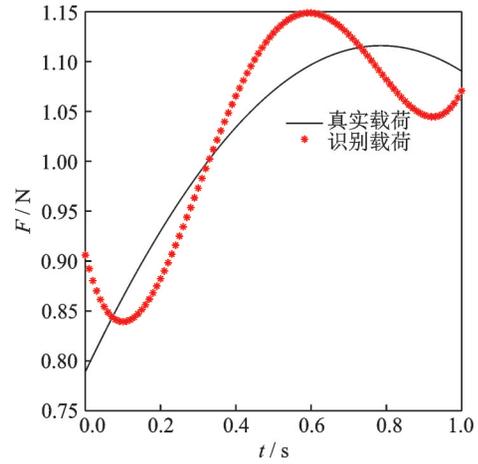
(a) Load identification results in spatial distribution with 1% noise(Simulation dynamic calibration)



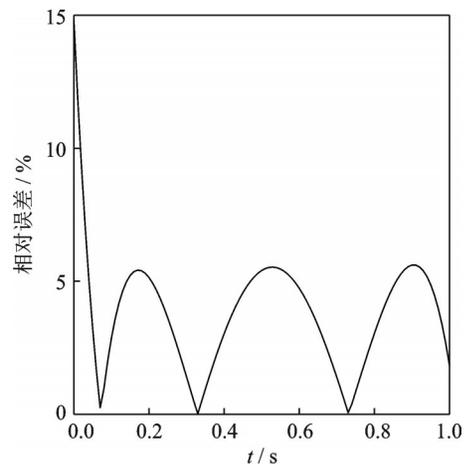
(b) Load real results in spatial distribution with 1% noise (Simulation dynamic calibration)



(c) Absolute error in load distribution with 1% noise (Simulation dynamic calibration)



(d) Load identification results in time history with 1% noise (Simulation dynamic calibration)



(e) Relative error in time history with 1% noise (Simulation dynamic calibration)

图 8 载荷识别结果(仿真动标定 1% 噪声)

Fig.8 Load identification results with 1% noise(Simulation dynamic calibration)

平均绝对误差分别为 0.035 7、0.006 1,时间历程识别结果最大相对误差和平均相对误差分别为 0.057%、0.056 3%,识别效果较好。但由于矩阵维度过大,噪声对识别精度影响较大,收敛性较差。

表 2 载荷分布识别结果误差对比( $t=1$  s)

Table 2 Comparison of error in load distribution identification results( $t=1$  s)

参数	绝对误差最大值	绝对误差平均值
响应无噪声	0.035 7	0.006 1
响应含 0.1% 噪声	1.266 6	0.051 9
响应含 1% 噪声	8.271 6	0.283 9
响应无噪声 (仿真动标定)	0.036 4	0.006 1
响应含 0.1% 噪声 (仿真动标定)	1.269 1	0.052 0
响应含 1% 噪声 (仿真动标定)	8.288 4	0.284 3

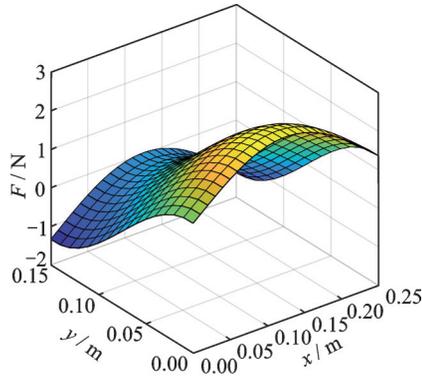
表3 时间历程识别结果误差对比( $x=0.06\text{ m}, y=0.07\text{ m}$ )  
Table 3 Comparison of error in time history identification results( $x=0.06\text{ m}, y=0.07\text{ m}$ )

参数	相对误差最大值/%	相对误差平均值/%
响应无噪声	0.057 0	0.056 3
响应含0.1%噪声	0.892 3	0.260 8
响应含1%噪声	14.789 0	3.840 1
响应无噪声(仿真动标定)	0.066 1	0.065 3
响应含0.1%噪声(仿真动标定)	0.887 1	0.259 5
响应含1%噪声(仿真动标定)	14.830 2	3.852 5

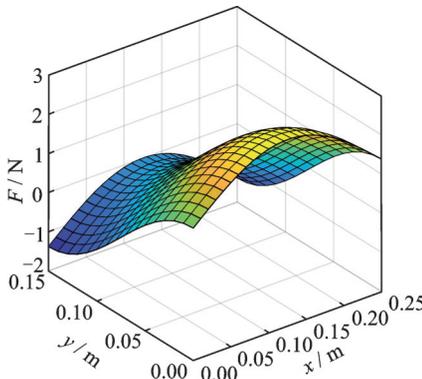
2.2 算例二

为了探讨高斯点总数对识别精度的影响,分别选取高斯点总数为 $M=8, N=8$ 和 $M=7, N=7$ ,进行载荷识别,识别结果分别如图9、10所示。

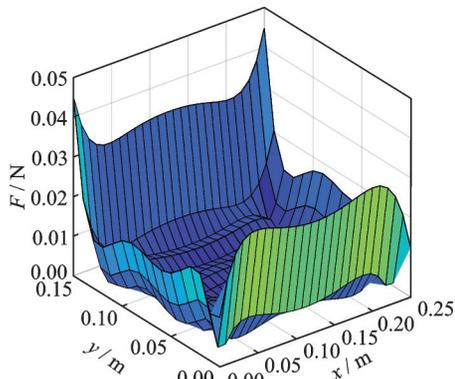
如表4、5所示,对于空间分布识别结果,高斯



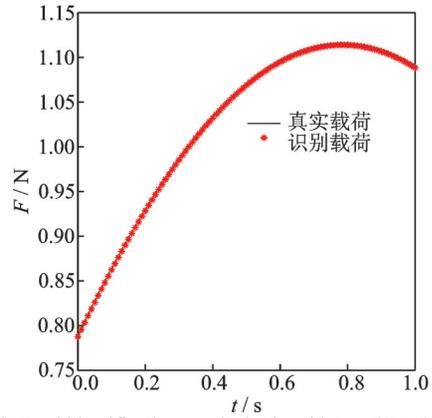
(a) Load identification results in spatial distribution ( $M=8, N=8$ )



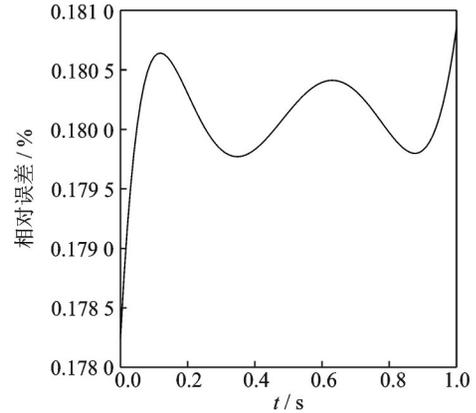
(b) Load real results in spatial distribution ( $M=8, N=8$ )



(c) Absolute error in load distribution ( $M=8, N=8$ )



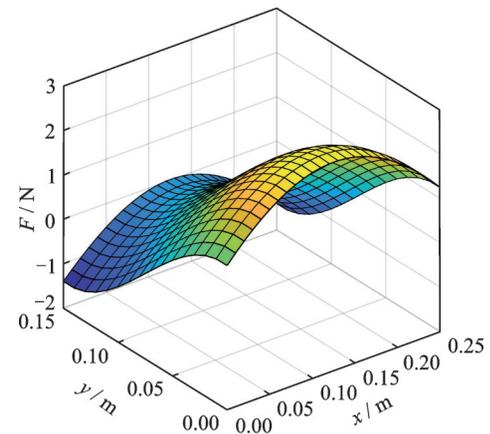
(d) Load identification results in time history ( $M=8, N=8$ )



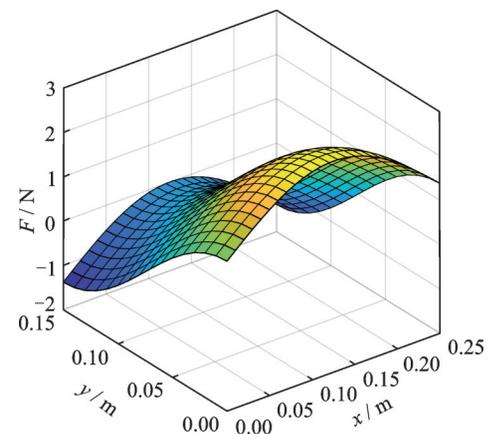
(e) Relative error in time history ( $M=8, N=8$ )

图9 载荷识别结果( $M=8, N=8$ )

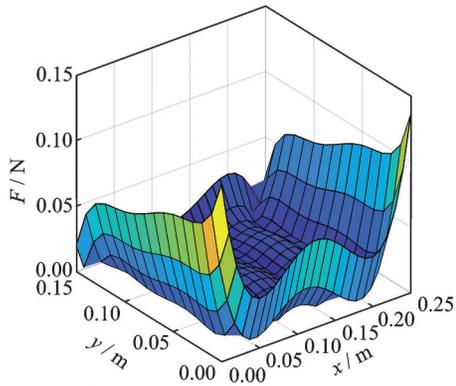
Fig.9 Load identification results( $M=8, N=8$ )



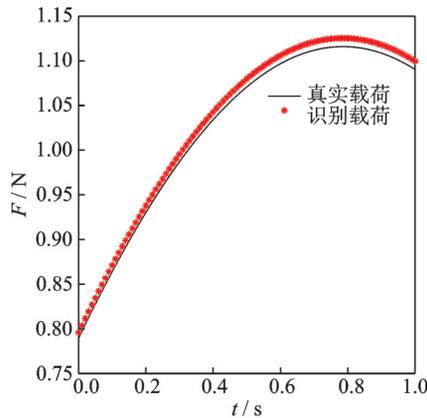
(a) Load identification results in spatial distribution ( $M=7, N=7$ )



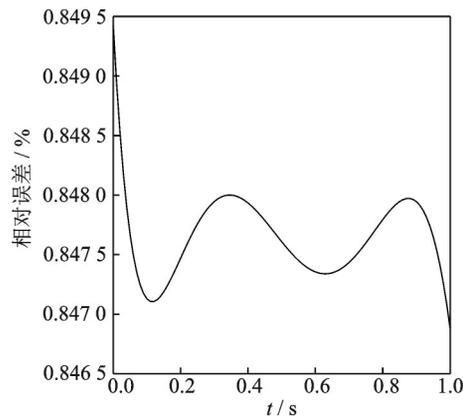
(b) Load real results in spatial distribution ( $M=7, N=7$ )



(c) Absolute error in load distribution ( $M=7, N=7$ )



(d) Load identification results in time history ( $M=7, N=7$ )



(e) Relative error in time history ( $M=7, N=7$ )

图 10 载荷识别结果 ( $M=7, N=7$ )

Fig.10 Load identification results ( $M=7, N=7$ )

表 4 不同高斯点空间分布识别结果误差对比

Table 4 Error comparison table of recognition results of different Gaussian point load distributions

高斯点数	$M=9, N=9$	$M=8, N=8$	$M=7, N=7$
绝对误差最大值	0.035 7	0.044 8	0.135 4
绝对误差平均值	0.006 1	0.007 2	0.019 4

表 5 不同高斯点时间历程识别结果误差对比

Table 5 Error comparison table of time history recognition results of different Gaussian points

高斯点数	$M=9, N=9$	$M=8, N=8$	$M=7, N=7$
相对误差最大值/%	0.057 0	0.180 9	0.849 4
相对误差平均值/%	0.056 3	0.180 1	0.847 7

点总数  $M=9, 8, 7$  和  $N=9, 8, 7$  的绝对误差最大值分别为 0.035 7、0.044 8、0.135 4, 绝对误差平均值分别为 0.006 1、0.007 2、0.019 4; 对于时间历程识别结果, 高斯点总数  $M=9, 8, 7$  和  $N=9, 8, 7$  的相对误差最大值分别为 0.057%、0.180 9%、0.849 4%, 相对误差平均值分别为 0.056 3%、0.180 1%、0.847 7%。从识别结果可以看出, 高斯点越多, 载荷识别结果绝对误差越小, 识别精度越来越高。可以看出, 随着高斯点总数的增加, 载荷识别效果越来越好, 识别精度越来越高, 但高斯点过多, 工作量也会大大增加。

### 3 结 论

以弹性薄板为研究对象, 基于 Gauss-Legendre 积分、逆傅里叶变换理论和卷积积分, 通过对经过坐标变换的高斯点与响应点之间的频响函数进行逆傅里叶变换得到单位脉冲响应函数, 再与载荷的时域信号进行卷积得到单点激励的响应, 利用 Gauss-Legendre 积分得到正交多项式载荷的响应, 构建试验动标定矩阵, 并对施加于弹性薄板上的分布载荷进行识别。在仿真算例一中, 在无噪声的情况下对分布载荷进行识别, 证明了本方法能够准确识别出作用于弹性薄板上的分布载荷, 对响应引入噪声并与传统仿真动标定方法识别结果进行对比, 由于矩阵维度过大, 噪声对识别结果影响较大。在仿真算例二中研究了不同高斯点总数对识别结果精度的影响, 仿真结果表明高斯点越多, 识别精度越高, 识别效果越好。

#### 参考文献:

[1] 杨智春, 贾有. 动载荷识别方法的研究进展[J]. 力学学报, 2015, 47(2): 384.  
 YANG Zhichun, JIA You. Research progress on dynamic load identification methods[J]. Chinese Journal of Mechanics, 2015, 47(2): 384.

[2] 谢石林, 薛永刚, 张希农. 基于统计能量法的高频集中载荷识别的理论与试验研究[J]. 振动工程学报, 2013, 26(1): 1-7.  
 XIE Shilin, XUE Yonggang, ZHANG Xinong. Theoretical and experimental research on identification of high frequency concentrated loads based on statistical energy method[J]. Journal of Vibration Engineering, 2013, 26(1): 1-7.

[3] 赵银燕, 李懿, 徐斌. 梁上多点动载荷位置和大小识别方法研究[J]. 机械科学与技术, 2014, 33(11): 1672-1676.  
 ZHAO Yinyan, LI Yi, XU Bin. Research on the identification method of the position and magnitude of

- multi-point dynamic load on beam[J]. Mechanical science and technology, 2014, 33(11): 1672-1676.
- [4] 周盼, 张权, 率志君, 等. 动载荷识别时域方法的研究现状与发展趋势[J]. 噪声与振动控制, 2014, 34(1): 6-11.  
ZHOU Pan, ZHANG Quan, SHUAI Zhijun, et al. Research status and development trend of time domain method of dynamic load identification[J]. Noise and Vibration Control, 2014, 34(1): 6-11.
- [5] LEE U, SHIN J. A frequency-domain method of structural damage identification formulated from the dynamic stiffness equation of motion[J]. Journal of Sound and Vibration, 2002, 257(4): 615-634.
- [6] REZAYAT A, NASSIRI V, PAUW B D, et al. Identification of dynamic forces using group-sparsity in frequency domain[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2016, 70: 756-768.
- [7] WANG T, WAN Z, WANG X, et al. A novel state space method for force identification based on the Galerkin weak formulation[J]. Computers & Structures, 2015, 157: 132-141.
- [8] HASANOV A, ROMANOV V, BAYSAL O. Unique recovery of unknown spatial load in damped Euler-Bernoulli beam equation from final time measured output[J]. Inverse Problems, 2021, 37(7): 075005.
- [9] WANG L, LIU Y. A novel method of distributed dynamic load identification for aircraft structure considering multi-source uncertainties[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2020, 61: 1-24.
- [10] JIANG J H, KONG H F, YANG H J, et al. Identification method of distributed dynamic load based on modal coordinate transformation for thin plate structure[J]. International Journal of Computational Methods, 2021, 18(7): 2150012.
- [11] LIU S, JINHUI J, FANG Z, et al. Distributed dynamic load identification of beam structures using a Bayesian method[J]. Applied Sciences, 2023, 3(4): 2527-2537.
- [12] LIU L, ZHANG Y, LEI Y, et al. Identification of distributed dynamic loads in gradually varying two spatial dimensions based on discrete cosine transform and Kalman filter with unknown inputs[J]. Journal of Aerospace Engineering, 2023, 36(5): 1-7.
- [13] 姜昊. 非接触分布激励下的动态标定技术[D]. 南京: 南京航空航天大学, 2009.  
JIANG Hao. Dynamic calibration technique under non-contact distributed excitation[D]. Nanjing: Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2009.
- [14] 徐梅. 复杂结构分布载荷识别的动态标定技术研究[D]. 南京: 南京航空航天大学, 2009.  
XU Mei. Research on dynamic calibration technique of distributed load identification for complex structures[D]. Nanjing: Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2009.
- [15] 罗淑一, 姜金辉, 张方. 分布动载荷频域识别的试验标定方法研究[J]. 振动工程学报, 2023, 36(3): 706-717.  
LUO Shuyi, JIANG Jinhui, ZHANG Fang. Research on experimental dynamic calibration method for frequency domain identification of distributed dynamic loads[J]. Journal of Vibration Engineering, 2023, 36(3): 706-717.

(编辑: 夏道家)