DOI:10.16356/j.1005-2615.2024.03.006

第56卷第3期

2024年6月

# 一种面向孔定位的飞机壁板类零件修配 多约束配准算法

韩汪涛<sup>1</sup>,葛晓东<sup>1</sup>,祝太福<sup>1</sup>,张 沅<sup>2</sup>,邹春喜<sup>1</sup>,方 磊<sup>1</sup>
(1.中国航空工业集团西安飞机工业(集团)有限责任公司,西安 710089;
2.南京航空航天大学机电学院,南京 210016)

摘要: 飞机壁板类零件在装配阶段需要进行精加工以满足装配精度要求,为了保证得到精确的加工路径和加工 余量,需要将具有相互装配关系的零件进行虚拟配准。本文提出一种面向定位孔定位的飞机壁板类零件修整装 配的多约束配准算法。首先根据零件实际装配情况,提出3项约束准则,包括定位孔位置约束、配合面距离最小 约束和配合面距离均匀约束,并转换成相应的目标函数;然后将目标函数中待求参数进行微分变换并通过交替 迭代梯度下降算法求得待求参数可行解。模拟实验验证和实际加工应用表明,本文方法针对零件配合面不同姿 态的点云都能精确配准,并基于配准结果,可得到精确加工轨迹和余量,提升零件装配质量。 关键词:零件修配;三维测量;点云配准;微分变换;多约束配准 中图分类号:TP391 文献标志码:A 文章编号:1005-2615(2024)03-0432-06

# Surface Registration Algorithm of Aircraft Parts Assembly Based on Multiple Constraints

HAN Wangtao<sup>1</sup>, GE Xiaodong<sup>1</sup>, ZHU Taifu<sup>1</sup>, ZHANG Yuan<sup>2</sup>, ZOU Chunxi<sup>1</sup>, FANG Lei<sup>1</sup>
(1. AVIC Xi'an Aircraft Industry (Group) Company Ltd., Xi'an 710089, China; 2. College of Mechanical and Electrical Engineering, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing 210016, China)

**Abstract:** As for the thin-walled parts of the aircraft in the assembly stage, high-precision finishing is required to meet the assembly accuracy requirements. In order to ensure accurate machining paths and allowance, it is necessary to register the parts with mutual assembly relationships. This paper proposes an algorithm for surface registration of aircraft parts assembly based on multiple constraints. First, according to the actual assembly situation of the parts, three constraint criteria are proposed and converted into the corresponding objective function. Then the parameters to be sought in the objective function are differentiated and the feasible solution of the parameters to be sought is obtained through the alternate gradient descent algorithm. Experimental verification shows that the proposed method can accurately register the point clouds of different poses of the mating surface of the part. Based on the registration result, accurate machining path and allowance can be obtained, which lead to better part assembly quality.

**Key words:** parts repairing; 3D measurement; point cloud registration; differential transformation; multiconstraint registration

收稿日期:2023-02-22;修订日期:2023-07-27

通信作者:韩汪涛,男,硕士,工程师,E-mail: 1063678829@qq.com。

**引用格式:**韩汪涛,葛晓东,祝太福,等.一种面向孔定位的飞机壁板类零件修配多约束配准算法[J].南京航空航天大学 学报,2024,56(3):432-437. HAN Wangtao, GE Xiaodong, ZHU Taifu, et al. Surface registration algorithm of aircraft parts assembly based on multiple constraints[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2024, 56 (3):432-437.

随着现代飞机对于飞机性能、寿命和可靠性要求的不断提高,飞机装配质量也相应不断提高。严格控制具有相互配合关系的飞机零部件装配对缝间隙是保证飞机气动性能、结构强度和安全性的关键<sup>[1]</sup>。许多飞机零件尺寸大、刚度小,容易造成从零件加工到装配多环节产生累积误差,最终导致在装配过程中产生干涉的问题。针对这类问题,航空企业采取的解决方案是在装配过程中对产生干涉的飞机零件进行切边处理,从而保证飞机零件的装配对缝间隙满足设计要求。目前,对于飞机零件的切边处理通常是工人将零件固定在专用夹具上进行手工切割,这导致在零件装配精度不高并且装配效率低的同时,对于工人技术要求较高,工人工作量增大等<sup>[2]</sup>。

近年来随着数字化测量技术的快速发展,许多 数字化测量设备在测量范围、精度、效率以及对于 测量环境的适应性方面都有了极大的提升,已广 泛应用于飞机制造装配过程中。国内外众多学者 针对数字化测量技术辅助飞机零部件在制造和装 配过程中进行高精度加工进行广泛的研究<sup>[3-12]</sup>。 Tan 等<sup>[4]</sup>提出一种无约束的零件定位方法,通过获 取零件加工阶段的实测点云,将实测点云数据与理 论数模进行配准,把实测点云与理论数模配准问题 转换成无约束最大最小配准问题,使得零件的加工 余量尽可能均匀化。Zhang等<sup>[5]</sup>基于三坐标测量机 获取实测点云建立复杂零件加工余量优化模型,该 模型能够很好地对零件加工余量进行均匀分配。 Li等<sup>[6]</sup>提出了扫描引导的机器人磨削方案,为控制 打磨量的均匀性,并通过对不同叶片的测量/磨削 试验,验证了基于方差最小化配准方法的有效性。 Yu等<sup>[7]</sup>提出了一套完整的测量和评价体系。 Wang 等<sup>[8]</sup>提出了一种新的在线测量和余量补偿方 法,以提高薄壁零件的加工精度,该方法主要是基 于在线测量实验来补偿加工误差。上述方法主要 是在部分定位约束的情况下,对加工余量的均匀性 进行控制。最近,另一类方法主要针对零件变形问 题,进行变形曲面重构之后,再进行配准。例如,针 对钛空心叶片前后缘可加工性差的问题,文献[9] 提出了利用自由变形的自适应加工方法来解决这 一问题,首先采用数字化测量方法针对空心叶片的 实际形状进行检测,然后用改进的最近点迭代算法 (Iterative closet point, ICP)算法将测量点云数据与 理论数模进行配准。Gao等<sup>[10]</sup>针对铸造毛坯提出 了一种加工余量自动评估的方法。文献[11]基于 大型飞机蒙皮零件实测点云,提出了一种自适应去 除蒙皮加工余量的方法。上述方法配准环节主要 依赖于外形曲面配准距离最小化原则,未考虑装配间隙均匀性要求。

上述方法主要基于点云数据与理论模型的配 准,通过满足不同的约束条件达到配准效果,这类 方法适用于零件各处加工余量均匀分布,并且不考 虑具有相互装配关系的情况下。飞机上有许多薄 壁类零件,如蒙皮、大型壁板等,该类零件尺寸大、 刚度小,在成形后由于加工应力的释放易发生变 形,导致装配过程中产生干涉或间隙过大的问题。 为控制飞机零件装配对缝间隙,提高飞机装配精 度,需要在装配阶段对干涉的零件进行高精度加 工。由于在装配状态下零件存在一定变形,并且零 件之间存在装配协调关系。因此,在装配状态下对 干涉的零件进行高精度加工时通常以其中一个零 件为参考零件,而另外一个零件作为待加工零件, 将参考零件的配合面映射到待加工零件上并生成 加工路径,作为待加工零件的加工依据。上述过程 关键在于如何能够将参考零件配合面精确映射到 待加工零件上,本文提出一种多约束装配曲面配准 算法,通过满足距离最小(Distance minimization, DM)、距离均匀(Distance uniformity, DU)和定位 孔约束(Location holes constraint, LHC)3个准则 将参考零件配合面映射到待加工零件上。其中距 离最小是指映射变换后参考零件端面和待装配零 件端面距离尽可能小。距离均匀要求待装配零件 与参考零件的装配间隙尽可能均匀分布。定位孔 约束是指将装配零件表面定位孔特征需对齐到相 应位置。

在满足上述条件的前提下将参考零件配合面 配准到待加工零件配合面上是典型的带约束条件 配准问题。对于配准问题已经有比较成熟的算法, 如ICP<sup>[13]</sup>,并且有许多相关研究对于该算法进行改 进<sup>[14-18]</sup>,但已有的配准算法并不能完全适用于本文 约束准则,因此需要根据约束准则重新设计相应的 约束函数。

## 1 算法描述

问题描述:飞机薄壁类零件装配过程中,采用 数字化测量手段分别获取装配状态下产生干涉的 飞机零件装配对缝配合面区域的实测点云。将其 中一个零件作为参考零件,获取的点云数据记为 P;将另外一个零件作为待加工零件,获取的点云 数据记为Q。本文算法旨在计算P和Q之间的最 佳映射变换,具体流程如图1所示。首先分别获取 参考零件和待加工零件的实测点云,然后构建多约 束曲面配准模型并提出目标函数,通过求解目标函



图1 多约束配合面配准算法生成加工路径流程图

Fig.1 Process flowchart of the generation of machining paths using a multi-constraint mating face registration algorithm

数得到参考零件和待加工零件之间的变换参数*R*和*t*。

为了详细阐述飞机薄壁类零件装配过程中产 生的问题,本文以飞机多边形边界壁板零件为例, 具体如图2所示。图2(a)是两块壁板零件理论装 配模型,其中黄色虚线表示上壁板理论边界轮廓 线。由于飞机壁板零件通常尺寸大、刚度小,从加 工到装配经历多个工序,产生的累积误差导致最终 上壁板实际边界轮廓产生误差,如图2(b)中蓝色 虚线所示。下壁板零件为待加工零件,并假设下壁 板零件有足够的加工余量。因此,如果按照上壁板 理论轮廓(即黄色虚线)来对下壁板进行加工,则最 终装配容易产生干涉或间隙过大的问题。为了解 决上述问题,将上壁板零件作为参考零件,根据实 际装配情况,以本文设计的配准准则将参考零件的 配合面与待加工零件进行配准,从而为后续生成待 加工零件的加工路径(黑色实线)、引导加工做好必 要的前提准备。



图 2 多边形边界壁板零件实际装配示意图

Fig.2 Schematic assembly diagram of the polygonal boundary panel component

接下来,对上述3个约束准则进行详细解释, 并给出相应的数学表达。

DM 准则:由于零件从加工到装配,多个工序 造成的累积误差导致参考零件和待加工零件的配 合面形状不完全相同但是形状相似,因此可以采用 ICP的评价方法。在 ICP 算法中,常用的点到点距 离或点到平面距离来构造相应的约束函数,相应的 数学表达式为

$$F_{\rm DM} = \operatorname{argmin} \sum_{i=1}^{N} \left\| \boldsymbol{d}_{i} \right\|^{2} \text{ or } \operatorname{argmin} \sum_{i=1}^{N} \left\| \boldsymbol{s}_{i} \right\|^{2}$$
(1)

式中: $d_i = p'_i - q_i$ , $s_i = (p'_i - q_i)^{T} \cdot n_i$ , $p'_i = Rp_i + t$ ,  $p'_i$ 为参考零件配合面上点 $p_i$ 经过配准后得到的对 应点, $q_i$ 为 $p'_i$ 在待加工零件配合面上的最近点, $n_i$ 为待加工零件配合面上点 $q_i$ 的法线,R为旋转矩 阵,t为平移向量。由于扫描零件的配合面通常不 是闭合模型,使用点到平面来表示上述准则会产生 多个可行解。如图3所示,Q是待加工零件配合面 点云, $P_1$ 和 $P_2$ 分别是不同的配准结果,处于不同位 置,但它们投影距离相同。实际上,可以沿着z轴 方向任意移动 $P_1$ 得到无数个解。因此,为了满足 DM 准则且只有一个可行解,使用点到点距离 度量。







DU准则:由式(1)可知,距离最小准则使得参 考零件和待加工零件的配合面尽可能靠近,但由于 测量过程中受到环境因素及被测物体表面材质影 响,获取的实测点云容易出现密度分布不均匀的问题;同时,飞机壁板类零件的装配往往有装配间隙 均匀的要求。因此,为了使待加工零件修配后与参 考零件的装配间隙均匀分布,引入距离均匀准则, 通过方差最小化来构造相应的约束函数为

$$F_{\rm DU} = \operatorname{argmin}\left(\left|g_i\right| - \left(\sum_{i=1}^{N} \left|g_i\right|\right) / N\right)^2 \qquad (2)$$

式中:N为参考零件配合面实测点云中点的总数,  $g_i = \| \mathbf{p}'_i - \mathbf{q}_i \| - g, g$ 为零件装配间隙要求的标准 值,由不同零件的相应的装配要求决定。因为方差 描述了每个样本值与均值之间的偏差程度。因此, 由式(2)可以尽量减少点云密度不均匀带来的 影响。

LHC 准则:飞机壁板类零部件表面一般会有 一些定位孔。通过定位孔,飞机壁板可与其他零部 件确定位姿关系。因此,需要保证修配之后,定位 孔不会出现较大偏差,以免飞机壁板与其他零件无 法装配。相应数学表达为

$$\sum_{j=1}^{M} \left\| c_{j} - c_{j}^{*} \right\|^{2}$$
(3)

式中: c<sub>j</sub>为零件表面定位孔圆心实测坐标, c<sub>j</sub>为其 理论坐标, M为两块壁板中全部定位孔个数。圆 心实测坐标可以通过最小二乘拟合而得。

#### 1.1 总体目标函数定义

根据方法概述中对配合面配准过程中3个基 本准则的描述,将目标函数定义为

$$F' = \underset{R,t}{\operatorname{argmin}} \left\{ \sum_{i=1}^{N} \| d_i \|^2 + \alpha \sum_{i=1}^{N} \left( \left| g_i \right| - \left( \sum_{i=1}^{N} \left| g_i \right| \right) / N \right)^2 + \beta \sum_{j=1}^{M} \| c_j - c_j^* \|^2 \right\}$$
(4)

式中:3个优化项分别对应于3项配准准则,α、β分 别为对应的权重系数。参数值设置不具有一般性 规律,取决于现场实施的对象和余量控制要求。

#### 1.2 目标函数求解

目标函数的求解是非线性优化问题,将目标函数中待求参数旋转矩阵 R 和平移向量 t转换成微分旋转  $w = [\delta_x, \delta_y, \delta_z]$ 和微分平移 $v = [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z]$ 。然后通过指数映射将变换参数 w 和v转换成三维刚性变换矩阵,即p'可以表示成如下形式

$$\boldsymbol{p}_i' = \boldsymbol{p}_i + \boldsymbol{w} \times \boldsymbol{p}_i + \boldsymbol{\nu} \tag{5}$$

参考零件配合面上的点*p*/经过刚性变换后到 待加工零件上对应点*q*,的位移表示为

$$\boldsymbol{d}_i = \boldsymbol{p}_i' - \boldsymbol{q}_i = \boldsymbol{p}_i - \boldsymbol{q}_i + \boldsymbol{w} \times \boldsymbol{p}_i + \boldsymbol{\nu} \qquad (6)$$

参考零件配合面上的点*p*/经过刚性变换后到 待加工零件上对应点*q*,的有向投影距离表示为

 $d_i = (p_i' - q_i)^{\mathrm{T}} \cdot n_i = (p_i - q_i + w \times p_i + \nu)^{\mathrm{T}} \cdot n_i =$ 

$$(\boldsymbol{p}_i - \boldsymbol{q}_i)^{\mathrm{r}} \cdot \boldsymbol{n}_i + (\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{p}_i)^{\mathrm{r}} \cdot \boldsymbol{n}_i + \boldsymbol{\nu}^{\mathrm{r}} \cdot \boldsymbol{n}_i$$
(7)

将式(7)代入目标函数中,采用交替优化法即 可求解得到微分旋转 w 和微分平移 v。然后,由 w 和 v 通过指数映射求得旋转矩阵 R 和平移向量 t, 具体变换公式为

$$\boldsymbol{R} = \exp \begin{pmatrix} 0 & -\delta_z & \delta_y \\ \delta_z & 0 & -\delta_x \\ -\delta_y & \delta_x & 0 \end{pmatrix}$$
(8)

$$t = \exp(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z) \tag{9}$$

## 2 实验与分析

本节详细讨论了所提出的多约束配合面配准 算法,并通过实际应用案例,证明算法的有效性。

## 2.1 模拟数据配准性能对比实验

收敛性分析:由于零件扫描时,可能处于不同 的测量坐标系,因此要求配准算法对于零件初始配 准姿态,具有鲁棒性。为了验证本文配准算法对不 同初始姿态下的点云数据进行配准时都能够有效 收敛,本节对3种姿态下的模拟点云进行配准实 验。具体实验结果如图4所示。图4(a~c)中,红 色点云作为待加工零件配合面点云,蓝色点云作为 参考零件配合面点云,点云中点数都为2790点, 其中配合面点云含有强度为0.5%的高斯噪声。 图4(d~f)为不同参数设置下配准后图像。



Fig.4 Relationship between the registration error and the number of iterations for three different poses

为了对目标函数收敛性进行定量分析,绘制了 参考零件点云经过配准后到待加工零件点云的平 均距离与迭代次数的关系曲线,如图4(g~i)所示。 最终收敛距离为实验设定,即式(4)中第1项。从 图4可以看出,随着迭代次数的增加,两块点云的 平均距离逐渐减小,并最终收敛。因此,可以说明 目标函数对不同的姿态下点云数据都能够收敛。 需要注意的是,本次模拟实验中并未用到定位孔约 束,因此其权重为0,参见表1。 $\alpha$ 、 $\beta$ 分别对应式(4) 中的权重系数。同时,余量约束为式(2)中的装配 间隙要求g的取值。

配准误差对比分析:在实验过程中将本文算法 与两种经典配准算法进行定量的对比分析。实验

衣 收敛性分析过性中华人能准异法参数论	表1	收敛性分析过	程中本文画	配准算法参	シ数设置
---------------------	----	--------	-------	-------	------

 
 Table 1
 Parameter settings of the registration algorithm in the convergence analysis process conducted in this study

	-		
图像	α	β	余量约束/mm
图 4(a)	0.5	0	0.10
图 4(b)	0.5	0	0.03
图 4(c)	0.5	0	0.01

数据为图 4(b)中数据,对比方法为:基于方差最小 化配准方法(Variance minimization shape matching, VMSM)<sup>[6]</sup>、ICP<sup>[14]</sup>与本文的多约束配准算法。 如表 2 所示,模拟配准过程中两个点云中的点数皆 为 2 790,实验结果表明,ICP算法能最快地进行收 敛,但本文方法最终收敛时误差最小,本文计算的 配准误差为配准后对应点对欧氏距离的均方根,表 达式如下

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} X_i^2}{N}} \tag{10}$$

式中Xi为配准后对应点对之间的欧氏距离。

在配准时间方面,ICP算法消耗时间最少,本 文算法消耗时间最长,因为本文算法需要利用梯度 下降法,多次迭代,求解最优解。

#### 2.2 实际加工验证

为了进一步验证方法的有效性,本文对多边形

表 2 配准结果定量分析 Table 2 Quantitative analysis of registration results

		-
算法	配准误差/mm	配准时间/s
ICP	0.223	2.2
VMSM	0.088	7.5
本文方法	0.035	14.3

边界壁板装配实验件进行了实际修配验证。零件 长宽高尺寸为:360 mm×150 mm×3 mm,每块壁 板留有至少4个定位孔。其中一块壁板为净边壁 板,另一块壁板留有1.90 mm加工余量,装配间隙 要求为0.05 mm。采用 Creaform HandyScan 三维 扫描仪对零件进行三维测量,并用本文算法对零件 配合面进行配准分析,配准结果如图5所示,上方 点云为留有加工余量壁板的配合面轮廓点云,下方 点云为净边壁板的配合面轮廓点云,图5中显示的 数值为3对放大的粉红色点对的距离及不同坐标 方向的坐标差值,取一定数量的粉红色对应点对, 计算点对间的平均距离为1.9546mm,非常接近 引入装配间隙要求的加工余量。基于配准结果,利 用下方点云为净边壁板的配合面轮廓点云生成加 工轨迹,用激光切割机对留有加工余量壁板进行精 加工,最后将两块壁板进行装配,结果如图6所示。 从图6可以看出,精加工后,多边形边界零件可紧 密贴合,加工余量已消除。



Fig.5 Registration results of the measured data for the mating surfaces of the assembled component with polygonal boundaries



图 6 精加工后装配零件 Fig.6 Assembled component after precision machining

# 3 结 论

本文针对飞机薄壁零件在装配阶段常需要根 据实际装配情况进行高精加工但准确加工路径和 加工余量获取困难的问题,提出了一种基于DM准 则、DU准则和LHC准则的多约束曲面配准算法。 由收敛性分析实验得知,本文算法针对不同姿态下 的点云都能有较好的配准效果,配准误差均小于传 统较为成熟的点云配准方法。由实际加工实验表 明,由本文的配准方法可获取精确的加工余量和加 工轨迹,可应用于不规则轮廓装配零件精加工。方 法不足之处:配准过程中尚未考虑零件变形情况, 因此基于本文配准方法进行精加工无法消除变形 产生的零件尺寸误差。此外,本文提出的多约束配 准模型,参数值设置取决于现场实施的对象和装配 间隙控制要求,不具有一般性规律,具体应用所提 出配准方法时,需要具体去调试参数,这也是本文 的不足之处之一。

### 参考文献:

- [1] WANG Q, DOU Y, LI J, et al. An assembly gap control method based on posture alignment of wing panels in aircraft assembly[J]. Assembly Automation, 2017, 37(4): 422-433.
- [2] CHEN H, WEI M, SUN Y, et al. Multi-patch collaborative point cloud denoising via low-rank recovery with graph constraint[J]. IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, 2019, 26(11): 3255-3270.
- [3] PIYA C, WILSON J M, MURUGAPPAN S, et al. Virtual repair: Geometric reconstruction for remanufacturing gas turbine blades[C]//Proceedings of International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference. [S.I.]: ASME, 2011, 54860: 895-904.
- [4] TAN G, ZHANG L, LIU S, et al. An unconstrained approach to blank localization with allowance assurance for machining complex parts[J]. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2014, 73(5/6/7/8): 647-658.
- [5] ZHANG Y, ZHANG D, WU B. An approach for machining allowance optimization of complex parts with integrated structure[J]. Journal of Computational Design and Engineering, 2015, 2(4): 248-252.
- [6] LI W, XIE H, ZHANG G, et al. 3-D shape matching of a blade surface in robotic grinding applications[J].
   IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, 2016, 21(5): 2294-2306.
- [7] YU J, CHEN Z, JIANG Z. An approach for machining distortion measurements and evaluation of thinwalled blades with small datum[J]. Chinese Journal of Aeronautics, 2016, 29(6): 1806-1814.
- [8] WANG G, LI W, TONG G, et al. Improving the machining accuracy of thin-walled parts by online measuring and allowance compensation[J]. The International Journal of Advanced Manufacturing Technolo-

gy, 2017, 92(5/6/7/8): 2755-2763.

- [9] ZHENGCAI Z, JIUHUA X U, YUCAN F U, et al. An investigation on adaptively machining the leading and tailing edges of an SPF/DB titanium hollow blade using free-form deformation[J]. Chinese Journal of Aeronautics, 2018, 31(1): 178-186.
- [10] GAO Y, DU Z, LI M, et al. An automated approach for machining allowance evaluation of casting parts[J]. International Journal of Computer Integrated Manufacturing, 2019, 32(11): 1043-1052.
- [11] BI Q, HUANG N, ZHANG S, et al. Adaptive machining for curved contour on deformed large skin based on on-machine measurement and isometric mapping[J]. International Journal of Machine Tools and Manufacture, 2019, 136: 34-44.
- [12] ZHU Z Q, ZHANG Y, CHEN Z T. A repair strategy based on tool path modification for damaged turbine blade[J]. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2020, 106(7/8): 2995-3006.
- [13] BESL P J, MCKAY N D. Method for registration of 3-D shapes[C]//Proceedings of Sensor Fusion IV : Control Paradigms and Data Structures. International Society for Optics and Photonics. [S.I.]: SPIE, 1992, 1611: 586-606.
- [14] POTTMANN H, HUANG Q X, YANG Y L, et al. Geometry and convergence analysis of algorithms for registration of 3D shapes[J]. International Journal of Computer Vision, 2006, 67(3): 277-296.
- [15] MATABOSCH C, FOFI D, SALVI J, et al. Registration of surfaces minimizing error propagation for a one-shot multi-slit hand-held scanner[J]. Pattern Recognition, 2008, 41(6): 2055-2067.
- [16] LIU Y. Free form shape registration using the barrier method [J]. Computer Vision and Image Understanding, 2010, 114(9): 1004-1016.
- [17] LI W L, YIN Z P, HUANG Y A, et al. Three-dimensional point-based shape registration algorithm based on adaptive distance function[J]. IET Computer Vision, 2011, 5(1): 68-76.
- [18] XIE H, LI W L, YIN Z P, et al. Variance-minimization iterative matching method for free-form surfaces— Part I: Theory and method[J]. IEEE Transactions on Automation Science and Engineering, 2018, 16(3): 1181-1191.

(编辑:陈珺)