

DOI:10.16356/j.1005-2615.2024.03.004

可重构 3-RRR 并联机器人的“点对点”路径规划

黄宁宁¹, 尤晶晶¹, 王澍声¹, 叶鹏达², 沈惠平², 李成刚³

(1. 南京林业大学机械电子工程学院, 南京 210037; 2. 常州大学机械与轨道交通学院, 常州 213016;
3. 南京航空航天大学机电学院, 南京 210016)

摘要: 通过拓扑重构, 可以提高并联机器人的静刚度、故障修复等性能, 但机器人重构之后能否到达任意指定的位姿且不经奇异位形, 尚无定论。为此, 以可重构 3-转动副转动副转动副 (3-revolute-joint, revolute-joint, revolute-joint, 3-RRR) 并联机器人为研究对象, 提出了一种能够实现“点对点”路径跟踪的规划算法。首先, 建立了机构重构之前的反向运动学模型, 据此确定了 6 组重构序列。接着, 构建了一种“四步”规划算法, 适用于任意自由度的可重构并联机器人的“点对点”路径跟踪, 具有直观的几何解释, 并且能够消除全部的奇异位形; 通过算例验证了规划算法的有效性。然后, 基于螺旋理论, 计算出各组参量下的输入、输出和局部传递指标值, 据此, 确定了重构序列下的最优输入参量。最后, 将“点对点”路径规划算法推广至连续路径规划的情形。

关键词: 并联机器人; 拓扑重构; 路径规划; 螺旋理论; 奇异性

中图分类号: TH112 文献标志码: A 文章编号: 1005-2615(2024)03-0415-09

“Point-to-Point” Path Planning for Reconfigurable 3-RRR Parallel Robots

HUANG Ningning¹, YOU Jingjing¹, WANG Shusheng¹, YE Pengda², SHEN Huiping²,
LI Chenggang³

(1. College of Mechanical and Electronic Engineering, Nanjing Forestry University, Nanjing 210037, China; 2. College of Mechanical Engineering and Rail Transit, Changzhou University, Changzhou 213016, China; 3. College of Mechanical and Electrical Engineering, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing 210016, China)

Abstract: Topological reconfiguration can improve the static stiffness and fault tolerance of parallel robots, but the problem of whether the robot can reach any specified pose without singular configuration has not been solved. Therefore, this paper takes the reconfigurable 3-RRR planar parallel robot as the research object, and proposes a path planning method that can realize “point-to-point” tracking. Firstly, the inverse kinematics model before reconfiguration is established, and six paths based on topological reconfiguration are found. Then, a “four-step” planning algorithm is constructed, which is suitable for “point-to-point” path tracking of reconfigurable parallel robots with any degree of freedom. It has intuitive geometric interpretation and can eliminate all singularities. The effectiveness of the planning algorithm is verified by an example. Further, based on the screw theory, the input and output transfer indexes under each input mode are calculated, and the optimal solution of the input mode is obtained by using the local transfer index. Finally, the “point-to-point” path planning algorithm is extended to continuous path planning.

Key words: parallel robot; topological reconfiguration; path planning; screw theory; singularity

并联机器人的本质功能是输出运动或抵抗外 负载, 与串联机器人相比, 具有刚度大、结构稳定且

基金项目: 国家自然科学基金(51405237); 国家留学基金(201908320035)。

收稿日期: 2023-05-23; 修订日期: 2023-09-20

通信作者: 尤晶晶, 男, 副教授, 硕士生导师, E-mail: youjingjing251010@126.com。

引用格式: 黄宁宁, 尤晶晶, 王澍声, 等. 可重构 3-RRR 并联机器人的“点对点”路径规划[J]. 南京航空航天大学学报, 2024, 56(3): 415-423. HUANG Ningning, YOU Jingjing, WANG Shusheng, et al. “Point-to-point” path planning for reconfigurable 3-RRR parallel robots[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2024, 56(3): 415-423.

承载能力强等优点^[1]。3-转动副转动副转动副(3-revolute-joint, revolute-joint, revolute-joint, 3-RRR)平面并联机器人由静平台、动平台和3条RRR支链构成。在货物搬运、产品包装和零件拆装等场合应用前景广阔^[2-4]。然而,由于结构特点的限制,该并联机器人仅具有固定的输出自由度和运动/力传递性能,难以满足不同任务和工况的需求^[5]。可重构3-RRR平面并联机器人能够变拓扑^[6],具有变性能的优点,吸引了国内外学者的关注。

You等^[7]论证了通过拓扑重构的方式,可以增强并联机器人的静刚度,进而提高其工作精度。Yi等^[8]研究发现,通过拓扑重构,能够提高并联机器人的故障修复性能,以确保机器人能够“带病”正常工作。笔者意识到,机器人重构后的关节路径会发生变化,这将引起操作路径的变化。此时,机器人还能否进行路径跟踪,以及在路径跟踪时是否可能发生奇异的问题,尚无定论。

路径规划是根据最优准则在工作空间中寻找从初始位置到目标位置之间的最优路径^[9],不需要考虑运动的速度、加速度、加加速度等参量。机器人的路径规划分为“点对点”路径规划和连续路径规划。前者指末端执行器由起始点运行至终止点,不需要考虑中间轨迹;后者指执行器的运动路径必须为一条指定的连续轨迹。目前,国内外学者对一般并联机器人的路径规划研究较为广泛^[10-13],而针对可重构平面并联机器人的研究较少。

本文聚焦于可重构3-RRR平面并联机器人的“点对点”路径规划问题。首先,建立拓扑重构之前机器人的反向运动学模型,求解动平台铰链点坐标和驱动副输入量。然后,确定6组重构序列,并以一组序列为例,推导路径规划算法。接着,基于局部传递指标,求解输入参量。最后,将“点对点”路径规划推广为连续路径规划。

1 反向运动学模型

3-RRR平面并联机器人的实物模型和机构简图分别如图1(a,b)所示,主要由等边三角形的动平台、静平台以及3条结构相同的有序单开链构成。静平台上的转动副(O' 、 P 、 Q)为外副,动平台上的转动副(J 、 K 、 N)为内副,其他转动副为中副。

如图1(b)所示,建立惯性系 $\{O-XY\}$ 。内副至动平台几何中心的距离为 L ,静平台的边长为 L_0 ,

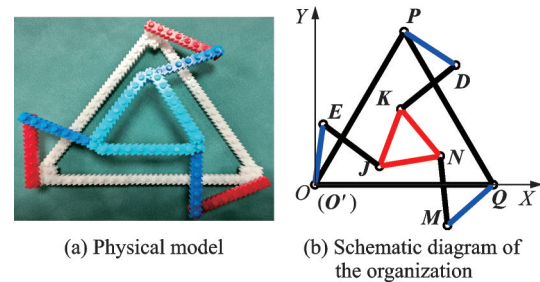


图1 3-RRR平面并联机器人
Fig.1 3-RRR planar parallel robot

远离动平台的杆的长度为 L_1 ,邻近动平台的杆的长度为 L_2 。动平台的目标位置和姿态分别为 (X, Y) 、 α 。 γ_1 、 γ_2 、 γ_3 分别对应 L_{OE} 、 L_{PD} 、 L_{QM} 与 X 轴正方向的夹角(逆时针方向为正)。

3个内副的坐标为

$$\begin{cases} J = \left[\begin{array}{c} \frac{-\sqrt{3}L \cos \alpha + L \sin \alpha}{2} + X \\ \frac{-\sqrt{3}L \sin \alpha - L \cos \alpha}{2} + Y \end{array} \right] \\ K = [-L \sin \alpha + X \quad L \cos \alpha + Y] \\ N = \left[\begin{array}{c} \frac{\sqrt{3}L \cos \alpha - L \sin \alpha}{2} + X \\ \frac{\sqrt{3}L \sin \alpha + L \cos \alpha}{2} + Y \end{array} \right] \end{cases} \quad (1)$$

分别列三角形 OEJ 、 PDK 和 OMN 的矢量闭环方程

$$\begin{cases} L_{OJ} = L_{OE} + L_{EJ} \\ L_{PK} = L_{PD} + L_{DK} \\ L_{ON} = L_{OM} + L_{MN} \end{cases} \quad (2)$$

求解3个夹角,结果为

$$\begin{cases} \gamma_1 = 2\arctan \frac{-D_2 \pm \sqrt{D_2^2 - D_0^2 + D_1^2}}{D_0 - D_1} \\ \gamma_2 = 2\arctan \frac{-D_4 \pm \sqrt{D_4^2 - D_3^2 + D_5^2}}{D_3 - D_5} \\ \gamma_3 = 2\arctan \frac{-D_7 \pm \sqrt{D_7^2 - D_6^2 + D_8^2}}{D_6 - D_8} \end{cases} \quad (3)$$

式中: $D_0 = X_J^2 + Y_J^2 + L_1^2 - L_2^2$, $D_1 = -2L_1Y_J$, $D_2 = -2L_1X_J$, $D_3 = (X_K - X_P)^2 + (Y_K - Y_P)^2 + L_1^2 - L_2^2$, $D_4 = -2L_1(Y_K - Y_P)$, $D_5 = -2L_1(X_K - X_P)$, $D_6 = (X_N - X_Q)^2 + (Y_N - Y_Q)^2 + L_1^2 - L_2^2$, $D_7 = -2L_1(Y_N - Y_Q)$, $D_8 = -2L_1(X_N - X_Q)$ 。

至此,已推导出3-RRR平面并联机器人运动学反解的解析式,一共包含8组解。

2 路径规划算法

本文是通过锁定转动副的方式实现机器人的拓扑重构。根据式(4),计算出 3-RRR 平面并联机构在拓扑重构后的自由度数为 1。因此,只要将同一条支链上的中副和外副锁定,动平台就能实现定轴转动。

$$F = m(\tilde{N} - 1 - \tilde{J}) + \sum_{i=1}^{\tilde{J}} f_i \quad (4)$$

式中: F 为机构的自由度数; m 为机构的阶数,对于平面机构,等于 3; \tilde{N} 为构件个数; \tilde{J} 为关节个数; f_i 为关节 i 的自由度数。

所提路径规划算法的基本思路是:首先,在内副中任选一个特征点,并通过拓扑重构,使得动平台执行 3 次定轴转动,以调整其位置。然后,动平台绕着该特征点,再执行一次定轴转动,以达到目标位姿。

将动平台由初始位姿调整至目标位姿,共有 6 组可行的重构序列(如图 2)。图 2 中,字母代表定轴转动的转轴,角标代表转动的次数。不失一般性地,本文以第一条序列为例,进行详细阐述。选取 J 为特征点, $L_{JN'}$ 、 $L_{N'K''}$ 、 $L_{K''J''}$ 、 $L_{J''N''}$ 与 X 正方向的夹角分别为 φ_1 、 φ_2 、 φ_3 、 φ_4 。接下来,通过同一支链中副、外副的锁定切换,对可重构 3-RRR 平面并联机器人进行路径规划。

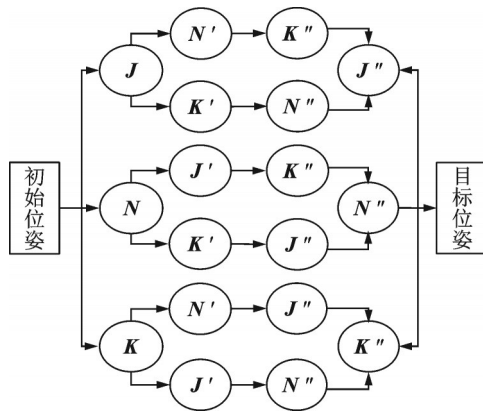


图 2 路径规划算法流程图

Fig.2 Path planning algorithm flow chart

2.1 特征点位置的调整

2.1.1 内副的输入参量计算

动平台绕 J 转动后 N 点的坐标 N'

$$N' = \begin{bmatrix} X_J + \sqrt{3} L \cos \varphi_1 & Y_J + \sqrt{3} L \sin \varphi_1 \end{bmatrix}^T \quad (5)$$

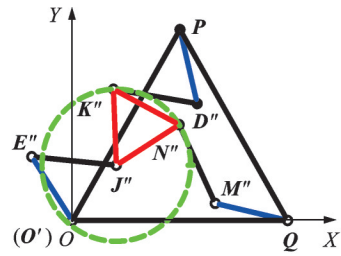
动平台绕 N' 转动后 K 点的坐标 K''

$$K'' = \begin{bmatrix} X_J + \sqrt{3} L \cos \varphi_1 + \sqrt{3} L \cos \varphi_2 \\ Y_J + \sqrt{3} L \sin \varphi_1 + \sqrt{3} L \sin \varphi_2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

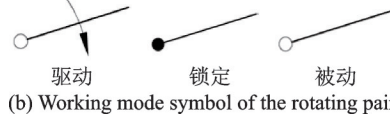
动平台绕 K'' 转动后 J 点的坐标 J'' (点 J'' 为点 J 的目标位置)

$$J'' = \begin{bmatrix} X_J + \sqrt{3} L (\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2 + \cos \varphi_3) \\ Y_J + \sqrt{3} L (\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2 + \sin \varphi_3) \end{bmatrix} \quad (7)$$

显然,经过第 1、2 次定轴转动后,点 K'' 应位于圆 J'' 上(图 3(a))。为直观地表示拓扑重构的形式,设置转动副的工作模式符号(图 3(b))。



(a) Position circle of point K''



(b) Working mode symbol of the rotating pair

图 3 3-RRR 平面并联机器人重构后的位置图解

Fig.3 Pose diagram of 3-RRR planar parallel robot after reconstruction

K'' 的坐标满足

$$(x - X_{J''})^2 + (y - Y_{J''})^2 = 3L^2 \quad (8)$$

将式(6)代入式(8),解得

$$\varphi_2 = 2 \arctan \frac{-m_3 \pm \sqrt{m_3^2 - m_1^2 + m_2^2}}{m_1 - m_2} \quad (9)$$

式中： $m_1 = a_0 + a_1 \cos \varphi_1 + a_2 \sin \varphi_1$, $m_2 = a_1 + a_3 \cos \varphi_1$, $m_3 = a_2 + a_3 \sin \varphi_1$, $a_0 = (X_J - X_{J''})^2 + (Y_J - Y_{J''})^2 + 3L^2$, $a_1 = 2\sqrt{3} L (X_J - X_{J''})$, $a_2 = 2\sqrt{3} L (Y_J - Y_{J''})$, $a_3 = 6L^2$ 。

3 次定轴转动后,特征点满足

$$\begin{cases} X_J + \sqrt{3} L \cos \varphi_1 + \sqrt{3} L \cos \varphi_2 + \sqrt{3} L \cos \varphi_3 = X_{J''} \\ Y_J + \sqrt{3} L \sin \varphi_1 + \sqrt{3} L \sin \varphi_2 + \sqrt{3} L \sin \varphi_3 = Y_{J''} \end{cases} \quad (10)$$

易解得

$$\varphi_3 = 2 \arctan \frac{-m_6 \pm \sqrt{m_6^2 - m_4^2 + m_5^2}}{m_4 - m_5} \quad (11)$$

式中： $m_4 = (X_J - X_{J''} + \sqrt{3} L \cos \varphi_1)^2 + (Y_J - Y_{J''} + \sqrt{3} L \sin \varphi_1)^2$, $m_5 = 2\sqrt{3} L (X_J - X_{J''} + \sqrt{3} L \cos \varphi_1)$, $m_6 = 2\sqrt{3} L (Y_J - Y_{J''} + \sqrt{3} L \sin \varphi_1)$ 。

φ_2 、 φ_3 均与 φ_1 相关,故当 φ_1 确定后,欲使得所选的特征点达到目标位置,共有 4 组输入参量(见表 1,

所涉及的多组解用右下角标括号内的数字表示)。

表1 调整特征点位置时内副的输入参量

Table 1 Input parameters of the internal rotation joint when adjusting the position of the feature point

组别	$L_{JN'}$ 与X轴正方向的夹角/(°)	$L_{N'K''}$ 与X轴正方向的夹角/(°)	$L_{K''J''}$ 与X轴正方向的夹角/(°)
1		$\varphi_{2(1)}$	$\varphi_{3(1)}$
2	φ_1	$\varphi_{2(1)}$	$\varphi_{3(2)}$
3		$\varphi_{2(2)}$	$\varphi_{3(2)}$
4		$\varphi_{2(2)}$	$\varphi_{3(1)}$

2.1.2 外副的输入参量计算

拓扑重构之后, $L_{QM'}$ 、 $L_{PD''}$ 与X轴正方向夹角分别为 ${}^1\gamma_3^*$ 、 ${}^2\gamma_2^*$ (左上角标对应“四步”重构的顺序;右上角标作为与反解解析式的区分)。列三角形 $QM'N'$ 和 $PD''K''$ 的矢量闭环方程

$$\begin{cases} L_{QN'} = L_{QM'} + L_{M'N'} \\ L_{PK''} = L_{PD''} + L_{D''K''} \end{cases} \quad (12)$$

易得

$$\begin{cases} {}^1\gamma_3^* = 2\arctan \frac{c_2 \pm \sqrt{c_2^2 - c_3^2 + c_1^2}}{c_3 + c_1} \\ {}^2\gamma_2^* = 2\arctan \frac{c_5 \pm \sqrt{c_5^2 - c_6^2 + c_4^2}}{c_6 + c_4} \end{cases} \quad (13)$$

式中: $c_1 = 2L_1(X_{N'} - L_0)$, $c_2 = 2L_1Y_{N'}$, $c_3 = (X_{N'} - L_0)^2 + Y_{N'}^2 + L_1^2 - L_2^2$, $c_4 = L_1(2X_{K''} - L_0)$, $c_5 = L_1 \cdot (2Y_{K''} - \sqrt{3}L_0)$, $c_6 = \left(X_{K''} - \frac{L_0}{2}\right)^2 + \left(Y_{K''} - \frac{\sqrt{3}L_0}{2}\right)^2 + L_1^2 - L_2^2$ 。

这样,调整特征点的位置时,外副Q、P、O对应的输入参量分别为 ${}^1\gamma_3^*$ 、 ${}^2\gamma_2^*$ 、 ${}^3\gamma_1$ (表2)。

表2 外副的输入参量

Table 2 Input parameters of external rotation joint

向量	向量与X轴正方向的夹角/(°)
$L_{QM'}$	${}^1\gamma_3^*$
$L_{PD''}$	${}^2\gamma_2^*$
$L_{OJ''}$	${}^3\gamma_1$

2.1.3 特征角的许可范围计算

定义 $L_{JN'}$ 、 $L_{N'K''}$ 、 $L_{K''J''}$ 、 $L_{QM'}$ 、 $L_{PD''}$ 与X轴正方向的夹角 φ_1 、 φ_2 、 φ_3 、 ${}^1\gamma_3^*$ 、 ${}^2\gamma_2^*$ 分别为特征角1、2、3、4、5。锁定转动副O'、E后,令 L_{QJ} 、 L_{PJ} 与X轴正方向的夹角分别为 μ_1 、 μ_2 。若J副在四杆机构 $JN'M'Q$ 、 $JK'D'P$ 中均满足整转副存在条件,则特征角1的许可范围应该为 $0^\circ \sim 360^\circ$;若不满足,令 $L_{JN'}$ 、 $L_{JK'}$ 与X轴正方向的夹角分别为 φ_4 、 φ_5 ,则需要分别在四杆机构 $JN'M'Q$ 、 $JK'D'P$ 中单独进行研究。

当 $L_{JN'}$ 、 $L_{JK'}$ 达到极限位置时,存在矢量闭环方程

$$\begin{cases} L_{QJ} + L_{JN'} = L_{QN'} \\ L_{PJ} + L_{JK'} = L_{PK'} \end{cases} \quad (14)$$

易得

$$\begin{cases} \varphi_4 = 2\arctan \frac{-n_3 \pm \sqrt{n_3^2 - n_1^2 + n_2^2}}{n_1 - n_2} \\ \varphi_5 = 2\arctan \frac{-n_6 \pm \sqrt{n_6^2 - n_4^2 + n_5^2}}{n_4 - n_5} \end{cases} \quad (15)$$

式中: $n_1 = (X_J - X_Q)^2 + (Y_J - Y_Q)^2 + 3L^2 - (L_1 + L_2)^2$, $n_2 = 2\sqrt{3}L(X_J - X_Q)$, $n_3 = 2\sqrt{3}L(Y_J - Y_Q)$, $n_4 = (X_J - X_P)^2 + (Y_J - Y_P)^2 + 3L^2 - (L_1 + L_2)^2$, $n_5 = 2\sqrt{3}L(X_J - X_P)$, $n_6 = 2\sqrt{3}L(Y_J - Y_P)$ 。

将 φ_4 、 φ_5 、 μ_1 、 μ_2 转换成正方向所对应的夹角。若 $\varphi_4 > \mu_1$,或者 $\varphi_5 > \mu_2$,则将其值替换为 $-(360^\circ - *)$ (*为换算前的数值)。计算可得特征角1的许可范围

$$\min\{\varphi_4, \varphi_5 - 60^\circ\} \leq \varphi_1 \leq \max\{\varphi_4, \varphi_5 - 60^\circ\} \quad (16)$$

不失一般性地,这里仅给出特征角2、3的许可范围公式

$$\min\{\varphi_6 - 60^\circ, \varphi_7\} \leq \varphi_2 \leq \max\{\varphi_6 - 60^\circ, \varphi_7\} \quad (17)$$

$$\min\{\varphi_8 - 60^\circ, \varphi_9\} \leq \varphi_3 \leq \max\{\varphi_8 - 60^\circ, \varphi_9\} \quad (18)$$

式中: φ_6 、 φ_7 对应N副分别在四杆机构 $N'J'E'O'$ 、 $N'K''D''P$ 约束下的许可角度。 φ_8 、 φ_9 对应K副分别在四杆机构 $K''N''M''Q$ 、 $K''J''E''O'$ 约束下的许可角度。

分别锁定转动副O'和E、Q和M',若Q副、P副在四杆机构 $JN'M'Q$ 、 $N'K''D''P$ 中满足整转副存在条件,则特征角4、5的许可范围应该为 $0^\circ \sim 360^\circ$;若不满足,当 $JN'M'Q$ 、 $N'K''D''P$ 中的 QM' 、 PD'' 运动至极限位置时,存在矢量闭环方程

$$\begin{cases} L_{JQ} + L_{QM'} = L_{JM'} \\ L_{N'P} + L_{PD''} = L_{N'D''} \end{cases} \quad (19)$$

易得

$$\begin{cases} \phi_1 = 2\arctan \frac{-2t_1 \pm 2\sqrt{t_1^2 - t_2}}{t_3} \\ \phi_2 = 2\arctan \frac{-2t_4 \pm \sqrt{2t_4 - t_5}}{t_6} \end{cases} \quad (20)$$

式中 $t_1 = T_Y L_1$, $t_2 = t_3(a_1 + 2T_X L_1 - b_1)$, $t_3 = a_1 - 2T_X L_1 - b_1$, $t_4 = V_Y L_1$, $t_5 = t_6(a_2 + 2V_X L_1 - b_2)$, $t_6 = a_2 - 2V_X L_1 - b_2$, $a_1 = T_X^2 + L_1^2 + T_Y^2$, $b_1 = (\sqrt{3}L + L_2)^2$, $a_2 = V_X^2 + L_1^2 + V_Y^2$, $b_2 = (\sqrt{3}L + L_2)^2$ 。

T_X 、 V_X 、 T_Y 、 V_Y 分别为 L_{JQ} 、 $L_{N'P}$ 在X、Y方向上的投影。

因此,特征角4、5的许可范围分别为

$$\min \phi_1 \leq {}^1\gamma_3^* \leq \max \phi_1 \quad (21)$$

$$\min \phi_2 \leq \gamma_2^* \leq \max \phi_2 \quad (22)$$

2.2 动平台姿态的调整

特征点的位置确定之后,对机器人进行一次重构(锁定转动副 O' 、 E'),即动平台绕 J'' 做定轴转动。此时,调整 $L_{J''N''}$ 与 X 轴正方向的夹角至 φ_4 。调整 $L_{PD''}(L_{QM''})$ 与 X 轴正方向的夹角,将内副的转角转换成外副的转角。基于第 1 节的研究,在调整动平台的姿态时,存在 4 组输入参量(表 3)。

表 3 调整动平台姿态的输入参量

Table 3 Adjust the input parameters of the moving platform attitude 1

组别	向量	向量与 X 轴正方向的夹角/(°)
1*	$L_{PD''}$	${}^4\gamma_{2(1)}$
2*	$L_{PD''}$	${}^4\gamma_{2(2)}$
3*	$L_{QM''}$	${}^4\gamma_{3(1)}$
4*	$L_{QM''}$	${}^4\gamma_{3(2)}$

综上,调整特征点的位置和动平台的姿态时,均存在 4 组输入参量。

3 运动/力传递性能指标

图 4 为锁定转动副 O' 、 E' 后可重构 3-RRR 平面并联机器人的机构简图。在 Q'^* 点建立辅助坐标系 $\{Q'^*-X'Y'\}$ 。

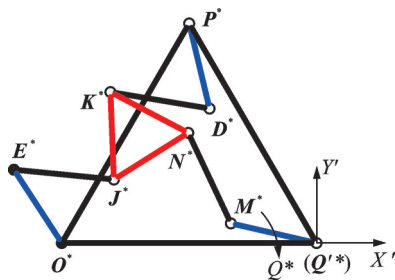


图 4 锁定 O' 、 E' 后的机构简图

Fig.4 Mechanism diagram after locking O' and E'

令 $L_{Q''M''}$ 、 $L_{M''N''}$ 与 X' 轴正方向的夹角分别为 ϕ_1 、 ϕ_2 。以杆 $Q''M''$ 为原动件。 $Q''M''N''$ 上各转动副的旋量以及传递力旋量满足

$$\begin{cases} \mathcal{S}_{Q''} = [0, 0, 1; 0, 0, 0] \\ \mathcal{S}_{M''} = [0, 0, 1; L_1 \sin \phi_1, -L_1 \cos \phi_1, 0] \\ \mathcal{S}_{N''} = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}^T, \begin{pmatrix} L_1 \sin \phi_1 + L_2 \sin \phi_2 \\ -L_1 \cos \phi_1 - L_2 \cos \phi_2 \\ 0 \end{pmatrix}^T \right] \\ \mathcal{S}_T \circ \mathcal{S}_{M''} = 0 \quad \mathcal{S}_T \circ \mathcal{S}_{N''} = 0 \end{cases} \quad (23)$$

式中“ \circ ”为旋量的互易积运算。

输入运动旋量 $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_{Q''}$, 传递力旋量可用式(23)计算得出

$$\mathcal{S}_T = \begin{bmatrix} \cos \phi_2 & \sin \phi_2 & 0; \\ 0 & 0 & L_1 \cos \phi_1 \sin \phi_2 - L_1 \cos \phi_2 \sin \phi_1 \end{bmatrix} \quad (24)$$

动平台做定轴转动,故输出运动旋量为

$$\mathcal{S}_O = [0, 0, 1; Y_{J''}, -X_{J''}, 0] \quad (25)$$

分别计算支链的输入传递指标 λ 和输出传递指标 η

$$\begin{cases} \lambda = \frac{|\mathcal{S}_T \circ \mathcal{S}_1|}{|\mathcal{S}_T \circ \mathcal{S}_1|_{\max}} = |\sin(\phi_2 - \phi_1)| = |\cos \phi| \\ \eta = \frac{|\mathcal{S}_T \circ \mathcal{S}_O|}{|\mathcal{S}_T \circ \mathcal{S}_O|_{\max}} = |\sin \omega| \end{cases} \quad (26)$$

式中: ϕ 为 M'' 的运动方向和杆 $M''N''$ 所夹角; ω 为杆 $M''N''$ 和杆 $J''N''$ 所夹角。

推导局部传递指标的解析式

$$\kappa = \min\{\lambda, \eta\} = \min\{|\cos \phi|, |\sin \omega|\} \quad (27)$$

本文的几种重构构型的基本结构是相同的,故上述结论同样适用于其他情况。 λ 、 η 的值越接近 1,则运动/力传递性能越优异;当它们等于 0 时,代表机器人在运动过程中发生了奇异^[14]。

4 数值算例

4.1 调整特征点位置的输入参量计算

给定动平台的目标位姿、特征点 J 的初始位置、各杆的长度等参数,如表 4 所示。

表 4 机器人的结构及位姿参数

Table 4 Structure and pose parameters of the robot

参数	值/mm
动平台目标位姿	603.08
	866.06
	32.23°
特征点 J 的初始位置	734.25
	212.34
L_0	2 028.68
L_1	700.00
L_2	800.00
L	404.15

运用式(1、16),计算特征点的目标位置 J'' 以及特征角的变化范围为

$$J'' = [414.78 \quad 508.46]^T$$

$$\varphi_1 \in [-49.30^\circ, 81.91^\circ]$$

取 $\varphi_1 = 33.65^\circ$ 。结合表 1,计算 4 组输入参量,结果如表 5 所示。经分析,组 1、组 3 中,各角度满足式(17、18)的数学条件,但利用式(27)进行数值算例验证时,存在奇异位形。组 2 中, $L_{K''N''}$ 与 X 正方向的夹角不满足特征角 3 的条件,即式(18)。组

表5 调整特征点位置的输入参量

Table 5 Adjust the input parameters of the feature point position

组别	$L_{N'K''}$ 与X轴正方向的夹角/(°)	$L_{K''J''}$ 与X轴正方向的夹角/(°)
1	-124.564 6	-124.566 1
2	-124.564 6	136.187 3
3	136.179 0	136.187 3
4	136.179 0	-124.566 1

4中对应的角度均满足式(17、18),且不存在奇异位形。

运用Solidworks Motion插件,并结合组4中的输入参量,进行数值算例验证的具体操作步骤为:首先,锁定 O' 、 E ,转动内副 J ,调整 $L_{JN'}$ 与X正方向的夹角为 33.650° 。然后,锁定 Q 、 M' ,解除 O' 、 E ,转动内副 N' ,调整 $L_{N'K''}$ 与X正方向的夹角为 136.179° 。最后,锁定 P 、 D'' ,解除 Q 、 M' ,转动内副 K'' ,调整 $L_{K''J''}$ 与X正方向的夹角为 -124.566° 。

4.2 调整特征点位置的输入参量筛选

基于第2.1节的研究,组4的输入参量可以转换成8组外副的输入参量(表6)。

表6 外副的输入参量

Table 6 Input parameters of external rotation joint

组别	$L_{QM'}$ 与X轴正方向的夹角/(°)	$L_{PD''}$ 与X轴正方向的夹角/(°)	$L_{OJ''}$ 与X轴正方向的夹角/(°)
1'	${}^1\gamma_{3(1)}^* = -163.506$	${}^2\gamma_{2(1)}^* = -37.145$	${}^3\gamma_{1(1)} = 123.011$
2'	${}^1\gamma_{3(1)}^* = -163.506$	${}^2\gamma_{2(1)}^* = -37.145$	${}^3\gamma_{1(2)} = -21.423$
3'	${}^1\gamma_{3(1)}^* = -163.506$	${}^2\gamma_{2(1)}^* = -176.362$	${}^3\gamma_{1(1)} = 123.011$
4'	${}^1\gamma_{3(1)}^* = -163.506$	${}^2\gamma_{2(2)}^* = -176.362$	${}^3\gamma_{1(2)} = -21.423$
5'	${}^1\gamma_{3(2)}^* = 83.221$	${}^2\gamma_{2(1)}^* = -37.145$	${}^3\gamma_{1(2)} = -21.423$
6'	${}^1\gamma_{3(2)}^* = 83.221$	${}^2\gamma_{2(1)}^* = -37.145$	${}^3\gamma_{1(1)} = 123.011$
7'	${}^1\gamma_{3(2)}^* = 83.221$	${}^2\gamma_{2(2)}^* = -176.362$	${}^3\gamma_{1(1)} = 123.011$
8'	${}^1\gamma_{3(2)}^* = 83.221$	${}^2\gamma_{2(2)}^* = -176.362$	${}^3\gamma_{1(2)} = -21.423$

研究发现, ${}^1\gamma_{3(2)}^*$ 、 ${}^2\gamma_{2(2)}^*$ 的值不满足式(21、22)的条件,因此,组3'、4'、5'、6'、7'、8'的输入参量均不可行。运用组2'的输入参量调整特征点的位置时,根据机构的初始安装位置和机构运动的连续性, ${}^3\gamma_{1(2)}$ 的值不满足要求。这样,只有组1'满足全部要求。实验结果显示,特征点目标位置 J'' 的坐标为 $(414.81, 508.74)^\top$ 。

4.3 调整动平台姿态的输入参量计算及筛选

基于第2.2节的研究,调整动平台的姿态,存在4组输入参量。运用式(3),计算得到的结果如表7所示。

机器人在实际运动过程中必须要保证连续性,也即不能在不同输入空间之间“瞬间转移”。因此,

表7 调整动平台姿态的输入参量

Table 7 Adjust the input parameters of the moving platform attitude 2

组别	向量	向量与X轴正方向的夹角/(°)
1*	$L_{PD''}$	-76.599
2*	$L_{PD''}$	159.023
3*	$L_{QM''}$	166.997
4*	$L_{QM''}$	111.414

在运用Solidworks Motion插件进行数值算例验证时,只有组1*、3*、4*满足运动要求。进一步可导出动平台位置和姿态的坐标值数据,绘出动平台的运动路径流程图(图5),以及拓扑重构前、后动平台的位姿变化曲线(图6)。

4.4 动平台运动路径的最优解

基于第3、4节的结果,执行数值算例(原动件的角速度设为恒定值 1 r/min),可绘制运用组1*、3*、4*的输入参量调整动平台位姿的局部传递指标值的变化曲线(图7)。

图7显示,在机构运动过程中,存在 $\lambda=0$ 的情况,这表明机构发生了奇异。利用式(28)可计算出 Δ_{1^*} 、 Δ_{3^*} 分别为0.142 0和0.101 2。因此,使用组3*的输入参量时,各局部传递指标值与最优值的偏离程度最低。

$$\Delta_j = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_{j,i} - \tilde{X})^2} \quad \Delta = \min \Delta_j \quad (28)$$

式中: n 为数据个数; $X_{j,i}$ 为数据; \tilde{X} 为最优数据; Δ_j 为各组数据与最优数据的偏离程度。

此外,相对于其他两组输入参量,组3*下的平均局部传递指标值更接近1,且该方式下的最小局部传递指标值为0.785 9,也更接近于1。因此,采用组3*进行路径规划时,运动/力传递性能最优。这表明,通过合理地选取重构方式,可消除机器人在运动过程中的全部奇异位形。虽然通过驱动冗余^[15]或运动冗余^[16]的方法也能够避开并联机器人的奇异位形,但是,驱动冗余会增加机器人的协调控制难度,运动冗余会在其他位姿处“诱导”出新的奇异位形。

压力角作为衡量机构传力性能的标志,其值越小,则表明机构的传力效果越好。为此,绘制了各组输入参量下,在动平台铰链点处的压力角变化曲线,如图8所示。

利用式(28)可计算出 Δ_{1^*} 、 Δ_{3^*} 、 Δ_{4^*} (对应组1*、组3*、组4*,3组输入参量下的压力角与最优数值的偏离程度),它们分别为22.451 7、8.978 9、12.457 4。显然,组3*下各压力角值与最优值的偏离程度最低,并且其平均压力角也最小。因此,运用组3*输入参

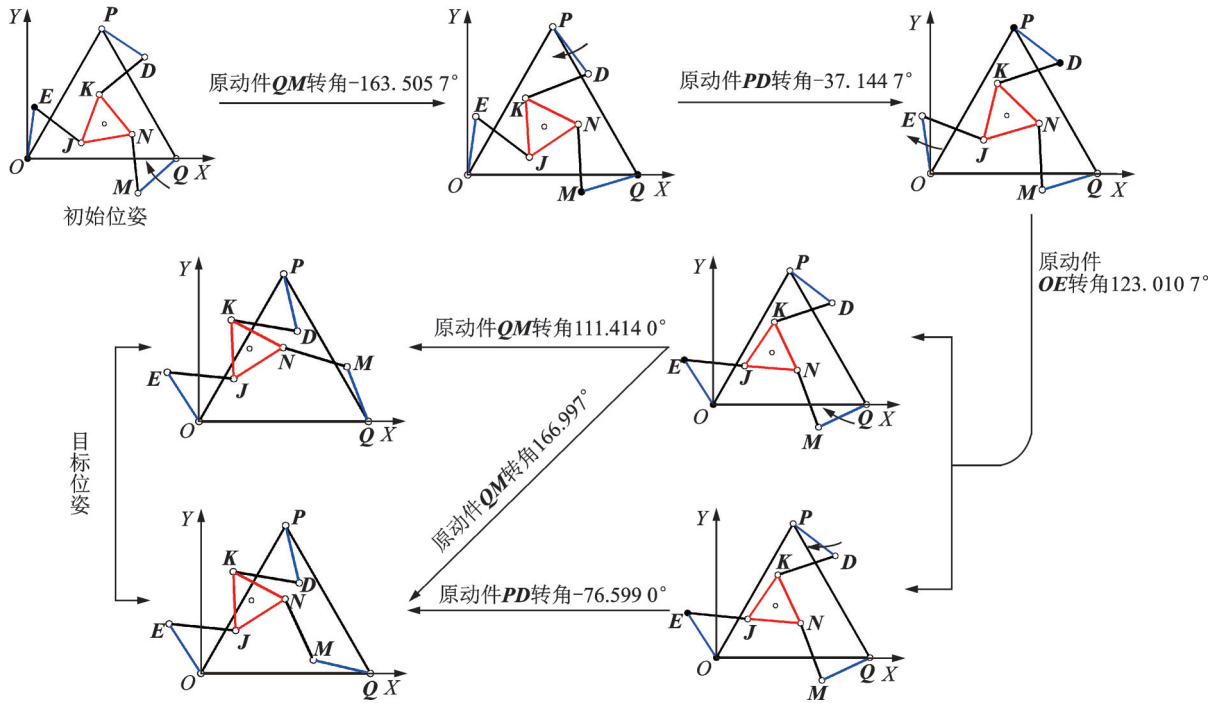


图 5 调整动平台位姿的流程图

Fig.5 Flow chart of adjusting moving platform pose

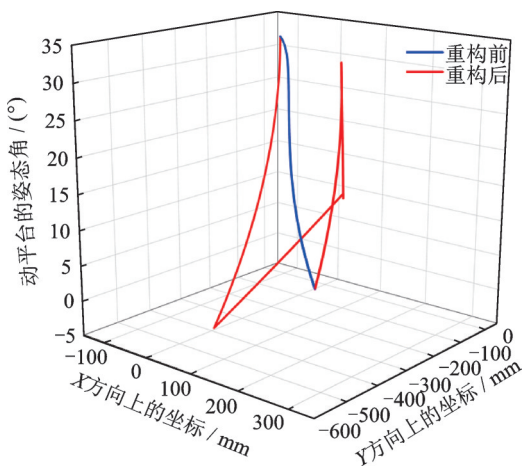


图 6 拓扑重构前、后动平台的位姿变化曲线

Fig.6 Pose change curves of the front and rear moving platforms are reconstructed by topology

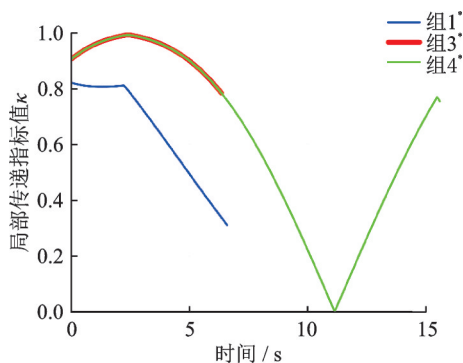


图 7 各组输入参量下局部传递指标值的变化图

Fig.7 Change diagram of local transfer index value under each group of input parameters

量调整动平台位姿时,机构的传力效果最好。这与利用局部传递指标所得出的结论完全吻合。

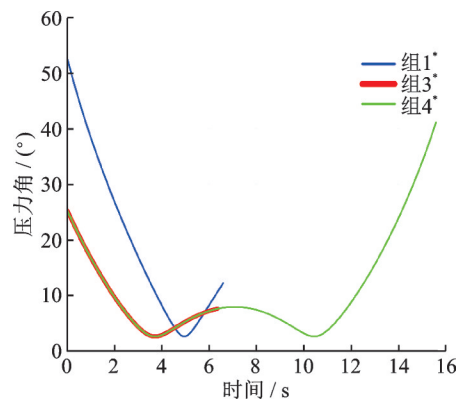


图 8 各组输入参量对应的压力角变化曲线图

Fig.8 Pressure angle change curves corresponding to the input parameters of each group

5 路径规划算法的推广

与“点对点”路径规划有所不同,连续路径规划能够对机器人进行连续的路径跟踪。可重构 3-RRR 平面并联机器人具有结构可变、自由度可变的特点,故其连续路径规划较为困难。但如果合理地利用上文的“点对点”路径规划算法,就能够规划出较精确的连续路径。

如图 9 所示,点 A、B 分别为动平台的初始位置和目标位置。其中,红色直线为已规划出的“点对点”路径,蓝色曲线为指定的连续路径。在蓝色曲线上插入 4 个分段点 C、D、E、F,将连续路径划分成 5 段。这样,通过 5 次“点对点”路径规划,将动平台由各段曲线的起始点移至终止点,可实现连续路径跟踪。连续路径上插入的分

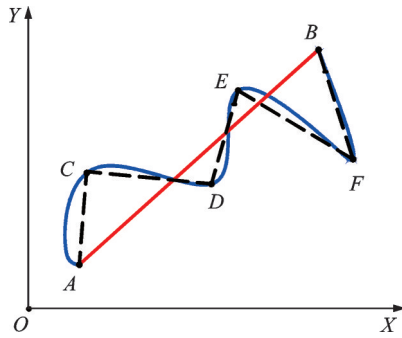


图9 连续路径跟踪

Fig.9 Continuous path tracking

段点数越多,则进行“点对点”路径规划的次数就会越多,但动平台的实际运动路径就会越接近于指定路径。

6 结 论

(1)通过求解反向运动学方程,确定了可重构3-RRR平面并联机器人的6组重构序列。采用锁定同一条支链上中、外副的拓扑重构方式,使得动平台执行4次定轴转动,可依次调整特征点的位置和动平台的姿态。

(2)分别推导出3次重构调整特征点位置和1次重构调整动平台姿态时对应的输入量解析式。研究发现,调整特征点的位置和动平台的姿态均存在4组输入参量。

(3)调整特征点位置和动平台姿态的输入参量中,分别有1组和3组输入参量既满足数学条件又满足机构学条件。计算出3组输入参量下的局部传递指标值,确定了消除全部奇异位形的最优解。

(4)将“点对点”路径规划算法推广至连续路径规划中。通过在连续路径曲线上插入若干个分段点,并采用“点对点”路径规划的思想,能够实现连续路径的跟踪,且分段点数越多,则路径跟踪效果越佳。

参考文献:

[1] YE P D, YOU J J, XI F F, et al. An interval discretization method for workspace determination of parallel mechanisms[J]. *Arabian Journal for Science and Engineering*, 2022, 47(7): 8805-8827.

[2] 周昌春,方跃法,叶伟,等. 6-RRS超冗余驱动飞行模拟器的性能分析[J]. *机械工程学报*, 2016, 52(1): 34-40.

ZHOU Changchun, FANG Yuefa, YE Wei, et al. Performance analysis of 6-RRS hyper-redundant actuation flight simulator[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2016, 52(1): 34-40.

[3] YOU J J, WANG L K, XI F F, et al. Decoupling algorithm and maximum operation frequency of a novel parallel type six-axis accelerometer[J]. *IEEE Sensors Journal*, 2020, 20(21): 12637-12651.

[4] 尤晶晶,符周舟,李成刚,等. 并联式六维加速度传感器的解耦参数辨识及其扰动分析[J]. *振动与冲击*, 2019, 38(1): 134-141.

YOU Jingjing, FU Zhouzhou, LI Chenggang, et al. Parameter identification and perturbation algorithm of parallel type six-axis accelerometer[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2019, 38(1): 134-141.

[5] 徐帅,尤晶晶,叶鹏达,等. 一种可重构3-RRR平面并联机构及其工作空间分析[J]. *南京航空航天大学学报*, 2022, 54(3): 466-472.

XU Shuai, YOU Jingjing, YE Pengda, et al. A reconfigurable 3-RRR planar parallel mechanism and its workspace analysis[J]. *Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics*, 2022, 54(3): 466-472.

[6] 王澍声,尤晶晶,黄宁宁,等. 一种新的可重构三自由度平面并联机构的结构设计及运动学分析[J]. *南京航空航天大学学报*, 2023, 55(3): 437-443.

WANG Shusheng, YOU Jingjing, HUANG Ningning, et al. Structural design and kinematic analysis of a new reconfigurable 3-DOF planar parallel mechanism [J]. *Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics*, 2023, 55(3): 437-443.

[7] YOU J J, XI F F, SHEN H P, et al. A novel Stewart-type parallel mechanism with topological reconfiguration: Design, kinematics and stiffness evaluation[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2021 (162): 104329.

[8] YI Y, MCINROY J E, CHEN Y. Fault tolerance of parallel manipulators using task space and kinematic redundancy[J]. *IEEE Transactions on Robotics*, 2006, 22(5): 1017-1021.

[9] 吴宗胜,傅卫平. 移动机器人全局路径规划的模拟退火-教与学优化算法[J]. *机械科学与技术*, 2016, 35(5): 678-685.

WU Zongsheng, FU Weiping. SA and teaching-learning-based optimization algorithm for mobile robots global path planning[J]. *Mechanical Science and Technology for Aerospace Engineering*, 2016, 35(5): 678-685.

[10] RAKHODAEI H, SAADAT M, RASTEGARPA-NAH A, et al. Path planning of the hybrid parallel robot for ankle rehabilitation[J]. *Robotica*, 2016, 34(1): 173-184.

[11] BAZIYAD M, SAAD M, FAREH R, et al. Addressing real-time demands for robotic path planning systems: A routing protocol approach[J]. *IEEE Access*, 2021, 9: 38132-38143.

[12] 赵剑波,高峰,岳义. 6-PPPS正交六自由度并联机器

- 人的轨迹规划[J]. 机械设计与研究, 2007(3): 62-65.
- ZHAO Jianbo, GAO Feng, YUE Yi. Trajectory planning of 6-PPPS orthogonal 6-DOF parallel robot[J]. Machine Design & Research, 2007(3): 62-65.
- [13] 陶宗杰, 安琦. 最优化3-RRR球面并联机器人路径规划方法[J]. 华东理工大学学报(自然科学版), 2014, 40(2): 267-272.
- TAO Zongjie, AN Qi. Path planning method for optimum 3-RRR spherical parallel manipulator[J]. Journal of East China University of Science and Technology (Natural Science Edition), 2014, 40(2): 267-272.
- [14] TAKEDA Y, FUNABASHI H. Kinematic and static characteristics of in-parallel actuated manipulators at singular points and in their neighborhood[J]. JSME International Journal Serial C, Dynamics, Control, Robotics, Design and Manufacturing, 1996, 39(1): 85-93.
- [15] 李瑞琴, 亢书华, 张启升, 等. 冗余驱动并联机构的性能特征及应用研究进展[J]. 中北大学学报(自然科学版), 2021, 42(5): 385-395.
- LI Ruiqin, KANG Shuhua, ZHANG Qisheng, et al. Research process on performance characteristic and application of redundantly actuated parallel mechanism [J]. Journal of North University of China (Natural Science Edition), 2021, 42(5): 385-395.
- [16] LACOMBE J, GOSSELIN C. Singularity analysis of a kinematically redundant (6+2)-DOF parallel mechanism for zero-torsion configurations[J]. Mechanism and Machine Theory, 2022, 170: 104682.

(编辑:陈珺)