

DOI:10.16356/j.1005-2615.2024.02.009

基于高阶间断伽辽金方法的两相流数值模拟

黄健健, 欧阳文轩, 吕宏强

(南京航空航天大学航空学院, 南京 210016)

摘要: 基于高阶间断伽辽金方法对可压缩两相流问题进行了数值求解。计算区域采用非结构网格划分, 对于欧拉方程以及 Level Set 方程分别使用牛顿法以及龙格库塔方法进行迭代求解, 并通过统一算法进行数据交换, 实现统一框架下 Level Set 方程在可压缩流场中的求解。最后, 通过经典二维算例对本文所提算法展开验证。通过 Zalesak 圆盘等算例验证了算法的高分辨率、质量守恒性及其在处理大变形问题上的优势, 然后对左行激波通过氦气气泡的数值模拟, 验证了本文算法对流场两相流界面复杂形状的高精度捕捉能力。

关键词: 间断伽辽金; 可压缩流场; 两相流; Level Set; 界面捕捉

中图分类号: V211.3

文献标志码: A

文章编号: 1005-2615(2024)02-0273-08

Numerical Simulation of Two-Phase Flow Based on High-Order Discontinuous Galerkin Method

HUANG Jianjian, OUYANG Wenxuan, LYU Hongqiang

(College of Aerospace Engineering, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing 210016, China)

Abstract: The compressible two-phase flow problem is numerically solved based on the high order discontinuous Galerkin method. The calculation area is divided into unstructured grids, the Euler equation and the Level Set equation are solved iteratively by Newton method and Runge Kutta method, respectively. And the unified algorithm is used for data exchange to realize the solution of the Level Set equation in the compressible flow field under the unified framework. Finally, the algorithm developed in this paper is validated by a classical 2-D example. The Zalesak disk and other examples are given to verify the high resolution of algorithm, mass conservation and advantages in dealing with large deformation problems. Then, the numerical simulation of left-running shock wave by helium bubble verifies the high accuracy of the algorithm in capturing the complex shape of the two-phase flow interface in the flow field.

Key words: discontinuous Galerkin; compressible flow field; two-phase flow; Level Set; interface capturing

两相流数值模拟一直是计算流体力学研究领域的热点与难点, 其中的困难之处在于气液界面的存在、变形以及界面处流体物性的变化, 进而导致了气液相界面追踪的不准确性。两相流运动界面的捕捉, 关键在于对瞬时变化的流场, 如何准确地给出界面复杂的几何外形与位置坐标。

对两相流相界面的数值模拟主要分为两类方

法: 界面追踪方法和界面捕捉方法。这两种方法的主要区别在于, 界面追踪方法是显式的, 通过特殊的标记方法直接表达流体相界面的几何形状和空间位置; 界面捕捉方法则是通过引入标量函数, 比如流体体积法 (Volume of fluid, VOF) 中的流体体积函数以及 Level Set 方法中的界面函数等来代表流体界面两侧不同的流体介质, 然后再通过给定的

收稿日期: 2023-10-17; 修订日期: 2024-01-25

通信作者: 吕宏强, 男, 教授, 博士生导师, E-mail: hongqiang.lu@nuaa.edu.cn。

引用格式: 黄健健, 欧阳文轩, 吕宏强. 基于高阶间断伽辽金方法的两相流数值模拟[J]. 南京航空航天大学学报, 2024, 56(2): 273-280. HUANG Jianjian, OUYANG Wenxuan, LYU Hongqiang. Numerical simulation of two-phase flow based on high-order discontinuous Galerkin method[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2024, 56(2): 273-280.

算法求解出准确的流体界面。

在诸多运动界面的捕捉方法中,基于Euler网格的Level Set方法在近些年引起广泛关注。Level Set方法是由Osher和Sethian在1988年的首先提出的^[1]。经过研究,为了保证Level Set函数值一直是到界面的距离,必须在每次时间迭代之后对其进行重新初始化,从而保证计算的准确性。Sethian团队^[2-5]通过研究,提出了快速行进算法(Fast marching method, FMM)方法,成功地对Level Set函数进行了重新初始化,并进行了数值验证,快速自适应窄带^[6]方法的提出提高了Level Set方法准确性及求解效率。随后Sussman等^[7]通过约束重新初始化技术,极大地改善了Level Set方法的质量守恒性,提高了计算结果的精度。

近年来,间断伽辽金方法在求解计算流体力学问题上获得了长足的发展^[8-9]。1973年,Reed和Hill^[10]在求解中子输运方程(时间无关的线性双曲型方程)问题的论文中,首次提出了间断伽辽金方法。1982年,Chavent和Salzano^[11]将Godunov数值通量引入到间断伽辽金方法中,成功地求解了非线性双曲型问题。在20世纪末,Cockburn和Shu等^[12-17]提出了著名的龙格-库塔间断伽辽金(Runge Kutta discontinuous Galerkin, RKDG)方法,在求解非线性双曲型问题的研究上取得突破性的进展。并且将Shu和Osher^[18]于1988年提出的显式TVD二阶龙格-库塔格式做出了改进,在时间和空间上都达到了高阶精度。在2005年,蔚喜军和周铁^[19]采用RKDG有限元方法求解了二维可压缩Euler方程,验证了间断伽辽金方法的高精度特性以及在处理复杂几何区域及边界的优势。随着时间的发展,间断伽辽金方法逐渐被国内外学者所关注,现已应用到包括空气动力学、电磁学、计算声学和水动力学等多个领域。

间断伽辽金方法具备多种优点,具备守恒、稳定的数学特性,而且可以通过改变多项式阶数提高精度,很容易拓展到高阶;同时因其高分辨率捕捉的特性,可以有效处理求解两相流问题中出现的压力、密度等流场物理量的间断。本文通过高阶间断伽辽金方法求解Level Set方程,再将其与流场求解器进行耦合,对两相流问题进行数值模拟。通过典型算例验证高精度间断伽辽金格式对两相流场界面的捕捉能力。

1 控制方程

1.1 欧拉方程

对于可压缩欧拉方程,它的偏微分形式可以写

成如下的数学形式

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla \cdot F(U) = 0 \quad (1)$$

式中: U 为守恒变量, F 为无黏通量。

1.2 Level Set方程

Level Set方法提出了一个界面函数 $\varphi(\bar{x}, t)$ 。任意时刻的相界面就是此函数的零等值面。在此构造函数 $\varphi(\bar{x}, t)$,使得在任意时刻,运动界面 $\Gamma(t)$ 恰是 $\varphi(\bar{x}, t)$ 的零等值面

$$\Gamma(t) = \{\bar{x} \in \Omega: \varphi(\bar{x}, t) = 0\} \quad (2)$$

式中 Ω 为计算区域。

φ 值应满足在 $\Gamma(0)$ 附近为法向单调,在 $\Gamma(t)$ 上为0。一般可取 $\varphi(\bar{x}, 0)$ 为 \bar{x} 点到界面 $\Gamma(0)$ 的符号距离

$$\varphi(\bar{x}, 0) = \begin{cases} d(\bar{x}, \Gamma(0)) & \bar{x} \in \Omega_1 \\ 0 & \bar{x} \in \Gamma(0) \\ -d(\bar{x}, \Gamma(0)) & \bar{x} \in \Omega_2 \end{cases} \quad (3)$$

式中: $d(\bar{x}, \Gamma(0))$ 表示 \bar{x} 点到 $\Gamma(0)$ 的距离; Ω_1 、 Ω_2 为两种不同的流体介质区域。

可压流场中Level Set方程的守恒形式为

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathbf{u}(\bar{x}, t) \cdot \nabla \varphi = 0 \quad (4)$$

式中 \mathbf{u} 表示流体界面处的速度。

为了保证数值求解的准确性,要求 $\varphi(\bar{x}, t)$ 始终保持点 \bar{x} 到界面 $\Gamma(0)$ 的距离。一般数值计算方法求解Level Set方程通常会对 $\varphi(\bar{x}, t)$ 进行重新初始化。但是采用间断有限元方法则可以避免这一复杂的计算过程或者较长时间计算不用进行重新初始化操作^[20]。

2 离散方法

2.1 空间离散

2.1.1 欧拉方程离散

采用间断伽辽金法对方程式(1)进行空间离散,将计算域剖分为非重叠单元 Ω_e 的集合,在方程式(1)左右两边同时乘上任意测试函数并且积分,同时代入测试函数的高阶表达式,得出

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_e} \phi_j U_h d\Omega_e + \int_{\partial\Omega_e} \phi_j F_i(U_h^-, U_h^+) \cdot \mathbf{n}_e d\sigma - \int_{\Omega_e} \nabla \phi_j \cdot F_i(U_h) d\Omega_e = 0 \quad (5)$$

式中: ϕ_j 为对应的基函数, σ 为计算区域边界, \mathbf{n}_e 表示单元边界的外法矢。在边界积分的处理上,采用LLF格式求解无黏数值通量 $F_i(U_h^-, U_h^+) \cdot \mathbf{n}_e$,其中, U_h^- 和 U_h^+ 分别表示交界面左单元和右单元的变量值。

2.1.2 Level Set 方程离散

采用间断伽辽金有限元对方程式(4)进行空间离散,可得

$$\sum_{j=1}^N \frac{\partial \varphi_j}{\partial t} \int_{\Omega_e} \phi_j \phi_i d\Omega_e + \sum_{j=1}^N \varphi_j \int_{\Omega_e} \mathbf{u}(x, t) \cdot \nabla \phi_j \phi_i d\Omega_e = \sum_{j=1}^N \mathbf{n}_j \cdot (f_j - f_j^*) \int_{\partial \Omega_e} \phi_j \phi_i d\sigma \quad \forall i \quad (6)$$

式中:单元变量 $\varphi_h = [\phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots, \phi_n][\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n]^T$, 其中 $\phi_i (i=1, 2, \dots, n)$ 为基函数, 待求单元未知量为 $\varphi = [\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n]$ 。

2.2 时间离散

2.2.1 欧拉方程隐式时间离散

对式(5)数值积分后,可以得到

$$\mathbf{M} \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{R}(\mathbf{u}) \quad (7)$$

式中: \mathbf{u} 为全局自由度矢量, 将其写成向量的形式为: $\mathbf{u} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k, \dots, \mathbf{u}_{\text{Nele}}]^T$, \mathbf{u}_k 表示单元 k 的自由度, Nele 代表单元数, \mathbf{M} 为质量矩阵, $\mathbf{R}(\mathbf{u}) = [\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \dots, \mathbf{R}_k, \dots, \mathbf{R}_{\text{Nele}}]^T$ 为全局的残值矢量, 每个变量 \mathbf{R}_k 则对应着该单元的残值矢量。

对方程式(7)取新的 t^{n+1} 时间步, 得到隐式方法的一般形式

$$\mathbf{M} \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{R}(\mathbf{u}^{n+1}) \quad (8)$$

采用向后欧拉差分法, 得到

$$\mathbf{M} \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} = \mathbf{R}(\mathbf{u}^{n+1}) \quad (9)$$

式中 Δt 为时间步长。定义新的残值为

$$\mathbf{R}_e(\mathbf{u}^{n+1}) = \mathbf{M} \frac{(\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n)}{\Delta t} - \mathbf{R}(\mathbf{u}^{n+1}) \quad (10)$$

定义 $\Delta \mathbf{u} = \mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^k$, 同时在每个时间步 t^{n+1} 采用 Newton 法进行迭代求解, 直到第 k 个时间步残值 $\mathbf{R}_e(\mathbf{u}^k)$ 趋于 0。

$$\begin{cases} \mathbf{u}^{(0)} = \mathbf{u}^{(n)} \\ \mathbf{A} \Delta \mathbf{u}^{k+1} = -\mathbf{R}_e(\mathbf{u}^k) \\ \mathbf{u}^{k+1} = \mathbf{u}^k + c \Delta \mathbf{u}^{k+1} \\ \mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^{(k+1)} \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots, k_{\max} \quad (11)$$

式中: $c \in [0, 1]$ 为阻尼因子, $\mathbf{A} = \left(\frac{\partial \mathbf{R}_e}{\partial \mathbf{u}} \right)^k$ 为第 k 个牛顿迭代步的雅可比矩阵。

2.2.2 Level Set 方程离散

针对 Level Set 方程, 残值项取 t^n 时间步变量进行计算, 可以得到显式方法的一般形式

$$\mathbf{M} \frac{d\varphi}{dt} = \mathbf{R}(\varphi^n) \quad (12)$$

为了得到高精度的数值解, 文中采用多步 Runge-Kutta 方法对方程式(12)进行数值求解, 该

方法在 t^n 时间步和 t^{n+1} 时间步之间计算多个中间步的数值解, 然后根据这些数值解和权重计算得到 t^{n+1} 时间步的数值解^[21]。本文采用了较为常用的 3 步 Runge-Kutta 方法, 有

$$\begin{aligned} \varphi^{(1)} &= \varphi^n + \Delta t \mathbf{M}^{-1} \mathbf{R}(\varphi^n) \\ \varphi^{(2)} &= \frac{3}{4} \varphi^n + \frac{1}{4} [\varphi^{(1)} + \Delta t \mathbf{M}^{-1} \mathbf{R}(\varphi^{(1)})] \\ \varphi^{(n+1)} &= \frac{1}{3} \varphi^n + \frac{2}{3} [\varphi^{(2)} + \Delta t \mathbf{M}^{-1} \mathbf{R}(\varphi^{(2)})] \end{aligned} \quad (13)$$

显式格式求解时为保证格式的稳定性需要限制时间步长, 即

$$c \frac{\Delta t}{\Delta x} < \frac{1}{2p+1} \quad (14)$$

式中: c 代表问题中的最大波速(流场中即是最大速度), Δx 表示网格的最大尺寸, p 为多项式的阶数, 后面算例中时间步长取 Δt 允许的最大值。

3 计算流程

统一的间断伽辽金算法就是将流场解算器与 Level Set 方程的求解耦合到一起, 本文采用文献[22]提到的 Simple Fix 方法来实现二者的耦合。统一算法的求解流程如下:

Step 1 初始化流场物理量速度、压力和 Level Set 函数, 密度及比热常数 γ , 并且利用 Heaviside 函数进行光滑化处理。

Step 2 令 $i = 0, 1, \dots, N (t^0 \rightarrow t^N)$

(a) 使用流场解算器求解流场物理量;

(b) 根据速度求解 Level Set 方程, 得出 φ^{i+1} ;

(c) 根据新的 φ^{i+1} 以及界面两侧单元的比热常数 γ , 计算下一步的比热常数 γ^{i+1} , 计算比热常数的具体公式为

$$H_\epsilon(\varphi) = \begin{cases} 0 & \varphi < -\epsilon \\ \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\varphi}{\epsilon} + \frac{1}{\pi} \sin\left(\frac{\pi\varphi}{\epsilon}\right) \right) & -\epsilon \leq \varphi \leq \epsilon \\ 1 & \varphi > \epsilon \end{cases} \quad (15)$$

$$\gamma = H_\epsilon \gamma_1 + (1 - H_\epsilon) \gamma_2 \quad (16)$$

式中: $\epsilon = \alpha \Delta x$ (一般 $\alpha > 1$), Δx 为网格尺寸。

(d) 根据更新的 γ^{i+1} 和流场物理量以及距离函数 φ^{i+1} , 进行下一步迭代。

Step 3 输出数据。

4 算例测试

4.1 二维两相流界面的追踪

4.1.1 平移速度场

此算例来自文献[20], 主要模拟不同尺寸的

圆形气泡在常数流场的运动过程,用来验证本文发展的高阶间断有限元求解 Level Set 方程的高分辨率特性。求解区域范围为 $[-1,1] \times [-1,1]$,整个求解区域总共包含 800 个三角形网格单元,网格划分如图 1 所示,使用的网格尺寸为 $h=0.05$,初始位置气泡的圆心坐标是 $(0,0.6)$,气泡半径 $r=0.025$,用气泡直径 $d=2r$ 表示界面尺寸,保证界面尺寸小于网格尺寸。求解区域内的速度场为 $u_x=0, u_y=-1$,从速度场来看,气泡将向下进行垂直运动,使用的阶数为 $p=4$ 。

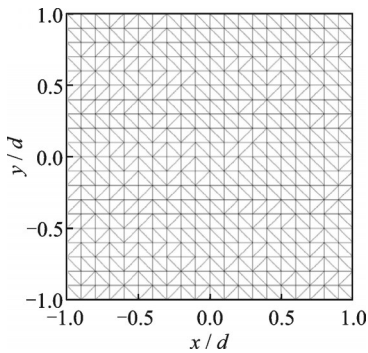


图1 平移速度场计算网格(800)

Fig.1 Translation velocity field calculation grid(800)

图 2 为 $d=h$ 时, $t=0,0.5,0.8,1$ 时刻气泡的形状和位置。图 2 显示当网格尺寸小于界面的尺寸时,气泡在不同时刻下的外形都能够保持圆形,本文算法在此情形下仍有较高的分辨率,能够捕捉到清晰的气泡界面。保持求解区域的网格和速度场不变,进一步缩小气泡的半径,重复进行上面的求解过程。图 3(a,b)依次为 $d=h, d=0.5h$ 时的计算结果。结果表明,当网格尺寸 $d=0.5h$ 时,开始时刻还能很好地捕捉到界面,但是随着时间的推移,界面逐渐破损,直至无法准确捕捉。此外,为了验证本文算法的质量守恒性,加大气泡的半径使得网格尺寸 $d>h$,再次重复上述求解过程。图 4(a,b)依次为 $d=1.5h, d=2h$ 时的计算结果。图 4 显示在计算过程中气泡几乎没有任何的质量损失,在不同时刻均能保持初始时的形状,而一般的算法会

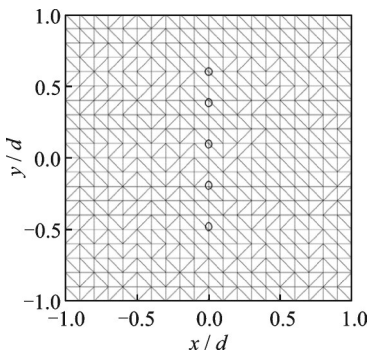


图2 不同时刻气泡的位置和形状($d=h$)

Fig.2 Position and shape of bubbles at different time ($d=h$)

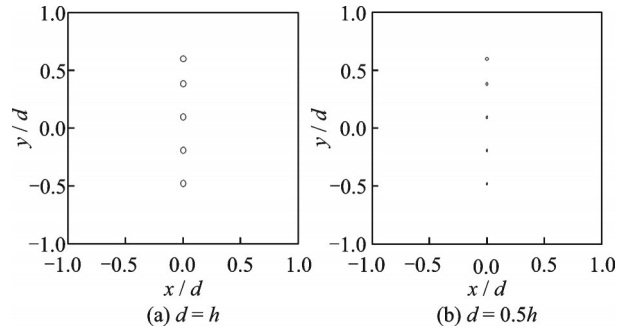


图3 不同时刻气泡的位置和形状($d \leq h$)

Fig.3 Position and shape of bubbles at different time($d \leq h$)

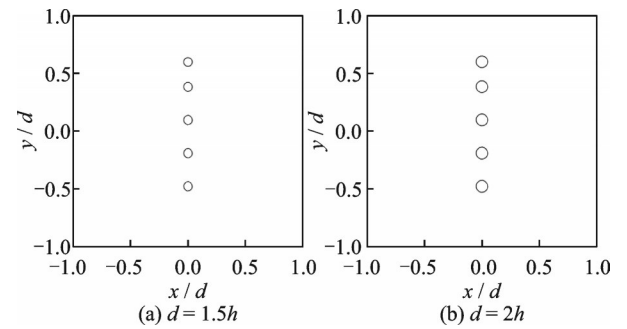


图4 不同时刻气泡的位置和形状($d > h$)

Fig.4 Position and shape of bubbles at different time($d > h$)

由于数值耗散的出现导致界面产生畸变。

4.1.2 Zalesak 圆盘算例

Zalesak 圆盘^[20]为中间存在一个长方形缺口的圆,通过捕捉它在不同时刻的几何外形来验证本文所发展算法的高精度特性。本算例的主要难点在于尖角会被磨平,数值耗散过大时,缺口往往会消失。计算区域为半径为 50 的圆形区域,圆心坐标为 $(50,50)$,共 6 500 个三角形网格单元,如图 5 所示,Zalesak 圆盘的圆心坐标为 $(50,75)$,圆盘半径为 $r=15$,圆盘内部存在一个长为 25、宽为 5 的长方形缺口,初始时刻的圆盘如图 6 所示,旋转速度场为 $u_x=2\pi(y-50)$,速度场 $u_y=-2\pi(x-50)$,从速度场可以看出圆盘将在给定的速度场下以点 $(50,50)$ 为中心进行顺时针旋转。

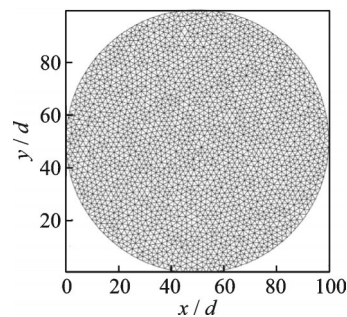


图5 网格单元示意图(6 500)

Fig.5 Grid cell diagram(6 500)

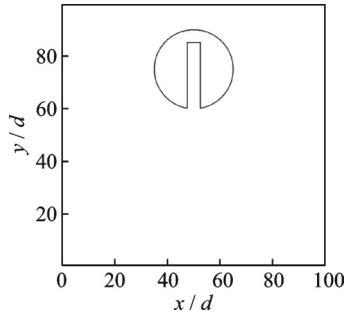


图 6 不同时刻圆盘的位置和形状($t=0$)

Fig.6 Position and shape of disc at different time($t=0$)

图 7 为圆盘在 1/4、1/2、3/4 和 1 圈后的结果,从结果可以看出,其与文献[22]中的结果类似,基本上可以捕捉到与初始值一样的流场界面,可以体现出采用高阶间断有限元方法求解 Level Set 方程在捕捉界面时的优越性。

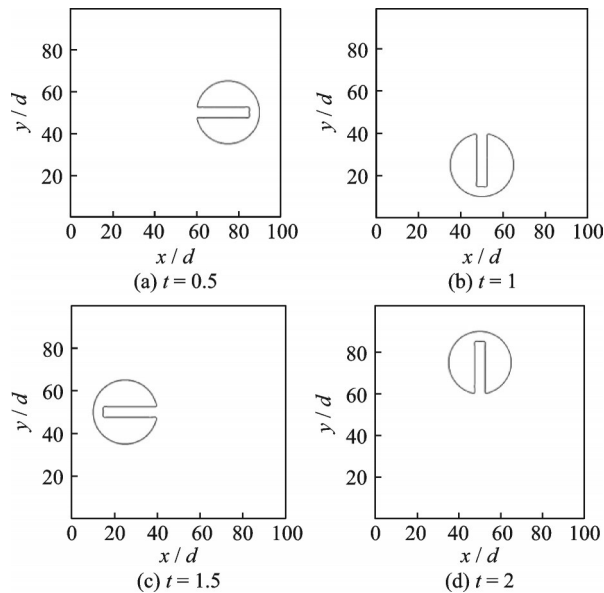


图 7 不同时刻圆盘的位置和形状

Fig.7 Position and shape of disc at different time ($t=0.5, 1, 1.5, 2$)

4.1.3 剪切速度场

模拟二维气泡在剪切流场中的运动过程^[20],气泡将会在速度场的作用下产生变形。计算区域为 $[0, 1] \times [0, 1]$, 初始时刻气泡圆心位于 $(0.5, 0.5)$, 气泡半径为 $r=0.15$, 计算区域的速度场为

$$\begin{cases} u_x = \sin(2\pi y) \sin^2(\pi x) \\ u_y = -\sin(2\pi x) \sin^2(\pi y) \end{cases} \quad (17)$$

计算区域划分 1 700、10 000、30 000 三套不同的非结构网格。首先针对 10 000 网格情形下,在不同时刻,对发生变形的气泡界面进行捕捉,验证本文算法对大变形问题的处理能力,再通过不同网格量对比,探究不同网格量对气泡界面捕捉的准确性,网格图如图 8 所示。

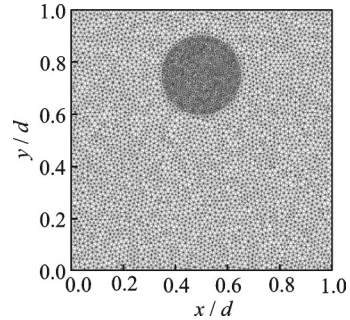


图 8 网格单元示意图(10 000)

Fig.8 Grid cell diagram(10 000)

图 9 为网格量为 10 000、 $p=3$ 时,二维气泡剪切过程在不同时刻下的计算结果。可以看出,在剪切流场的作用下,随着时间的推移,界面逐渐被扭曲旋转,从最初的圆形逐渐被拉伸至一圈圈的细纺丝状,并且随着时间的增加,尾端越来越细,在 $t=4$ 时,界面的拉伸状态最显著。可以看出,在当前网格数为 10 000、 $p=3$ 的情形下,本文算法能够清晰地捕捉到各个时刻的界面。

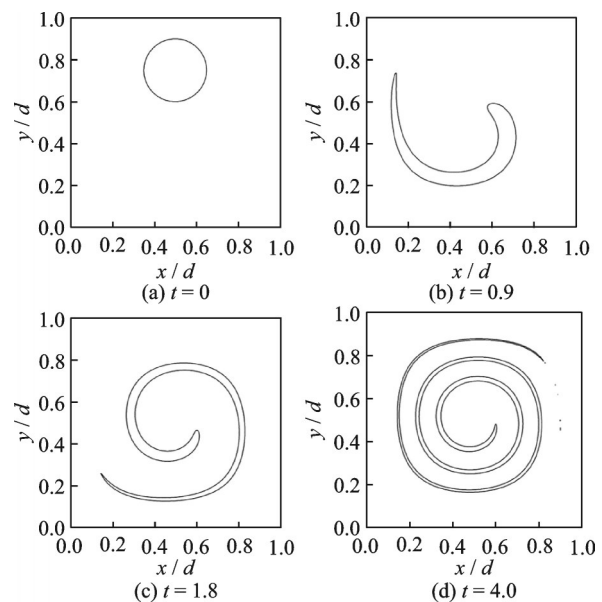


图 9 二维气泡剪切过程(网格单元 10 000, $p=3$)

Fig.9 2-D bubble shear process (Grid cell 10 000, $p=3$)

图 10、11 为 $p=3$ 的情况下,不同网格量在 $t=4$ 时的计算结果。3 套网格都较为清晰地描述出了流场中界面的形状,但是在网格量为 1 700 时,只能捕捉到大致界面形状,界面断裂现象比较严重,对于界面尾部位置,并不能很好地进行捕捉,与 30 000 网格数的流场对比,10 000 网格数的流场下对于界面尾部的尖端已经能很精细地捕捉,再加密网格意义不大。

求解此算例还有一个难点就在于反剪切同样时间后能否恢复成原来的形状,图 12、13 为两套网格算例下反剪切同样时间后的界面位置。

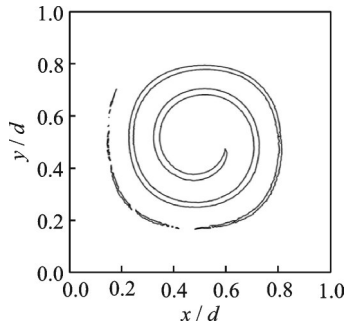


图10 $t=4$ 时的界面形状(网格单元 1 700)
Fig.10 Interface at $t=4$ (Grid cell 1 700)

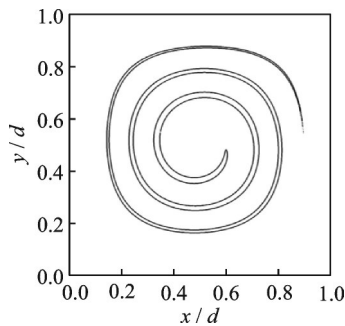


图11 $t=4$ 时的界面形状(网格单元 30 000)
Fig.11 Interface at $t=4$ (Grid cell 30 000)

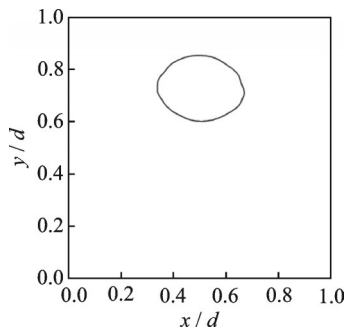


图12 $t=8$ 时的界面形状(网格单元 1 700)
Fig.12 Interface at $t=8$ (Grid cell 1 700)

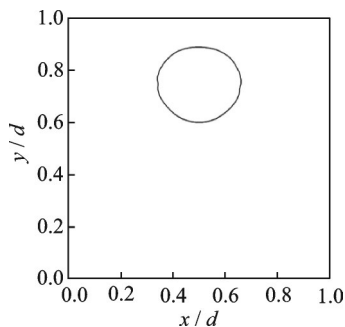


图13 $t=8$ 时的界面形状(网格单元 10 000)
Fig.13 Interface at $t=8$ (Grid cell 10 000)

从图12、13可以看出,在 $p=3$ 情况下,反剪切同样的时间之后,由于数值误差的存在,会导致无法准确恢复到之前的形状。从两套网格的对比上来看,1 700网格单元的结果与初始形状差距较大,而10 000网格单元的结果由数值误差导致的质量损失较小。

4.2 二维可压缩流的数值模拟

对二维激波通过气泡的过程进行数值模拟来验证本文算法的有效性。当马赫数为1.22的激波通过气泡时,气泡将发生复杂的形变,需要高精度的数值格式来精确地模拟捕捉运动界面。

图14给出了初始时刻左行激波与单个气泡进行作用的示意图。求解区域为 $[0, 325] \times [-44.5, 44.5]$,气泡中心位于 $(175, 0)$,半径为 $r=25$,初始激波位于 $x=225$ 处,向左进行传播。

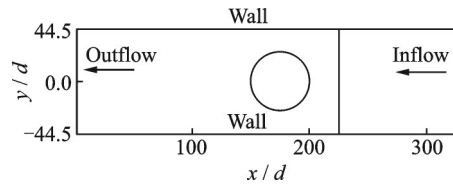


图14 激波通过气泡示意图
Fig.14 Diagram of shock waves passing through bubbles

求解区域使用三角形网格进行划分,求解时,计算域左侧与右侧分别采用出流和入流边界条件,上下边界取固壁边界条件。

计算域中气泡内气体为氦气,外部为理想气体。其中,氦气的比热常数大于气泡外理想气体的比热常数,密度小于理想气体的密度,计算的初始条件如式(18)所示。

$$\begin{cases} x > 225: \rho = 1.3764, u = -0.394, v = 0, \\ \quad \quad \quad p = 1.5698, \gamma_1 = 1.4 \\ x \leq 225: \rho = 1, u = 0, v = 0, p = 1, \gamma_1 = 1.4, \\ (x - 225)^2 + y^2 \leq 625: \rho = 0.138, u = 0, v = 0, \\ \quad \quad \quad p = 1, \gamma_1 = 5/3 \end{cases} \quad (18)$$

计算的网格单元为18 000,如图15所示。

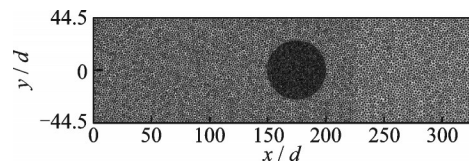


图15 网格单元示意图(18 000)
Fig.15 Grid cell diagram(18 000)

图16为不同时刻捕捉到的不同流体界面的几何形状。 $T=20$ 时,激波对氦气气泡产生的影响比较小,此时界面依然是接近于初始时圆形的形状。 $T=30$ 时,氦气气泡受到影响,迎风面变形比较大,背面受影响较小,此时整体呈现出接近椭圆的形状。随着时间推进,流体界面受到的影响逐渐加深,迎风面开始出现凹陷,如 $T=70、100$ 时所示。最终随着界面的进一步凹陷,呈现出如 $T=180$ 时所示的形状。

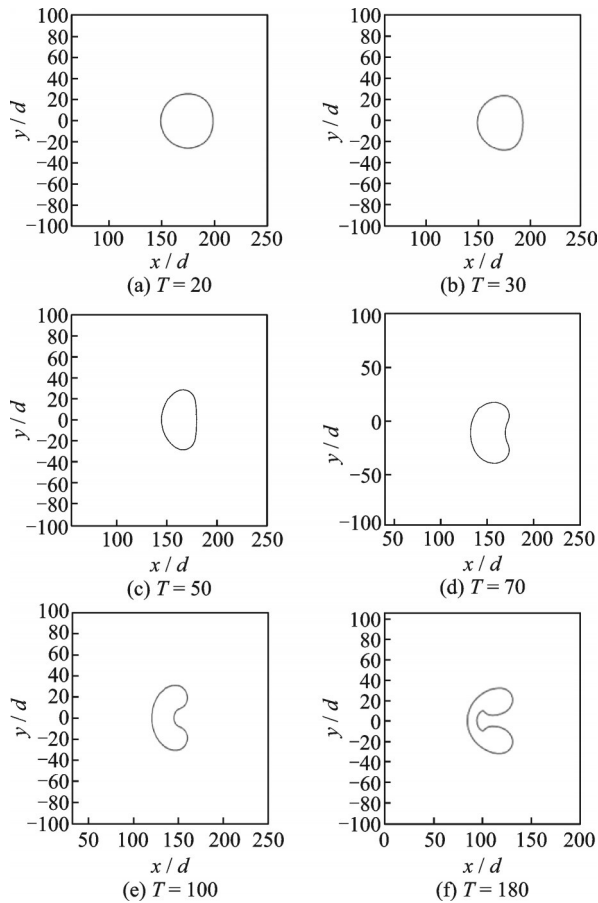


图 16 氦气气泡在不同时刻时界面位置和形状($\rho = 2$)
Fig.16 Position and shape of interface of helium bubble at different time($\rho = 2$)

文献[23]通过实验研究了激波与圆形氦气泡的相互作用,结果如图 17 所示,与实验结果对比可以发现,本文计算结果(图 16)与实验观察到的气泡几何外形和物理位置几乎完全相同。在 $t=20$ 时,此时激波刚刚到达氦气泡,与气泡右边进行接

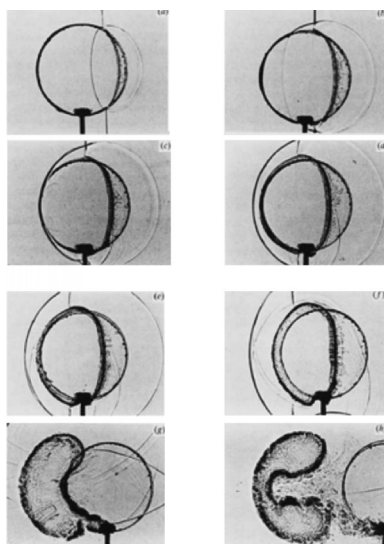


图 17 氦气气泡在不同时刻时界面位置和形状^[23]
Fig.17 Position and shape of interface of helium bubble at different time^[23]

触,界面受到轻微变形。当 $t=50$,向左运动的激波进入氦气气泡后,由于氦气气泡内的密度比较低,声速大,因此,激波进入气泡所在位置后,激波马赫数降低,但是运动速度加快,与气泡邻近的平面激波产生分叉,同时,气泡右侧产生了一簇稀疏波。在 $t=100$ 时,从图中可以看出分叉激波在上下壁面产生反射,气泡发生畸变,并且气泡右边的畸变更加明显。到达 $t=180$ 时刻,气泡界面此时的变形已经相当的明显。

总的来说,激波从右往左通过氦气泡,氦气泡会在激波的作用下从右往左进行运动,并且气泡的界面会发生畸变,气泡界面从右边开始逐渐向内凹陷,从一开始的圆形逐渐发展成半圆形,随着时间的推移,影响进一步的加深,凹陷也变得愈加明显,这与文献结果相同。

5 结 论

两相流运动界面追踪的数值模拟有着深刻的现实意义和重要的应用价值。本文采用数值模拟的手段对两相流运动界面的处理进行了详细的分析和探讨,得出以下结论:

(1)采用多个数值算例对 Level Set 方程的求解进行验证,平移流场说明本文算法针对界面尺寸小于网格尺寸的情况下,仍然能很好地捕捉到运动界面;Zaleask 圆盘算例说明本文算法能很好地解决不规则区域上不规则界面运动问题;剪切速度场算例说明在求解大变形运动界面上具有优势。在给定流场的情况下,用高阶间断伽辽金求解的 Level Set 方程可以准确地捕捉到介质的运动界面。验证了采用间断伽辽金方法求解 Level Set 方程在捕捉运动相界面的优越性。

(2)将 Level Set 方程和欧拉方程耦合求解二维多介质可压缩流问题,即左行激波与气泡相互作用问题。在激波通过氦气气泡时,在激波的作用下在气泡右边出现凹陷,随即产生一系列复杂的变形,与实验结果吻合。

参考文献:

[1] OSHER S, SETHIAN J A. Fronts propagating with curvature-dependent speed algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations[J]. Journal of Computational Physics, 1988, 79: 12-49.
[2] SETHIAN J A. A fast marching level set method for monotonically advancing fronts[J]. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 1996, 93(4): 1591-1595.
[3] SETHIAN J A. Level Set methods and fast marching

- methods: Evolving interfaces in computational geometry, fluid mechanics, computer vision, and materials science[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1999.
- [4] SETHIAN J A. Evolution, implementation, and application of Level Set and fast marching methods for advancing fronts[J]. *Journal of Computational Physics*, 2001, 169(2): 503-555.
- [5] SETHIAN J A. Fast marching methods[J]. *SIAM Review*, 1999(41): 199-235.
- [6] SERBIAN J A. A fast Level Set method for propagating interfaces[J]. *Journal of Computational Physics*, 1995(118): 269-277.
- [7] SUSSMAN M, SMEREKA P, OSHER S. A Level Set approach for computing solutions to incompressible two phase flow[J]. *Journal of Computational Physics*, 2002(175): 200-224.
- [8] 吕宏强, 张涛, 孙强, 等. 间断伽辽金方法在可压缩流数值模拟中的应用研究综述[J]. *空气动力学学报*, 2017, 35(4): 455-471.
LYU Hongqiang, ZHANG Tao, SUN Qiang, et al. Applications of discontinuous Galerkin method in numerical simulations of compressible flows: A review [J]. *Acta Aerodynamica Sinica*, 2017, 35(4): 455-471.
- [9] 吕宏强, 伍贻兆, 周春华, 等. 稀疏非结构网格上的亚声速流高精度数值模拟[J]. *航空学报*, 2009, 30(2): 200-204.
LYU Hongqiang, WU Yizhao, ZHOU Chunhua, et al. High resolution of subsonic flows on coarse grids [J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2009, 30(2): 200-204.
- [10] REED W H, HILL T R. Triangular mesh methods for the neutron transport equation: No.LA-UR-73-479 [R]. [S.l.]: Los Alamos Scientific Laboratory, 1973.
- [11] CHAVENT G, SALZANO G. A finite element method for the 1D water flooding problem with gravity [J]. *Journal of Computational Physics*, 1982, 42: 307-344.
- [12] COCKBURN B, SHU C W. The Runge-Kutta local projection p1-discontinuous Galerkin method for scalar conservation laws[J]. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 1991, 25(3): 337-361.
- [13] COCKBURN B, SHU C W. TVB Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for scalar conservation laws II : General framework [J]. *Mathematics of Computation*, 1989, 52 (186): 411-435.
- [14] COCKBURN B, LIN S. Y, SHU C W. TVB Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws III : One dimensional systems[J]. *Journal of Computational Physics*, 1989, 84: 90-113.
- [15] COCKBURN B, HOU S, SHU C W. Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws IV : The multidimensional case[J]. *Mathematics of Computation*, 1990, 54: 545-581.
- [16] COCKBURN B, SHU C W. The Runge-Kutta discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws V: Multidimensional systems[J]. *Journal of Computational Physics*, 1998, 141: 199-224.
- [17] COCKBURN B, KARNIADAKIS G E, SHU C W. The development of discontinuous Galerkin methods [M]. New York: Springer, 2000.
- [18] SHU C W, OSHER S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock capturing schemes [J]. *Journal of Computational Physics*, 1988, 77: 439-471.
- [19] 蔚喜军, 周铁. 流体力学方程的间断有限元法[J]. *计算物理*, 2005, 22(2): 108-116.
WEI Xijun, ZHOU Tie. Discontinuous finite element methods for solving hydrodynamic equations[J]. *Journal of Computational Physics*, 2005, 22(2): 108-116.
- [20] MARCHANDISE E, REMACLE J F, CHEVAUGEON N. A quadrature free discontinuous Galerkin method for the Level Set equation[J]. *Journal of Computational Physics*, 2006, 212(1): 338-357.
- [21] BUTCHER J C. Numerical methods for ordinary differential equations[M]. New York: John Wiley & Sons, 2016.
- [22] NABER J, KOREN B, WESSELING P. A Runge-Kutta discontinuous-Galerkin Level-Set method for unsteady compressible two-fluid flow[C]//Proceedings of the European Conference on Computational Fluid Dynamics. The Netherlands: Delft University of Technology, 2006.
- [23] FEDKIW R P, ASLAM T. A non-oscillatory Eulerian approach to interfaces in multimaterial flows the ghost fluid method[J]. *Journal of Computational Physics*, 1999, 152(2): 457-492.

(编辑:孙静)