

DOI:10.16356/j.1005-2615.2024.01.016

基于渐近均匀化的梯度加筋板结构优化设计

向天宇¹, 顾铖璋², 张东斌², 徐亮¹

(1. 南京航空航天大学航空学院, 南京 211106; 2. 上海宇航系统工程研究所结构系统研究室, 上海 201109)

摘要: 梯度加筋板结构以其优异性能广泛应用于航空航天、汽车和交通等领域。针对梯度板的渐变结构导致均匀化及两尺度优化设计计算量过大及效率过低的问题, 本文采用机器学习方法搭建以微结构变形参数为输入、等效刚度系数为输出的人工神经网络, 实现等效刚度的高效预测。在优化过程中, 本文引入表征单胞变形的单元设计变量, 实现梯度板局部变形的显式控制, 并引入映射函数节点设计变量, 保证优化过程中单胞的局部变形与映射函数一致, 方便两尺度优化结果解耦。数值算例验证了本文方法的有效性和正确性。

关键词: 渐近均匀化; 梯度加筋板; 等效刚度; 神经网络; 结构优化

中图分类号: O34 文献标志码: A 文章编号: 1005-2615(2024)01-0154-09

Optimum Design of Gradient Gird Stiffened Plates Based on Asymptotic Homogenization

XIANG Tianyu¹, GU Chengzhang², ZHANG Dongbin², XU Liang¹

(1. College of Aerospace Engineering, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing 210016, China;
2. Structural System Research Laboratory, Aerospace System Engineering Shanghai, Shanghai 201109, China)

Abstract: Gradient stiffened plates are widely used in aerospace, automotive, transportation and other fields for their excellent performance. Aiming at the gradient structure of gradient plate which leads to the problem of excessive computation and low efficiency of homogenization and two-scale optimization design, this paper adopts a machine learning method to build an artificial neural network with microstructure deformation parameters as input and equivalent stiffness coefficients as output, to realize the efficient prediction of equivalent stiffness. In the optimization process, this paper introduces unit design variables characterizing the deformation of the single cell to achieve explicit control of the local deformation of the gradient plate, and introduces mapping function node design variables to ensure that the local deformation of the single cell during the optimization process is consistent with the mapping function, which facilitates the decoupling of the two-scale optimization results. Numerical examples verify the effectiveness and correctness of the proposed method.

Key words: asymptotic homogenization; gradient stiffened plate; effective stiffness; neural network; structure optimization

加筋板结构具有轻量化、良好的比刚度和比强度的性能特点, 被广泛运用于机械、航空航天、海洋船舶和汽车制造等领域^[1]。随着制造技术的快速发展, 对板结构的性能要求不断提高, 通过对加筋

板的优化设计, 可以大大改善其结构性能, 满足更高要求。渐近均匀化方法 (Asymptotic homogenization, AH)^[2-3] 因其具有严格的数学基础, 广泛应用于分析周期结构。Iltchev 等^[4] 研究了周期多孔

基金项目: 国家自然科学基金青年项目 (12002159); 江苏省自然科学基金青年项目 (BK20200411); 大连理工大学工业装备结构分析国家重点实验室开放基金 (GZ20101)。

收稿日期: 2023-11-07; **修订日期:** 2024-01-11

通信作者: 徐亮, 男, 博士, 讲师, 硕士生导师, E-mail: xuliang2018@nuaa.edu.cn。

引用格式: 向天宇, 顾铖璋, 张东斌, 等. 基于渐近均匀化的梯度加筋板结构优化设计 [J]. 南京航空航天大学学报, 2024, 56(1): 154-162. XIANG Tianyu, GU Chengzhang, ZHANG Dongbin, et al. Optimum design of gradient gird stiffened plates based on asymptotic homogenization [J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2024, 56(1): 154-162.

材料的计算均匀化方法。Artioli^[5]开发了一种用于纤维增强复合材料 AH 方法的虚拟元方法。Cheng 等^[6-7]提出了 NIAH (Novel implementation of asymptotic homogenization) 方法,旨在利用有限元软件建立易于 AH 方法有限元实现的求解框架,并将其应用于周期网格加筋板的分析和优化^[8-9]。Nishi 等^[10]基于均匀化方法,针对平面内周期性复合材料板进行两尺度结构优化,旨在确定最优的平面内单胞,使其宏观力学性能最优。Cheng 等^[11]通过优化宏观结构和微观结构,提出了一种两尺度并行优化周期性加筋板的方法,以获得最大平面外屈曲载荷。Zhang 等^[12]提出了一种基于密度的两尺度优化方法,以对复合材料板进行优化设计。

相比周期点阵结构,具有空间渐变微结构的梯度结构具有更高的设计自由度及性能提升潜力。然而,AH 方法由于周期性假设不能直接应用于这些梯度结构的分析。为了将 AH 方法应用到此类结构,Zhu 等^[13]提出了 AABH (Asymptotic-analysis-based homogenization) 方法,将映射函数引入控制方程,并通过摄动方法导出相应的单胞问题和等效性质公式。需要指出的是,空间梯度结构与周期性结构主要有两点不同:(1) 梯度结构微单胞不再局限于矩形,而是扩展到一般的平行四边形结构;(2) 梯度结构单胞通常不再是均匀分布的,而是在整个结构域中空间变化。因此,在每个单胞上定义的单胞方程也在空间渐变的,应该逐点求解以实现梯度结构的均匀化。随后 AABH 方法被应用于二维点阵结构的优化设计,Xue 等^[14]基于 AABH 方法对梯度多孔结构进行优化设计,引入了一种基于计算并行性的分区方案,并进行了灵敏度分析。与梯度点阵类似,梯度板结构比周期板具有更大的设计自由度和更卓越的结构性能被用于改善航空发动机的性能和效率。例如,通过在涡轮叶片表面上使用梯度结构,可以改善气动性能并减少能源损失。梯

度结构还可以提高材料的强度和耐热性能,同时减轻叶片的重量。用梯度结构的材料可以在航天器结构中提供更好的强度和刚度分布。这对于减轻重量、提高结构的安全性和耐久性至关重要。梯度结构由于具有更高的设计自由度及性能提升空间,针对其两尺度结构优化设计有着大量研究。此类研究通常以某个给定的矩形微结构为原型,使该原型在整个设计域内进行渐变变化,对其在设计域内进行布局优化。优化过程中仅需对该原型进行均匀化分析,计算其等效性质即可,其余微结构等效性质可通过该原型等效性质获得,因此,其均匀化分析计算量较低,可实现高效优化设计。Ma 等^[15]采用矩形和方形加筋微结构作为原型,对梯度板结构进行优化设计以获得最大的屈曲性能。

综上,现有的两尺度优化工作中,均匀化分析的计算量一般保持在单个微结构分析相当的计算量,但对于本文中梯度板结构的优化设计,逐点微结构分析计算量巨大,本文将采用机器学习方法搭建以微结构变形参数为输入、等效刚度系数为输出的人工神经网络,实现等效刚度的高效预测。另一方面,现有两尺度优化中大都采用矩形微结构^[16],这限制了设计空间,本文将通过映射函数,将平行四边形微结构引入两尺度优化中,增大梯度板的设计空间。

1 梯度加筋板结构刚度计算及灵敏度分析

1.1 梯度板结构的均匀化方法

考虑如图 1(a)所示的在 $O\xi_1\xi_2\xi_3$ 坐标系下的梯度变化的加筋板结构,该梯度板结构由如图 1(b)所示的周期板结构经映射函数 $x_1(\xi_1, \xi_2)$ 、 $x_2 = x_2(\xi_1, \xi_2)$ 、 $x_3 = \xi_3$ 变换而成。周期加筋板由 $Oy_1y_2y_3$ 坐标系中矩形单胞周期延拓而成,如图 1(d)所示;梯度加筋板单胞在面内逐点变化,表现为一般平行四边形形式,如图 1(c)所示,两个微单胞

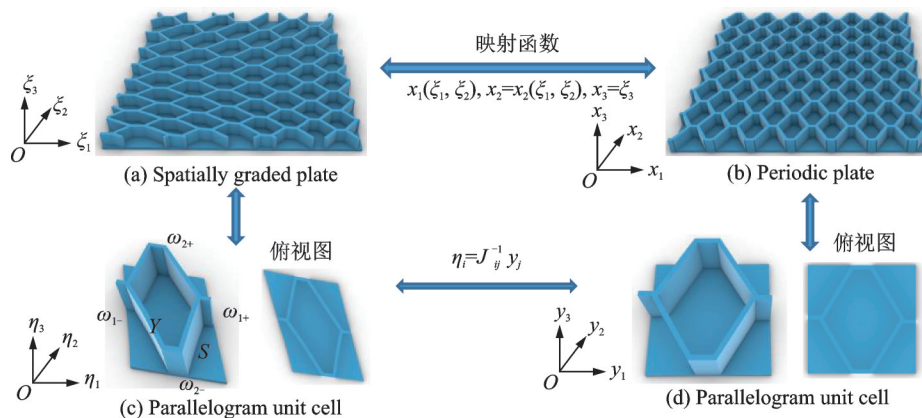


图 1 梯度板及周期板结构示意图

Fig.1 Schematic illustration of gradient plate and period plate

坐标之间可以通过雅可比矩阵 J 相互转换。

根据文献[17], 梯度板等效性质通过求解定义

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \eta_j} \left(c_{ijkl} \frac{\partial W_k^{\alpha\beta}}{\partial \eta_l} \right) = 0 & \text{in } Y \\ c_{ijkl} \frac{\partial W_k^{\alpha\beta}}{\partial \eta_l} n_j = 0 & \text{on } S \\ W_k^{\alpha\beta} \Big|_{\omega_{\gamma+}} - W_k^{\alpha\beta} \Big|_{\omega_{\gamma-}} = \Delta W_k^{\alpha\beta} \Big|_{\omega_{\gamma}} & \text{on } \omega_{\gamma\pm} \\ c_{ijkl} \frac{\partial W_k^{\alpha\beta}}{\partial \eta_l} n_j \Big|_{\omega_{\gamma+}} = -c_{ijkl} \frac{\partial W_k^{\alpha\beta}}{\partial \eta_l} n_j \Big|_{\omega_{\gamma-}} & \text{on } \omega_{\gamma\pm} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial \eta_j} \left(c_{ijkl} \frac{\partial W_k^{*\alpha\beta}}{\partial \eta_l} \right) = 0 & \text{in } Y \\ c_{ijkl} \frac{\partial W_k^{*\alpha\beta}}{\partial \eta_l} n_j = 0 & \text{on } S \\ W_k^{*\alpha\beta} \Big|_{\omega_{\gamma+}} - W_k^{*\alpha\beta} \Big|_{\omega_{\gamma-}} = \Delta W_k^{*\alpha\beta} \Big|_{\omega_{\gamma}} & \text{on } \omega_{\gamma\pm} \\ c_{ijkl} \frac{\partial W_k^{*\alpha\beta}}{\partial \eta_l} n_j \Big|_{\omega_{\gamma+}} = -c_{ijkl} \frac{\partial W_k^{*\alpha\beta}}{\partial \eta_l} n_j \Big|_{\omega_{\gamma-}} & \text{on } \omega_{\gamma\pm} \end{cases} \quad (1)$$

式中: Y 表示平行四边形单胞的体域; S 表示平行四边形单胞的非周期边界; $\omega_{\gamma\pm}$ ($\alpha=1, 2$) 表示平行四边形单胞的周期边界; 位移周期边界条件中 $\Delta W^{\alpha\beta} \Big|_{\omega_{\gamma}} = V^{\alpha\beta} \Big|_{\omega_{\gamma+}} - V^{\alpha\beta} \Big|_{\omega_{\gamma-}}$; $\Delta W^{*\alpha\beta} \Big|_{\omega_{\gamma}} = V^{*\alpha\beta} \Big|_{\omega_{\gamma+}} - V^{*\alpha\beta} \Big|_{\omega_{\gamma-}}$; $V^{\alpha\beta}$ 、 $V^{*\alpha\beta}$ 为与应变 $\epsilon^{\alpha\beta}$ 、 $\epsilon^{*\alpha\beta}$ 等价的位移场, 有

$$\begin{aligned} V^{11} &= \begin{Bmatrix} \eta_1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, V^{22} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \eta_2 \\ 0 \end{Bmatrix}, V^{12} = \begin{Bmatrix} \eta_2/2 \\ \eta_1/2 \\ 0 \end{Bmatrix}, \\ V^{*11} &= \begin{Bmatrix} \eta_3 \eta_1 \\ 0 \\ -\eta_1^2/2 \end{Bmatrix}, V^{*22} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \eta_3 \eta_2 \\ -\eta_2^2/2 \end{Bmatrix}, \\ V^{*12} &= \begin{Bmatrix} \eta_3 \eta_2/2 \\ \eta_3 \eta_1/2 \\ -\eta_1 \eta_2/2 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2)$$

求解单胞方程后, 等效刚度通过下式计算

$$A_{\alpha\beta\mu\nu} = \left\langle c_{ijkl} \frac{\partial W_i^{\alpha\beta}}{\partial \eta_j} \frac{\partial W_k^{\mu\nu}}{\partial \eta_l} \right\rangle_Y,$$

$$\begin{Bmatrix} N_{11}^{(1)} \\ N_{22}^{(1)} \\ N_{12}^{(1)} \\ M_{11}^{(1)} \\ M_{22}^{(1)} \\ M_{12}^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1111} & A_{1122} & A_{1112} & B_{1111} \\ A_{2211} & A_{2222} & A_{2212} & B_{2211} \\ A_{1211} & A_{1222} & A_{1212} & B_{1111} \\ A_{1111} & B_{1122} & B_{1112} & D_{11122} \\ B_{2211} & B_{2222} & B_{2212} & D_{2211} \\ B_{1211} & B_{1222} & B_{1212} & D_{12122} \end{bmatrix}$$

式中: $N_{\alpha\beta}^{(1)}$ 为面内合力; $M_{\alpha\beta}^{(1)}$ 为弯矩和扭矩; $\epsilon_{\mu\nu}$ 为面内应变; $\kappa_{\mu\nu}$ 为均匀板的曲率和扭率。

1.2 基于 ANN 神经网络等效刚度及灵敏度计算

由于梯度加筋板每个单胞在面内是渐变的, 因此对梯度加筋板均匀化时需要逐点求解单胞方程并计算等效性质, 这导致基于 AH 方法的梯度板结构的两尺度结构分析及优化设计往往计算量巨大。为提高加筋板结构的分析及优化效率, 本文采用 ANN 神经网络建立等效刚度与表征单胞平行四边形参数的关系。

对于任意一平行四边形板单胞, 其可以看作

在图 1(c) 单胞上的单胞方程得到, 单胞方程表达式为

$$\begin{aligned} B_{\alpha\beta\mu\nu} &= \left\langle c_{ijkl} \frac{\partial W_i^{\alpha\beta}}{\partial \eta_j} \frac{\partial W_k^{*\mu\nu}}{\partial \eta_l} \right\rangle_Y, \\ D_{\alpha\beta\mu\nu} &= \left\langle c_{ijkl} \frac{\partial W_i^{*\alpha\beta}}{\partial \eta_j} \frac{\partial W_k^{\mu\nu}}{\partial \eta_l} \right\rangle_Y \end{aligned} \quad (3)$$

式中: $A_{\alpha\beta\mu\nu}$ 、 $D_{\alpha\beta\mu\nu}$ 和 $B_{\alpha\beta\mu\nu}$ 分别表示面内、出平面和耦合

刚度系数 $\langle \cdot \rangle_Y = \frac{1}{|Y|} \int_Y \cdot d\Omega$, $|Y| = \frac{l_1 l_2}{|J|}$, 矩阵形式为

$$\begin{aligned} D^H &= \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} A_{1111} & A_{1122} & A_{1112} \\ A_{1122} & A_{2222} & A_{2212} \\ A_{1112} & A_{2212} & A_{1212} \end{bmatrix}, \\ B &= \begin{bmatrix} B_{1111} & B_{1122} & B_{1112} \\ B_{1122} & B_{2222} & B_{2212} \\ B_{1112} & B_{2212} & B_{1212} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} D_{1111} & D_{1122} & D_{1112} \\ D_{1122} & D_{2222} & D_{2212} \\ D_{1112} & D_{2212} & D_{1212} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4)$$

得到等效刚度后, 对应的宏观均匀化 Kirchhoff 板的本构方程可以写为

$$\begin{cases} N_{\alpha\beta}^{(1)} = A_{\alpha\beta\mu\nu} \epsilon_{\mu\nu} + B_{\alpha\beta\mu\nu} \kappa_{\mu\nu} \\ M_{\alpha\beta}^{(1)} = B_{\alpha\beta\mu\nu} \epsilon_{\mu\nu} + D_{\alpha\beta\mu\nu} \kappa_{\mu\nu} \end{cases} \quad (5)$$

对应的矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} B_{1122} & B_{1112} \\ B_{2222} & B_{2212} \\ B_{1222} & B_{11122} \\ D_{11122} & D_{1112} \\ D_{2222} & D_{2212} \\ D_{1222} & D_{1212} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ 2\epsilon_{12} \\ \kappa_{11} \\ \kappa_{22} \\ 2\kappa_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ 2\epsilon_{12} \\ \kappa_{11} \\ \kappa_{22} \\ 2\kappa_{12} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

由矩形单胞通过四种几何变换得到, 如图 2 所示^[14]。图中, α_1 表征水平方向拉伸; α_2 表征竖直方向拉伸; θ 表征剪切变形; φ 表征刚性转动; dx_1 、 dx_2 表示微结构的尺寸。根据文献[17], 雅可比矩阵系数与 α_1 、 α_2 、 θ 、 φ 的关系为

$$\begin{aligned} J_{11} &= \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} = \frac{\cos\left(\varphi - \frac{\theta}{2}\right)}{\alpha_1 \cos \theta}, J_{12} = \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} = \frac{\sin\left(\varphi - \frac{\theta}{2}\right)}{\alpha_1 \cos \theta}, \\ J_{21} &= \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} = -\frac{\sin\left(\varphi + \frac{\theta}{2}\right)}{\alpha_2 \cos \theta}, J_{22} = \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} = \frac{\cos\left(\varphi + \frac{\theta}{2}\right)}{\alpha_2 \cos \theta} \end{aligned} \quad (7)$$

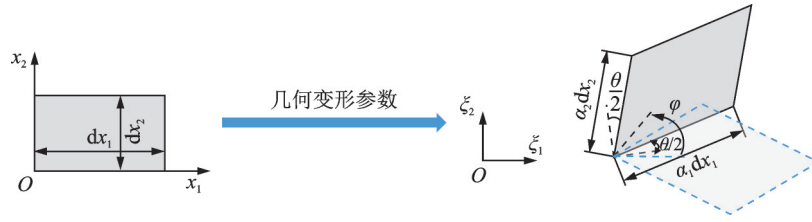


图2 微结构变形示意图

Fig.2 Schematic illustration of unit cell deformation patterns

因此,等效性质可表示为 $D^H = D^H(\alpha_1, \alpha_2, \theta, \varphi)$ 的参数。关于神经网络的搭建方案如下。首先通过渐近均匀化方法获得足够多的数据作为搭建神经网络的样本,再将单元的等效刚度表示为 $D^H = S^T S, S_{ij} = 0, i > j (i, j = 0, 1, \dots, 6)$, 然后以 $\alpha_1, \alpha_2, \theta$ 为输入, S 矩阵中每一个不为 0 的单元作为输出, 搭建 21 个 ANN 神经网络, 神经网络训练的参数设置如表 1 所示。

在完成神经网络的搭建后,随机生成 100 组样本单元,分别使用渐近均匀化方法和 ANN 神经网络计算样本单元的等效刚度,如图 3 所示。可以看出,利用搭建好的神经网络求解单元等效刚度的结果与渐近均匀化方法求解结果基本一致,相对误差

表 1 神经网络训练的参数设置

Table 1 Parameter settings for neural network training

参数	参数设置
隐藏层数及每层神经元数	[64, 32, 16]
训练算法	Levenberg-Marquardt
误差函数	MSE
激活函数	Sigmoid
最大训练次数	1 000
学习率	0.01
最小性能梯度	1e-9

小于 0.2%, 所以在优化过程中使用 ANN 神经网络求解单元等效刚度,既满足精度要求又大大减少计算时间。

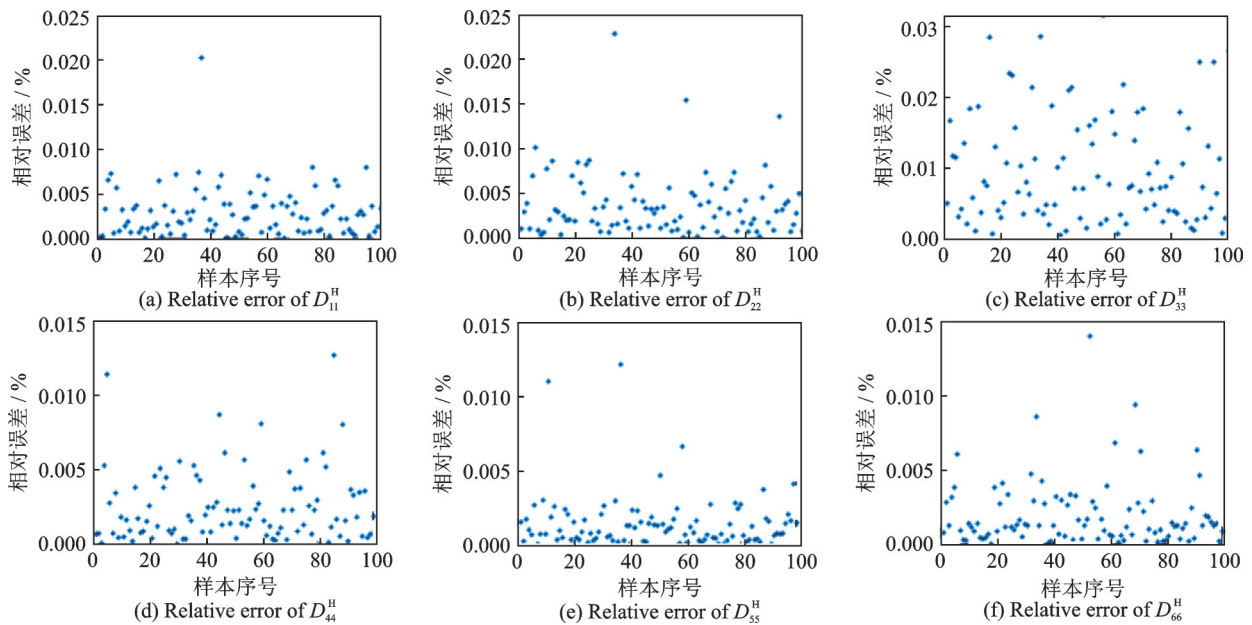


图3 渐近均匀化方法和神经网络计算结果相对误差图

Fig.3 Relative error diagrams of calculation results of AH method and neural network

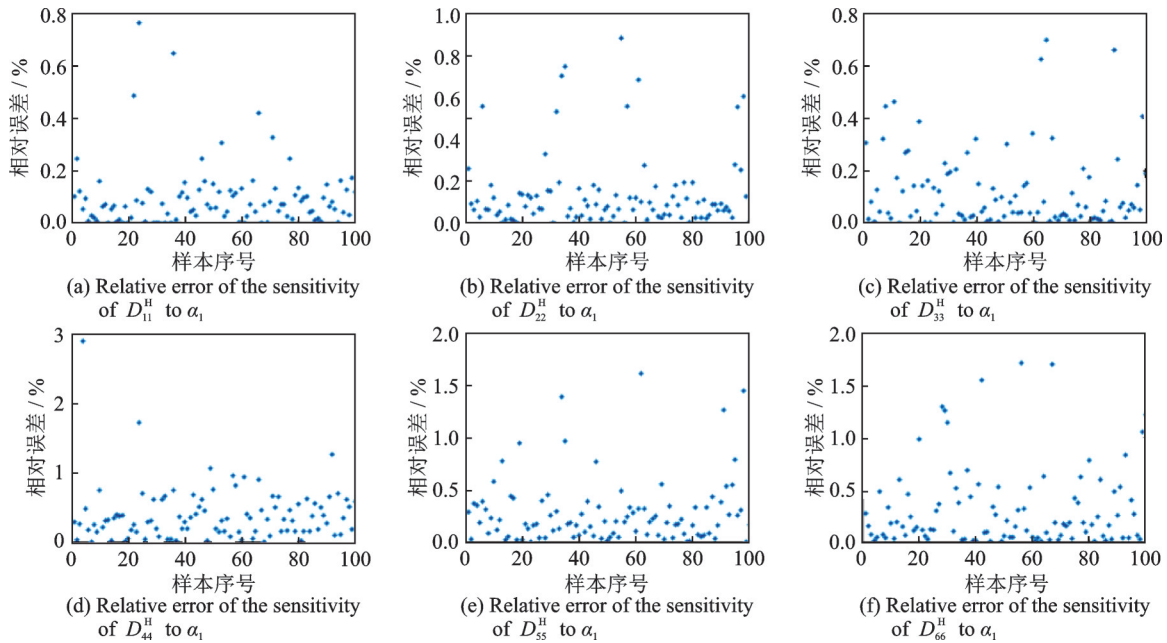
在使用神经网络获得等效刚度后, D^H 对 $\alpha_1, \alpha_2, \theta$ 的灵敏度可以运用差分法求解, 计算公式为

$$\frac{dD^H}{d(\cdot)} = \frac{\Delta S^T}{\Delta(\cdot)} S + S^T \frac{\Delta S}{\Delta(\cdot)} \quad (8)$$

式中 (\cdot) 可以是 $\alpha_1, \alpha_2, \theta$ 。

运用差分法计算 D^H 对 $\alpha_1, \alpha_2, \theta$ 的灵敏度与渐

近均匀化方法求解相对比, 以对角线刚度系数对 α_1 灵敏度分析为例, 灵敏度计算误差分析图如图 4 所示, 可以发现两者计算结果相差不大, 相对误差绝大多数均在 2% 以内, 极少数计算结果误差大于 2% 是因为实际灵敏度数值很小, 对优化结果影响不大, 故采用此方法进行灵敏度分析满足精度要求。

图4 对角线刚度系数对 α_1 的灵敏度分析相对误差图Fig.4 Relative error diagram of the sensitivity analysis of diagonal stiffness coefficient to α_1

2 梯度加筋板优化设计

2.1 板刚度和等效厚度计算及灵敏度分析

图5所示为梯度加筋板的均匀化后矩形板有限元模型示意图。 $O\xi_1\xi_2$ 坐标原点位于板中心,沿 ξ_1 和 ξ_2 方向的尺寸参数分别为 L_1 和 L_2 。相应的有限元模型被离散化为具有 N_n 个有限元节点的 N_e 个四节点矩形Kirchhoff单元,每个单元对应于一个微结构形式,因此对第 e 个单元引入单元设计变量 α_{1e} 、 α_{2e} 、 θ_e 、 φ_e 。

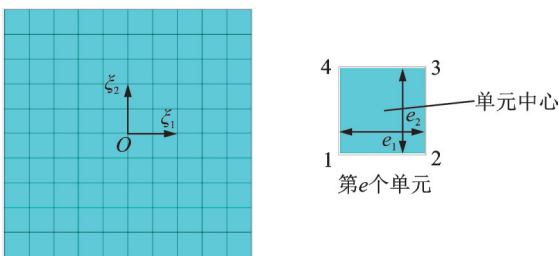


图5 均匀化后矩形板有限元模型示意图

Fig.5 Schematic illustration of finite element model of rectangular homogenized plate

第 e 个单元的等效刚度 $D_e^H(\alpha_{1e}, \alpha_{2e}, \theta_e, \varphi_e)$ 可以通过神经网络求解获得,用 K_e 表示第 e 个单元的单元刚度矩阵,结构分析公式可以表示为

$$KU = F, K = \sum_{e=1}^{N_e} K_e, K_e = \int_{\Omega_e} B^T D_e^H B d\Omega \quad (9)$$

式中: U 为位移矢量; F 为外力矢量; B 为应变-位移矩阵; Ω_e 为第 e 个单元的域。板的结构柔顺性 C 及其灵敏度为

$$C = U^T K U,$$

$$\frac{\partial C}{\partial \alpha_1} = \sum_{e=1}^{N_e} \frac{\partial C}{\partial \alpha_{1e}}, \quad \frac{\partial C}{\partial \alpha_2} = \sum_{e=1}^{N_e} \frac{\partial C}{\partial \alpha_{2e}},$$

$$\frac{\partial C}{\partial \theta} = \sum_{e=1}^{N_e} \frac{\partial C}{\partial \theta_e}, \quad \frac{\partial C}{\partial \varphi} = \sum_{e=1}^{N_e} \frac{\partial C}{\partial \varphi_e},$$

$$\frac{\partial C}{\partial \alpha_h} = \sum_{e=1}^{N_e} \frac{\partial C}{\partial \alpha'_{he}} \quad (10)$$

式中 $\frac{\partial C}{\partial(\cdot)} = -U_e^T \int_{\Omega_e} B^T \frac{\partial D_e^H}{\partial(\cdot)} B d\Omega U_e$, (\cdot) 可以是

α_{1e} 、 α_{2e} 、 θ_e 、 φ_e 、 $\frac{\partial D_e^H}{\partial(\cdot)}$ 的计算公式见式(8)。

等效厚度是指将原来的加筋板等效成实心板后的厚度,记作 t^{eff} ,其计算公式及其灵敏度计算公式为

$$t^{eff} = \sum_{e=1}^{N_e} t_e^{eff} |\Omega_e| / \sum_{e=1}^{N_e} |\Omega_e| = \frac{1}{N_e} \sum_{e=1}^{N_e} t_e^{eff},$$

$$\frac{\partial t^{eff}}{\partial \alpha_1} = \frac{1}{N_e} \sum_{e=1}^{N_e} \frac{\partial t_e^{eff}}{\partial \alpha_{1e}}, \quad \frac{\partial t^{eff}}{\partial \alpha_2} = \frac{1}{N_e} \sum_{e=1}^{N_e} \frac{\partial t_e^{eff}}{\partial \alpha_{2e}},$$

$$\frac{\partial t^{eff}}{\partial \theta} = \frac{1}{N_e} \sum_{e=1}^{N_e} \frac{\partial t_e^{eff}}{\partial \theta_e}, \quad \frac{\partial t^{eff}}{\partial \varphi} = \frac{1}{N_e} \sum_{e=1}^{N_e} \frac{\partial t_e^{eff}}{\partial \varphi_e},$$

$$\frac{\partial t^{eff}}{\partial \alpha_h} = \frac{1}{N_e} \sum_{e=1}^{N_e} \frac{\partial t_e^{eff}}{\partial \alpha'_{he}}, \quad \frac{\partial t^{eff}}{\partial x_1} = \frac{\partial t^{eff}}{\partial x_2} = 0 \quad (11)$$

2.2 单元设计变量与节点设计变量的兼容关系

由于均匀化后板与单一尺度梯度板应保持一一对应关系,为保证在优化过程中均匀化板始终与某一梯度板相对应,本文引入映射函数节点设计变量 x_1 和 x_2 ,并在每个单元内节点设计变量插值函数与有限元插值函数一致。另一方面为了使均匀化后的结构能够去均匀化为单尺度的空间梯度板,局部单元变形必须与映射函数的雅可比矩阵兼容。

因此,节点设计变量和单元设计变量之间必须满足式(7)中的关系。

在离散有限元模型中,式(7)逐点成立很难实现,因此这里放松为不等式约束。放松过程包括两个步骤。首先,将上式在各单元中心处放松,则下列等式应成立,即上式在单元中心满足

$$\begin{cases} p_{11e} = B_{10}x_{1e}\alpha_{1e}\cos\theta_e - \cos\left(\varphi_e - \frac{\theta_e}{2}\right) = 0 \\ p_{12e} = B_{20}x_{1e}\alpha_{1e}\cos\theta_e - \sin\left(\varphi_e - \frac{\theta_e}{2}\right) = 0 \\ p_{21e} = B_{10}x_{2e}\alpha_{2e}\cos\theta_e + \sin\left(\varphi_e + \frac{\theta_e}{2}\right) = 0 \\ p_{22e} = B_{20}x_{2e}\alpha_{2e}\cos\theta_e - \cos\left(\varphi_e + \frac{\theta_e}{2}\right) = 0 \end{cases} \quad (12)$$

其次,在实际应用中,上式中设计变量的非线性关系进一步放宽为以下相容性指数 C_p 的最小值,其定义为

$$C_p = \sum_{e=1}^{N_e} (p_{11e}^2 + p_{12e}^2 + p_{21e}^2 + p_{22e}^2) \quad (13)$$

C_p 的灵敏度计算公式为

$$\begin{cases} \frac{\partial C_p}{\partial \alpha_{1e}} = 2 \left(p_{11e} \frac{\partial p_{11e}}{\partial \alpha_{1e}} + p_{12e} \frac{\partial p_{12e}}{\partial \alpha_{1e}} \right) \\ \frac{\partial C_p}{\partial \alpha_{2e}} = 2 \left(p_{21e} \frac{\partial p_{21e}}{\partial \alpha_{2e}} + p_{22e} \frac{\partial p_{22e}}{\partial \alpha_{2e}} \right) \\ \frac{\partial C_p}{\partial \theta_e} = 2 \left(p_{11e} \frac{\partial p_{11e}}{\partial \theta_e} + p_{12e} \frac{\partial p_{12e}}{\partial \theta_e} + p_{21e} \frac{\partial p_{21e}}{\partial \theta_e} + p_{22e} \frac{\partial p_{22e}}{\partial \theta_e} \right) \\ \frac{\partial C_p}{\partial \varphi_e} = 2 \left(p_{11e} \frac{\partial p_{11e}}{\partial \varphi_e} + p_{12e} \frac{\partial p_{12e}}{\partial \varphi_e} + p_{21e} \frac{\partial p_{21e}}{\partial \varphi_e} + p_{22e} \frac{\partial p_{22e}}{\partial \varphi_e} \right) \\ \frac{\partial C_p}{\partial x_{1e}} = 2 \left(p_{11e} \frac{\partial p_{11e}}{\partial x_{1e}} + p_{12e} \frac{\partial p_{12e}}{\partial x_{1e}} \right) \\ \frac{\partial C_p}{\partial x_{2e}} = 2 \left(p_{21e} \frac{\partial p_{21e}}{\partial x_{2e}} + p_{22e} \frac{\partial p_{22e}}{\partial x_{2e}} \right) \end{cases} \quad (14)$$

2.3 优化列式及流程图

本节建立梯度板结构的两尺度结构优化设计列式,并将 Helmholtz-type PDE 过滤应用于单元设计变量和节点设计变量,以保证单胞结构和映射函数平滑变化。过滤后的设计变量表示为 $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \bar{\theta}$ 和 $\bar{\varphi}$ 。最小柔顺性优化的流程图如图 6 所示。

板的优化列式如式(15)所示。在优化列式中,将结构柔顺性 C 与相容性指数 C_p 相结合构建目标函数,使两尺度均质板在优化过程中与映射函数保持一致。参数 β 设置为 $\beta C_p / C \approx 0.05$ 使得 βC_p 项既不会太小而违反一致性关系,也不会太大而干扰板

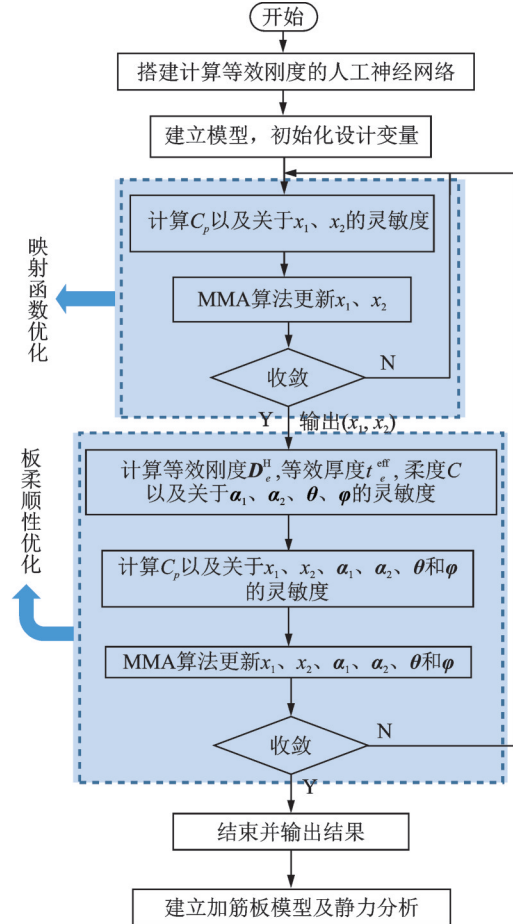


图 6 最小柔顺性优化的流程图

Fig.6 Flowchart of minimum compliance optimization for spatially graded plates

结构柔度的优化。除此以外,将等效厚度作为约束函数来约束材料用量。

$$\begin{aligned} & \text{find } \mathbf{d} = \{ \alpha_1^T \quad \alpha_2^T \quad \theta^T \quad \varphi^T \quad x_1^T \quad x_2^T \}^T \\ & \text{minimize } f_0 = \\ & C(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \bar{\theta}, \bar{\varphi}) + \beta C_p(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \bar{\theta}, \bar{\varphi}, \bar{x}_1, \bar{x}_2) \\ & \text{subject to } t^{\text{eff}}(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \bar{\theta}, \bar{\varphi}) \leq t_0^{\text{eff}} \\ & \alpha_{\min} \leq \alpha_{1e}, \alpha_{2e} \leq \alpha_{\max}, \theta_{\min} \leq \theta_e \leq \theta_{\max}, \\ & \varphi_{\min} \leq \varphi_e \leq \varphi_{\max} \quad (e = 1, 2, \dots, N_e), \\ & x_{\min} \leq x_{1i}, x_{2i} \leq x_{\max} \quad (i = 1, 2, \dots, N_n) \end{aligned} \quad (15)$$

3 数值算例

3.1 三角加筋板

算例 1 如图 7 所示,载荷工况为在板上施加均布载荷 $p = 6.25 \times 10^{-4}$ 。优化所采用的微单胞是如图 7(b)所示的三角加筋单胞。单胞的无量纲尺寸参数为 $l_1 = \sqrt{3}, l_2 = 1, h = 0.4$,单胞的材料属性为各向同性, $E = 20, \nu = 0.3$ 。

均匀化板采用 26×26 个尺寸大小为 1×1 的 Kirchhoff 单元进行离散。初始设计变量设置为 $\alpha_1 = \alpha_2 = 1, \theta = 0, \varphi = 0, x_1 = \xi_1, x_2 = \xi_2$, 对应于周期

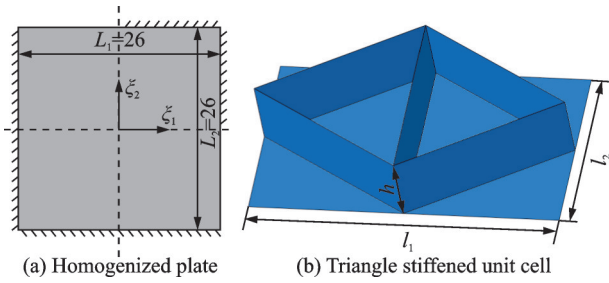


图7 算例1边界条件及单胞示意图

Fig.7 Sketch of boundary conditions and unit cell in Example 1

性非均匀化板。将初始等效厚度设置为许用等效厚度,数值为 $t_0^{eff} = 0.0477$ 。节点设计变量和单元

设计变量的过滤半径均设为1。

三角加筋板及其均匀化板在上述载荷工况下的挠度云图对比如表2所示,三角加筋板优化结果单元设计变量云图见图8。初始设计中,周期三角加筋板与其均匀化板的挠度云图基本一致,最大挠度误差仅为0.69%。初始设计板的柔顺性为6.86,优化后板的柔顺性为4.79,相较于初始设计降低了30.17%,大大提高了板的结构刚度。另一方面,优化结果的协调参数 C_p 也是一个小量,大小为0.025,说明梯度板与均匀化板之间吻合很好,其最大挠度也基本吻合。

表2 三角加筋板与均匀化板挠度云图

Table 2 Comparison of deflection contours between triangle stiffened plate and homogenization plate

	三角加筋板	均匀化板
初始设计		
优化结果		

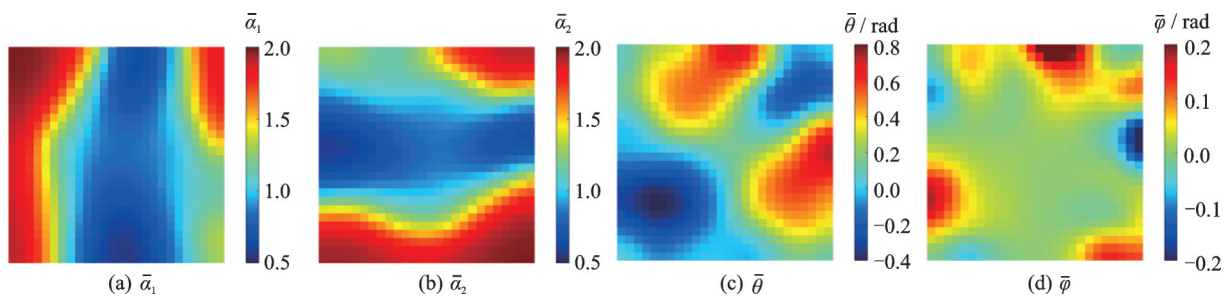


图8 三角加筋板优化结果单元设计变量云图

Fig.8 Contours of optimized design variables for triangle stiffened plate

3.2 蜂窝加筋板

算例2如图9所示,载荷工况为在板上施加均匀载荷 $p=6.25 \times 10^{-4}$ 。优化所采用的微单胞是如图9(b)所示的蜂窝加筋单胞。单胞的无量纲尺寸参数为 $l_1=1, l_2=1, l=0.2, h=0.4$,单胞的材料属性为各向同性, $E=20, \nu=0.3$ 。

算例2的边界条件如图9(a)所示,除初始等效厚度外,所采用的板的有限元模型和优化参数与算例1相同,此算例中,初始等效厚度设为 $t_0^{eff} =$

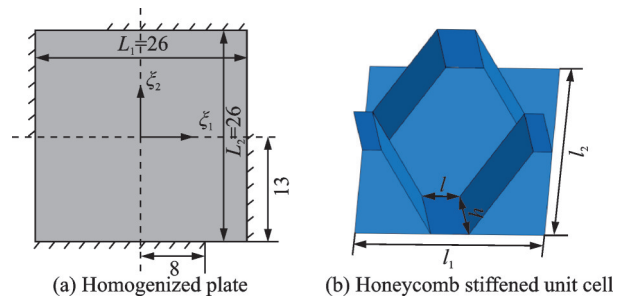


图9 算例2边界条件及单胞示意图

Fig.9 Sketch of boundary conditions and unit cell in Example 2

0.043 5。蜂窝加筋板及其均匀化板在上述载荷工况下的挠度云图如表 3 所示,蜂窝加筋板优化结果单元设计变量云图见图 10。初始设计中,蜂窝加筋板与其均匀化板的挠度云图相差不大,最大挠度误差为 4.2%。初始设计板的柔顺性为 11.88,优化后板的柔顺性为 6.31,相较于初始设计降低了 46.89%,显著改善了板的结构刚度。另一方面,如表 3 所示,优化结果中梯度板与均匀化板挠度云图

也基本吻合,验证了优化结果的正确性。表 4 给出了不同单胞尺寸在相同的映射函数下的挠度云图,单胞参数设置 1 为 $l_1=1.5, l_2=1.5, l=0.3$,单胞参数设置 2 为 $l_1=0.5, l_2=0.5, l=0.1$ 。根据表 3 和表 4 可知,单胞尺寸为 1.5、1.0 和 0.5 对应的梯度板和其均匀化板的最大挠度的相对误差分别为 3.9%、3.4% 和 1.5%,这与渐近均匀化理论预测相一致,即当单胞尺寸越小,均匀化板与加筋板的结果越接近。

表 3 蜂窝加筋板与均匀化板挠度云图

Table 3 Comparison of deflection contours between honeycomb stiffened plate and homogenization plate

	蜂窝加筋板	均匀化板
初始设计		
优化结果		

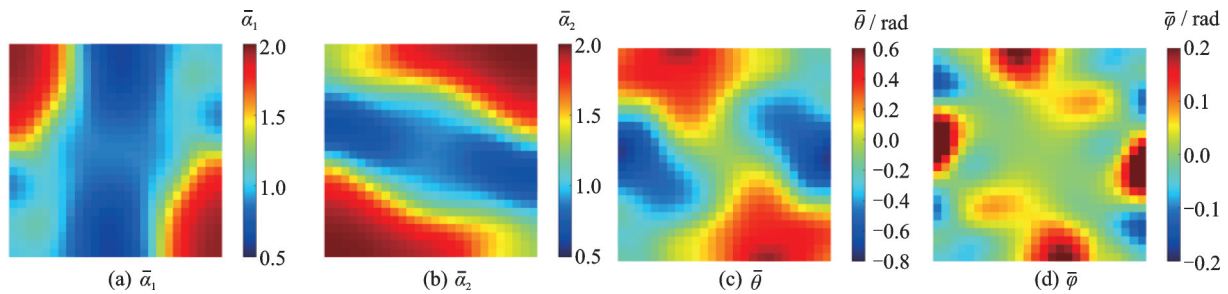


图 10 蜂窝加筋板优化结果单元设计变量云图

Fig.10 Contours of optimized design variables for honeycomb stiffened plate

表 4 不同单胞尺寸的梯度加筋板挠度云图

Table 4 Deflection contours of gradient stiffened plate with different unit cell sizes

	梯度加筋板	均匀化板
参数设置 1		
参数设置 2		

4 结 论

本文在梯度结构渐近均匀化方法基础上,通过引入显式表征单胞局部变形的单元设计变量和表征均匀化板与梯度板相关联的节点设计变量,建立了梯度板结构的两尺度优化列式。该优化列式可考虑一般平行四边形微结构,增大梯度板的设计空间,提升结构性能。此外,本文在优化过程中还引入ANN神经网络,搭建以单元设计变量为输入、等效刚度为输出的人工神经网络,加速单胞等效刚度计算,提高优化效率。本文分别对三角加筋板和蜂窝加筋板进行优化设计,通过对比其优化前后加筋板的位移云图和均匀化板的位移云图,验证了优化结果的正确性。

参考文献:

- [1] BEDAIR O. Analysis and limit state design of stiffened plates and shells: A world view[J]. Applied Mechanics Reviews, 2009, 62(2): 020801.
- [2] BENSOUSSAN A, LIONS J, PAPANICOLAOU G. Asymptotic analysis for periodic structures[M]. Amsterdam: North-Holland, 1978.
- [3] HASSANI B, HINTON E. A review of homogenization and topology optimization I-homogenization theory for media with periodic structure[J]. Computers & Structures, 1998, 69(6): 707-717.
- [4] ILTCHEV A, MARCADON V, KRUCH S, et al. Computational homogenisation of periodic cellular materials: Application to structural modelling[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2015, 93: 240-255.
- [5] ARTIOLI E. Asymptotic homogenization of fibre-reinforced composites: A virtual element method approach [J]. Meccanica, 2018, 53(6): 1187-1201.
- [6] CAI Y, XU L, CHENG G. Novel numerical implementation of asymptotic homogenization method for periodic plate structures[J]. International Journal of Solids and Structures, 2014, 51(1): 284-292.
- [7] CHENG G, CAI Y, XU L. Novel implementation of homogenization method to predict effective properties of periodic materials[J]. Acta Mechanica Sinica, 2013, 29(4): 550-556.
- [8] WANG B, TIAN K, HAO P, et al. Numerical-based smeared stiffener method for global buckling analysis of grid-stiffened composite cylindrical shells[J]. Composite Structures, 2016, 152: 807-815.
- [9] WANG B, TIAN K, ZHOU C, et al. Grid-pattern optimization framework of novel hierarchical stiffened shells allowing for imperfection sensitivity[J]. Aerospace Science and Technology, 2017, 62: 114-121.
- [10] NISHI S, TERADA K, KATO J, et al. Two-scale topology optimization for composite plates with in-plane periodicity[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2018, 113(8): 1164-1188.
- [11] CHENG G, XU L. Two-scale topology design optimization of stiffened or porous plate subject to out-of-plane buckling constraint[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2016, 54: 1283-1296.
- [12] ZHANG H, DING X, NI W, et al. Concurrent topology optimization of composite plates for minimum dynamic compliance[J]. Materials, 2022, 15(2): 538.
- [13] ZHU Y, LI S, DU Z, et al. A novel asymptotic-analysis-based homogenisation approach towards fast design of infill graded microstructures[J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2019, 124: 612-633.
- [14] XUE D, ZHU Y, LI S, et al. On speeding up an asymptotic-analysis-based homogenisation scheme for designing gradient porous structured materials using a zoning strategy[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2020, 62: 457-473.
- [15] MA X, WANG F, AAGE N, et al. Generative design of stiffened plates based on homogenization method[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2021, 64: 3951-3969.
- [16] WU J, SIGMUND O, GROEN J P. Topology optimization of multi-scale structures: A review[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2021, 63: 1455-1480.
- [17] XU L, ZHANG D, ZHANG Y, et al. Effective property calculation and its numerical implementation of spatially graded plate structures based on asymptotic homogenization[J]. Composite Structures, 2022, 300: 116165.

(编辑:刘彦东)