

DOI:10.16356/j.1005-2615.2023.06.020

## 基于截断型自适应交叉近似和奇异值分解的涡流无损检测模型

包扬<sup>1,2</sup>, 徐旻宣<sup>1,2</sup>

(1. 南京邮电大学电子与光学工程学院, 南京 210003; 2. 南京邮电大学柔性电子(未来技术)学院, 南京 210003)

**摘要:** 探讨了一种高效的三维涡流无损检测求解模型。该模型首次使用截断型自适应交叉算法和奇异值分解算法加速基于边界元法的涡流无损检测模型。该模型使用没有低频崩溃问题的 Stratton-Chu 方程作为边界积分方程, 然后使用 Rao-Wilton-Glisson 矢量基函数和脉冲基函数分别将等效面电流、磁流和磁场法向分量展开, 通过 Galerkin 方法测试, 得到阻抗矩阵。借助八叉树结构, 根据块与块之间的距离关系将阻抗矩阵分为对角块、近区块和远区块, 其中对角块和近区块使用边界元法直接计算存储, 远区块通过综合运用自适应交叉算法、奇异值分解算法和截断核函数算法进行压缩存储。最后, 以涡流无损检测基准问题为例, 将运用该方法预测的结果与其他模型预测的结果以及实验结果相比较, 验证了所提求解模型的准确性和有效性。

**关键词:** 无损检测; 边界元法; 自适应交叉近似; 奇异值分解; 截断核函数

**中图分类号:** TN98 **文献标志码:** A **文章编号:** 1005-2615(2023)06-1126-07

## An Adaptive Cross Approximation and Singular Value Decomposition Algorithm with Kernel Truncations for Accelerating Solving Eddy Current Nondestructive Testing

BAO Yang<sup>1,2</sup>, XU Minxuan<sup>1,2</sup>

(1. College of Electronic and Optical Engineering, Nanjing University of Posts and Telecommunications, Nanjing 210023, China; 2. College of Flexible Electronics (Future Technology), Nanjing University of Posts and Telecommunications, Nanjing 210023, China)

**Abstract:** A 3D numerical model of eddy current nondestructive testing (ECNDT) based on the kernel truncated (KT), adaptive cross approximation (ACA) and singular value decomposition (SVD) algorithms is proposed. It is the first time to apply the KT-ACA-SVD algorithm to accelerate the boundary element method (BEM)-based ECNDT model. The Stratton-Chu formulation is selected, which has no low frequency breakdown issue, as the boundary integral equation. The equivalent surface electric and magnetic field currents, and normal component of the magnetic field are expanded by the Rao-Wilton-Glisson (RWG) vector basis functions, and pulse basis functions, respectively. The Galerkin's method is chosen as the testing method, then the impedance matrix can be achieved. With the help of octree structure, the impedance matrix can be partitioned into diagonal, near and far block interactions which is decided by the distances between them. The diagonal and near block interactions are computed directly by the full matrix method, while the far block interactions are compressed by the KT-ACA-SVD algorithm. Finally, several

**基金项目:** 国家自然科学基金(GZ220034)。

**收稿日期:** 2023-05-29; **修订日期:** 2023-09-01

**作者简介:** 包扬, 男, 博士, 讲师, 硕士生导师, E-mail: brianbao@njupt.edu.cn。

**引用格式:** 包扬, 徐旻宣. 基于截断型自适应交叉近似和奇异值分解的涡流无损检测模型[J]. 南京航空航天大学学报, 2023, 55(6): 1126-1132. BAO Yang, XU Minxuan. An adaptive cross approximation and singular value decomposition algorithm with kernel truncations for accelerating solving eddy current nondestructive testing[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2023, 55(6): 1126-1132.

nondestructive testing (NDT) tests are conducted to compare the impedance variations predicted by the proposed model with the ones achieved by other methods, including analytical, semi-analytical methods, and the experiment. The results demonstrate both the accuracy and efficiency of the proposed model.

**Key words:** nondestructive testing (NDT); boundary element method (BEM); adaptive cross approximation (ACA); singular value decomposition (SVD); kernel truncation

无损检测及其评价技术对于把控产品质量,保证材料、零件和产品的可靠性,保证设备的安全运行以及提高生产效率、降低成本等都发挥着积极的作用,是发展现代工业和科学技术必不可少的重要技术手段,也是进行全面“质量管理”的重要环节<sup>[1]</sup>。涡流无损检测是一种非接触式的无损检测,主要用于检测金属或合金材料中的缺陷、裂纹等缺陷。该方法利用涡流感应原理及传感器检测技术,通过将交变电磁场引入被检测材料来产生涡流,并依据涡流在材料中所造成的阻抗变化来探测材料表面或浅表面的缺陷<sup>[2]</sup>。涡流无损检测因其检测效率高、误报率低、对环境污染小等特点受到广泛认可,已广泛应用于航空、汽车、铁道、建筑、化工等行业中。

涡流无损检测问题在计算机上进行模拟仿真时,可以用边界积分方程(Boundary integral equations, BIE)表示,随后用边界元法将其(Boundary element method, BEM)离散成矩阵方程。BEM将全解域的计算化为解域边界上的计算,使求解问题的维数降低了一维,减少了计算工作量。此外, BEM能够方便地处理无边界区域问题,可以适用于不规则几何区域的求解。但求解BEM所需的存储空间、阻抗矩阵填充时间和矩阵向量乘法时间的复杂度为 $O(N^2)$ ,其中 $N$ 为未知量的个数。当问题规模大、未知量个数多的时候, BEM的缺点就显现出来<sup>[3]</sup>。

为了提高BEM的计算效率,近年来,涌现出许多快速算法对其进行加速求解,这些算法将生成更小的阻抗矩阵来近似替换原始矩阵。这些快速算法包括,自适应积分法(Adaptive integral

$$E(\mathbf{r}) = E^{\text{inc}}(\mathbf{r}) + \oint_S \left\{ [\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}')] \nabla' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + [\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}') \times \nabla' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - j\omega\mu G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') [\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}(\mathbf{r}')] \right\} dS' \quad (1)$$

$$H(\mathbf{r}) = H^{\text{inc}}(\mathbf{r}) + \oint_S \left\{ j\omega\epsilon G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') [\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}')] + [\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}')] \nabla' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + [\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}(\mathbf{r}') \times \nabla' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] \right\} dS' \quad (2)$$

式中: $E^{\text{inc}}$ 和 $H^{\text{inc}}$ 为入射电磁场, $S'$ 为求解域, $\mathbf{r}$ 和 $\mathbf{r}' \in S$ 分别为场点和源点, $\omega$ 为角速度, $\mu$ 和 $\epsilon$ 为磁导率和介电常数, $\hat{\mathbf{n}}$ 为指向求解域的单位法向量, $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} / (4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)$ 为积分方程的核函数, $k = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$ 为波数。在求解低频问题时,这些公式仍能提供稳定的解,即使在静态下它们仍然有效。

method)<sup>[3]</sup>、矩阵分解算法(Matrix decomposition algorithm)<sup>[4]</sup>、 $H^2$ 矩阵法( $H^2$ -matrices method)<sup>[5]</sup>、UV法<sup>[6]</sup>、预校正快速傅里叶变换法<sup>[7]</sup>、多级快速多极算法(Multilevel fast multipole algorithm, MLFMA)<sup>[8]</sup>、自适应交叉算法(Adaptive cross approximation, ACA)<sup>[9]</sup>等。其中,基于球面谐波加法定理的MLFMA成功地将每次迭代的内存需求和CPU时间降至 $O(N \ln N)$ 。然而,MLFMA的实现依赖于积分方程的核(格林函数),缺乏通用性。

ACA是核无关的、纯代数的算法,它不依赖于积分核的特殊性质,因此普适性更强,可以适用于多种核函数类型的问题。此外,它可以与其他加速技术如特征基函数法、蝶形算法、奇异值分解法等相结合,进一步提高计算能力。由于ACA压缩后的矩阵的列是非正交的,因此在ACA的基础上,引入奇异值分解算法(Singular value decomposition, SVD),再利用压缩技术消除这些冗余。此外,截断核函数算法(Kernel truncation, KT)可以在ACA-SVD算法的基础上对冗余进一步压缩,它在几乎不影响精度的情况下,可以节省更多的存储空间。因此,本文提出一种基于BEM的KT-ACA-SVD算法模型用于快速且精确地求解三维涡流无损检测问题。通过对涡流无损检测基准算例的测试,验证了所提模型的正确性和高效性。

## 1 涡流无损检测的BEM模型

对于基于BEM的涡流无损检测模型,采用不会出现低频崩溃问题的Stratton-Chu方程来对三维涡流无损检测问题进行建模<sup>[9]</sup>

在涡流检测的正常频率范围内,通常可以忽略金属试件中的位移电流对涡流检测结果的影响。这是因为在涡流检测的频率范围内,位移电流与导电电流相比非常小,在计算涡流的过程中可以忽略不计。所以可以对外区域进行低频近似,区域1为自由空间,区域2为高导电性的金属。对于区域1, $\hat{\mathbf{n}}_1 = \hat{\mathbf{n}}$ ,  $\nabla' G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\nabla G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ ; 对于区域2,

$\hat{n}_2 = -\hat{n}$ ,  $\nabla' G_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\nabla G_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ 。由于频率较低,式(1,2)可近似为

$$H_1(\mathbf{r}) \approx H^{\text{inc}}(\mathbf{r}) - \left(1/\mu_1\right) \oint_S \nabla G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \hat{n} \cdot B(\mathbf{r}') dS' + \oint_S \nabla G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \times \hat{n} \times H(\mathbf{r}') dS' \quad (3)$$

$$E_2(\mathbf{r}) \approx j\omega\mu_2 \oint_S \nabla G_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \hat{n} \times H(\mathbf{r}') dS' - \oint_S \nabla G_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \times \hat{n} \times E(\mathbf{r}') dS' \quad (4)$$

$$B_2(\mathbf{r}) \approx -j\omega\epsilon_2\mu_2 \oint_S \nabla G_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \hat{n} \times E(\mathbf{r}') dS' + \oint_S \left[ \nabla G_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \hat{n} \cdot B(\mathbf{r}') - \mu_2 \nabla G_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \times \hat{n} \times H(\mathbf{r}') \right] dS' \quad (5)$$

因为高电导率和低频的特性,所以  $\epsilon_2 = \epsilon_1 \epsilon_r - j\sigma/\omega \approx -j\sigma/\omega$ , 并且  $\hat{n} \cdot E_2 = \hat{n} \cdot \epsilon_1 E_1/\epsilon_2 \ll 1$ , 引入等效表面电流和磁流, 随后用 RWG (Rao-Wilton-Glisson) 矢量基函数<sup>[10]</sup>展开方程, 同时将磁场法向分量用脉冲基函数展开, 即

$$\begin{aligned} \bar{J}_s(\mathbf{r}) &= \sum_{n=1}^{N_s} a_n \mathbf{A}_n(\mathbf{r}) \\ \mathbf{M}_s(\mathbf{r}) &= \sum_{n=1}^{N_s} c_n \mathbf{A}_n(\mathbf{r}) \\ \tilde{B}_n &= \sum_{n=1}^{N_p} d_n b_n(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

式中:  $\mathbf{A}_n(\mathbf{r})$  为 RWG 函数,  $b_n(\mathbf{r})$  为脉冲基函数,  $N_s$  为所包含三角形公共边的数量,  $N_p$  为所包含三角形面的数量。

选用伽辽金法展开得到的阻抗矩阵为<sup>[11]</sup>

$$Z = \begin{bmatrix} 0.5T - K_1^\times & 0 & R_1^\times \\ j\frac{\mu_2}{\mu_1} L_2^\times & 0.5T + K_2^\times & 0 \\ \frac{\mu_2}{\mu_1} K_2^n & -jk_2^2 L_2^n & 0.5D - R_2^n \end{bmatrix} \quad (6)$$

式中: 算子的下标 1、2 分别代表空气和金属媒质, 上标“ $\times$ ”和“ $n$ ”分别代表与单位法向量的叉乘和点乘。  $K$ 、 $L$  和  $R$  算子定义为<sup>[11]</sup>

$$K_j(X) = P V \oint_S \nabla G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \times X(\mathbf{r}') dS' \quad (7)$$

$$L_j(X) = \oint_S G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}') X(\mathbf{r}') dS' \quad (8)$$

$$R_j(X_n) = P V \oint_S \nabla G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}') X_n(\mathbf{r}') dS' \quad (9)$$

式中:  $K$  算子为磁(电)流产生的电(磁)场,  $L$  算子为电(磁)流产生的电(磁)场,  $R$  算子为电(磁)荷产生的电(磁)场。阻抗矩阵整体并不是低秩矩阵, 但是因为格林函数的本质, 阻抗矩阵中仍然有许多低

秩的子矩阵。为了找到这些子矩阵从而使用快速算法压缩求解, 需要借助于八叉树结构, 将目标划分为对角块、近区块和远区块。对角块和近区块使用满矩阵进行计算存储, 远区块用 KT-ACA-SVD 算法压缩存储。

## 2 KT-ACA-SVD 算法

ACA 是一种低秩压缩算法, 它可以用于降低矩量法所产生的计算机开销。它的起源可以追溯到 2000 年<sup>[12]</sup>, Zhao 等<sup>[13]</sup> 将其引入电磁场领域, 文献<sup>[14-15]</sup> 将其引入求解涡流问题。在 ACA 算法中, 其基本思想是构造两个矩阵  $U^{m \times r}$ 、 $V^{r \times n}$ , 用这两个矩阵的乘积来近似表示原矩阵  $Z^{m \times n}$

$$Z^{m \times n} \approx U^{m \times r} \times V^{r \times n} \quad (10)$$

式中  $r \ll \min(m, n)$ , 对于原矩阵  $Z^{m \times n}$  不需要存储  $m \times n$  个元素, 仅需要存储  $r \times (m + n)$  个元素, 极大地降低了存储量的需求。

ACA 算法的基本步骤为<sup>[12-15]</sup>: (1) 任意选取第 1 行元素  $V_1 = Z(i_1, :)$ , 然后找到  $V_1$  中最大元素值以及其所在位置  $j_1$ 。(2) 第 1 列元素可以计算为  $U_1 = Z(:, j_1)/V_{1\max}$ , 这里  $V_{1\max}$  为  $V_1$  中最大元素值。找到  $U_1$  中最大元素及其位置  $i_2$ ,  $V_2$  可以计算为  $Z(i_2, :)-U_1(i_2)V_1$ 。找到  $V_2$  中的最大值  $V_{2\max}$  以及位置  $j_2$ 。 $U_2$  可以计算为  $[Z(:, j_2)-U_1V_1(j_2)]/V_{2\max}$ 。对于第  $k$  步, 重复之前的步骤,  $V_k$  可以计算为  $V_k = Z(i_k, :)-\sum_{j=1}^{k-1} U_j(i_k)V_j$ ,  $U_k$  可以计算为  $U_k = [Z(:, j_k)-\sum_{j=1}^{k-1} V_j(j_k)U_j]/V_{k\max}$ 。精度  $\epsilon$  和算法停止条件为  $(|U_k \cdot V_k|)/(|U_1 \cdot V_1|) \leq \epsilon$ 。

ACA 压缩后的  $U$  和  $V$  矩阵中的列非正交, 因此仍有冗余, 可以通过 SVD 算法进行优化。使用 QR 分解得到  $U = Q_U R_U$ ,  $V^T = Q_V R_V$ , 这里  $R_U$  和  $R_V^T$  矩阵的乘积可以用 SVD 算法压缩<sup>[16]</sup>

$$R_U R_V^T = \hat{U} \hat{\Sigma} \hat{V} \quad (11)$$

这样原矩阵  $Z$  可以近似为  $Z = \tilde{U} \times \tilde{V}$ , 这里  $\tilde{U} = Q_U \hat{U} \hat{\Sigma}$ ,  $\tilde{V} = \hat{V} Q_V^T$ 。

由格林函数的定义可知, 两个远区块之间的距离越大, 它们之间的相互作用越小。在阻抗矩阵中, 远区块相互作用远远小于对角块时, 这些远区块相互作用可以忽略, 因为其对精度几乎没有影响<sup>[9]</sup>。所以可以通过截断这些影响小的远区块来节省内存空间, 这就是截断核函数的思想。

将此想法应用于阻抗矩阵, 衡量远区块与对角

块相互作用的精度定义为

$$\tau = \frac{|Z_{ba}|}{|Z_{aa}|} \quad (12)$$

式中: $Z_{aa}$ 为  $a$  的对角块作用, $Z_{ba}$ 为块  $a$  和其远区块  $b$  的作用。通过控制精度  $\tau$ ,可以截断相互作用小的远区块而不影响结果的准确性。

### 3 数值算例

本节通过使用有限匝线圈检测金属板、有限匝线圈检测管道内部这两种常见的涡流无损检测基准问题检测 KT-ACA-SVD 加速的 BEM 模型的求解性能,将该模型预测的结果与其他模型获得的结果,如 ACA、ACA+SVD、BEM、实验法和解析法的结果进行比较,从而验证了基于 KT-ACA-SVD 算法的求解模型的精度和效率。计算结果都是在 2.6 GHz 的 Intel Xeon 工作站上仿真得到的。

#### 3.1 有限匝线圈检测金属板

在导电金属板上放置一个有限匝线圈对导电金属板进行检测,线圈和导电金属板的信息参见表 1、2<sup>[9]</sup>。

表 1 线圈参数

Table 1 Parameters of coil

参数	线圈 C5	线圈 C27
内径 $r_i$ /mm	9.33	7.04
外径 $r_o$ /mm	18.04	12.4
提高高度 $s$ /mm	3.32	3.43
厚度 $l$ /mm	10.05	5.04
匝数 $n$	1 910	556
工作频率 $f$ /Hz	850	20 000

表 2 导电板参数

Table 2 Parameters of the conducting plate

参数	块 B1	块 B2
电导率 $\rho/(S \cdot m^{-1})$	25.5	5.04
厚度 $n$ /mm	140	556

将线圈 C5 置于边长为 120 mm 的正方形导电板 B1 之上。将基于 BEM 的 KT-ACA-SVD 算法模型(ACA 精度为  $\epsilon = 10^{-1}$ )预测得到的阻抗变化与基于 BEM 的 ACA-SVD 算法模型、基于 BEM 的 ACA 算法模型、解析法、半解析法和实验结果进行比较,如图 1 所示。由图 1 可以发现随着 SVD 截断误差  $\tau$  和截断核函数算法的截断精度  $e$  的增加,与 BEM 模型预测的阻抗变化的相对误差呈增大趋势。考虑到模型最优效率在精度最低时获得,因此,为了保证相对误差小于 1% 这一精度要求,KT-ACA-SVD 算法模型的精度最低可以取为  $\epsilon = 10^{-1}$ 、 $\tau = 10^{-1}$ 、 $e = 10^{-2}$ 。

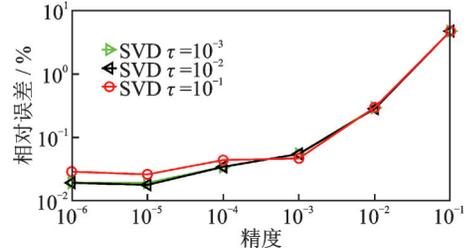


图 1 C5 线圈算例预测的阻抗相对误差

Fig.1 Relative differences of impedance changes for case of coil C5

接下来讨论模型对该算例的求解效率。图 2 和图 3 显示了 ACA 精度为  $\epsilon = 10^{-1}$  情况下,远区块存储量以及 CPU 单次迭代时间随着不同的 SVD 截断误差和截断核函数算法的截断精度的变化情况。随着 SVD 截断误差  $\tau$  和截断核函数算法截断精度  $e$  的增加,远区块所需的存储量和 CPU 单次迭代时间均在降低。在 SVD 截断误差为  $10^{-1}$  的前提下,基于 BEM 的 KT-ACA-SVD 算法模型(截断核函数精度  $e = 10^{-2}$ )与其他截断核函数精度( $e = 10^{-3}$ 、 $e = 10^{-4}$ 、 $e = 10^{-5}$ 、 $e = 10^{-6}$ )以及基于 BEM 的 ACA-SVD 求解法(无截断核函数)相比较,远区块的内存开销分别节省了 86.7%、92.7%、93.8%、94.5% 和 96.2%,CPU 单次迭代时间分别节省了 7.3%、18.4%、22.9%、25.2% 和 38.4%。

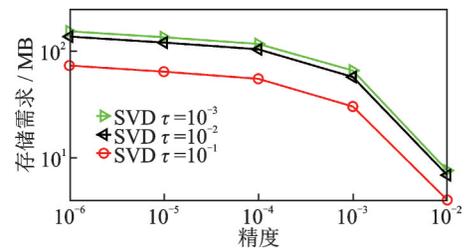


图 2 C5 线圈算例的远区块内存开销

Fig.2 Memory costs of far blocks for case of coil C5

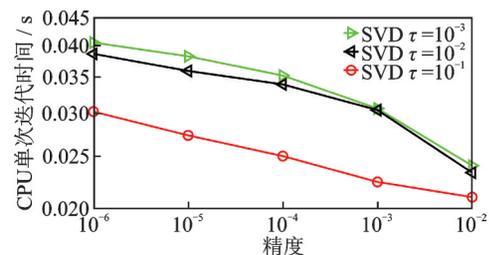


图 3 C5 线圈算例的计算机单次迭代时间

Fig.3 CPU time per iteration for case of coil C5

表 3 为基于 BEM 的 KT-ACA-SVD 算法模型(ACA 精度为  $\epsilon = 10^{-1}$ ,SVD 截断误差为  $\tau = 10^{-1}$ ,截断核函数精度  $e = 10^{-2}$ )预测的和其他方法得到的阻抗变化。通过观察表 3 中阻抗实部和虚部的变化,可以得到基于 BEM 的 KT-ACA-SVD 算法

模型与基于BEM的ACA-SVD算法模型、基于BEM的ACA算法模型、BEM模型、解析法、半解析法、实验得到的阻抗变化值的相对误差均小于1%，验证了基于BEM的KT-ACA-SVD算法模型的精度。

表3 线圈C5置于金属块B1时各模型得到的阻抗变化值  
Table 3 Impedance changes achieved by different methods for placing coil C5 above plate B1

方法	阻抗变化值/ $\Omega$
KT-ACA-SVD( $\epsilon = 10^{-1}, \tau = 10^{-1}, e = 10^{-2}$ )	20.953-j71.002
ACA-SVD( $\epsilon = 10^{-1}, \tau = 10^{-1}$ ) <sup>[17]</sup>	22.152-j70.431
ACA( $\epsilon = 10^{-1}$ ) <sup>[9]</sup>	22.150-j70.424
BEM <sup>[9]</sup>	22.153-j70.409
实验方法 <sup>[18]</sup>	22.000-j70.500
Dodd & Deeds <sup>[18]</sup>	22.200-j70.490
Bowler <sup>[19]</sup>	22.250-j70.450

在远区块存储开销方面，基于BEM的KT-ACA-SVD算法模型( $\epsilon = 10^{-1}, \tau = 10^{-1}, e = 10^{-2}$ )比基于BEM的ACA-SVD算法模型(ACA精度为 $\epsilon = 10^{-1}$ , SVD截断误差为 $\tau = 10^{-1}$ )节省96.2%。在总的模型存储开销方面，基于BEM的KT-ACA-SVD算法模型占BEM算法模型总开销的2.65%，而CPU时间仅占BEM算法模型所需时间的0.35%。通过这个算例可以看出，基于BEM的KT-ACA-SVD算法模型相较于其他方法不仅有很高的精度，而且有很高的计算效率。

在第2个算例中，将线圈C27置于边长为80 mm的金属块B2之上。将基于BEM的KT-ACA-SVD算法模型(ACA精度为 $\epsilon = 10^{-1}$ )预测得到的阻抗变化与基于BEM的ACA-SVD算法模型、基于BEM的ACA算法模型、BEM模型、解析法、半解析法和实验所获得的阻抗变化结果进行比较，如图4所示。由图4可以发现，随着SVD截断误差 $\tau$ 和截断核函数算法截断精度 $e$ 的增加，与BEM模型预测的阻抗变化的相对误差呈增加趋势，为了保证相对误差小于1%，KT-ACA-SVD的精度最低可以取为 $\epsilon = 10^{-1}, \tau = 10^{-1}, e = 10^{-2}$ 。

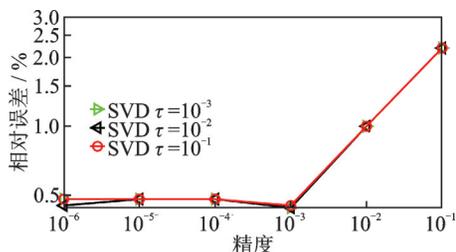


图4 C27线圈算例预测的阻抗相对误差

Fig.4 Relative differences of impedance changes for case of coil C27

图5和图6显示了ACA精度为 $\epsilon = 10^{-1}$ 情况下，远区块存储量以及CPU单次迭代时间随着不同的SVD截断误差和截断核函数算法的截断精度的变化情况。随着SVD截断误差 $\tau$ 和截断核函数算法截断精度 $e$ 的增加，远区块所需的存储量和CPU单次迭代时间均在降低。在SVD截断误差为 $10^{-1}$ 的前提下，基于BEM的KT-ACA-SVD算法模型(截断核函数精度 $e = 10^{-2}$ )与其他截断核函数精度( $e = 10^{-3}, e = 10^{-4}, e = 10^{-5}, e = 10^{-6}$ )以及基于BEM的ACA-SVD求解法(无截断核函数)相比较，远区块的内存开销分别节省了86.8%、89.7%、91.1%、91.3%和93.0%，CPU单次迭代时间分别节省了8.6%、13.7%、18.2%、19.7%和20.7%。

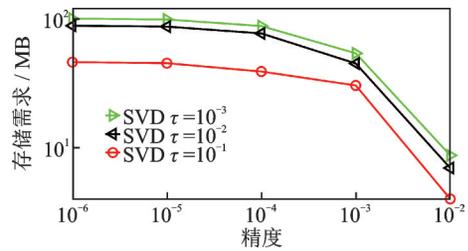


图5 C27线圈算例的远区块内存开销

Fig.5 Memory costs of far blocks for case of coil C27

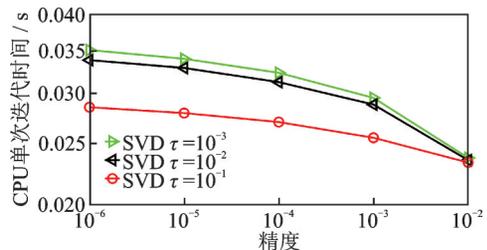


图6 C27线圈算例的计算机单次迭代时间

Fig.6 CPU time per iteration for case of coil C27

表4为基于BEM的KT-ACA-SVD算法模型(ACA精度为 $\epsilon = 10^{-1}$ , SVD截断误差为 $\tau = 10^{-1}$ , 截断核函数精度 $e = 10^{-2}$ )以及其他方法得到的阻抗变化。由表4可知，基于BEM的KT-ACA-SVD算法模型与基于BEM的ACA-SVD算法模型、基于BEM的ACA算法模型、BEM模型、解析法、半解析法、实验得到的阻抗变化值的相对误差均小于1%，再一次验证了基于BEM的KT-ACA-SVD算法模型的精度。

在远区块存储开销方面，基于BEM的KT-ACA-SVD算法模型( $\epsilon = 10^{-1}, \tau = 10^{-1}, e = 10^{-2}$ )比基于BEM的ACA-SVD算法模型(ACA精度为 $\epsilon = 10^{-1}$ , SVD截断误差为 $\tau = 10^{-1}$ )节省93%，其总的模型内存开销仅占BEM算法模型开销的2.66%，CPU计算时间仅占BEM算法模型所

表 4 线圈 C27 置于金属块 B2 时各模型得到的阻抗变化值  
Table 4 Impedance changes achieved by different methods for placing coil C27 above plate B2

方法	阻抗变化值/ $\Omega$
KT-ACA-SVD( $\epsilon = 10^{-1}, \tau = 10^{-1}, e = 10^{-2}$ )	11.980-j125.713
ACA-SVD( $\epsilon = 10^{-1}, \tau = 10^{-1}$ ) <sup>[17]</sup>	12.723-j124.986
ACA( $\epsilon = 10^{-1}$ ) <sup>[9]</sup>	12.730-j124.981
BEM <sup>[9]</sup>	12.734-j124.980
实验方法 <sup>[18]</sup>	12.650-j125.100
Dodd & Deeds <sup>[18]</sup>	12.801-j125.388
Bowler <sup>[19]</sup>	12.801-j125.329

需时间的 1.17%。这再一次证明了基于 BEM 的 KT-ACA-SVD 算法模型的精确性和高效性。

### 3.2 有限匝线圈检测金属管道

将有限匝线圈放置在金属管道内,管道内半径为 8.32 mm,外半径为 200 mm,轴长为 12 mm,电导率为 0.84 S/m。工作频率为 5 kHz。基于 BEM 的 KT-ACA-SVD 算法模型(ACA 精度为  $\epsilon = 10^{-1}$ ,SVD 截断误差为  $\tau = 10^{-1}$ ,截断核函数精度  $e = 10^{-4}$ )、基于 BEM 的 ACA-SVD 算法模型、基于 BEM 的 ACA 算法模型、BEM 模型、半解析法得到的阻抗变化值如表 5 所示。

表 5 各算法的阻抗值比较

Table 5 Impedance changes achieved by different methods

方法	阻抗变化值/ $\Omega$
KT-ACA-SVD( $\epsilon = 10^{-1}, \tau = 10^{-1}, e = 10^{-4}$ )	7.400-j6.954
ACA-SVD( $\epsilon = 10^{-1}, \tau = 10^{-1}$ )	7.389-j6.892
ACA( $\epsilon = 10^{-1}$ )	7.410-j6.905
Bowler <sup>[20]</sup>	7.500-j6.850
BEM	7.525-j6.893

由表 5 可知,基于 BEM 的 KT-ACA-SVD 算法模型与基于 BEM 的 ACA-SVD 算法模型、基于 BEM 的 ACA 算法模型、BEM 模型、半解析法得到的阻抗变化值的相对误差均小于 1%,再一次证明了基于 BEM 的 KT-ACA-SVD 算法模型的精确性。

在存储开销方面,基于 BEM 的 KT-ACA-SVD 算法模型( $\epsilon = 10^{-1}, \tau = 10^{-1}, e = 10^{-4}$ )比基于 BEM 的 ACA-SVD 算法模型( $\epsilon = 10^{-1}, \tau = 10^{-1}$ )在远区块存储量方面节省 15.7%,整体存储开销相较于基于 BEM 的 ACA 算法模型节省 75.1%,其总内存开销仅占 BEM 算法模型开销的 4.83%。这又一次证明了基于 BEM 的 KT-ACA-SVD 算法模型的精确性和高效性。

图 7 和图 8 显示了 ACA 精度为  $\epsilon = 10^{-1}$  情况

下,远区块存储量以及 CPU 单次迭代时间随着不同的 SVD 截断误差和截断核函数算法的截断精度的变化情况。从图中可知,随着 SVD 截断误差  $\tau$  和截断核函数算法的截断精度  $e$  的增加,远区块所需的存储量和 CPU 单次迭代时间均呈降低趋势。在 SVD 截断误差为  $10^{-1}$  的前提下,基于 BEM 的 KT-ACA-SVD 算法模型(截断核函数精度  $e = 10^{-4}$ )与其他截断核函数精度( $e = 10^{-5}, e = 10^{-6}, e = 10^{-7}$ )以及基于 BEM 的 ACA-SVD 求解法(无截断核函数)相比较,远区块的内存开销分别节省了 11.6%、15.0%、15.6% 和 15.7%,CPU 单次迭代时间分别节省了 1.4%、1.5%、1.7% 和 10.3%。

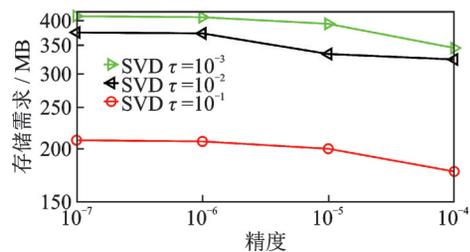


图 7 管道模型的远区块内存开销

Fig.7 Memory costs of far blocks for case of coil inside the borehole

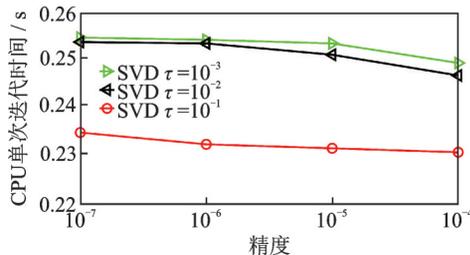


图 8 管道模型的计算机单次迭代时间

Fig.8 CPU time per iteration for case of coil inside the borehole

## 4 结 论

本文将基于 BEM 的 KT-ACA-SVD 算法模型应用于求解涡流无损检测问题。该算法结合了 ACA、SVD 与 KT 算法,去除远区块中的冗余。通过涡流无损检测基准问题的研究与测试,结果表明该算法在保持了 ACA-SVD 算法模型精度的情况下,提升了 ACA-SVD 算法模型的求解效率。本文所提出的基于 BEM 的 KT-ACA-SVD 算法模型可以用于高效地求解三维涡流无损检测问题。

### 参考文献:

[1] 陈云瑞,季宏丽,裘进浩.矩形-圆形涡流探头设计与碳纤维预浸料的无损检测[J].南京航空航天大学学

- 报, 2021, 53(1): 109-115.
- CHEN Yunrui, JI Hongli, QIU Jinhao. Design of rectangle-circular eddy current probe and nondestructive testing of carbon fiber prepreg[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2021, 53(1): 109-115.
- [2] 裘振华. 涡流无损检测技术在冶金工业中的应用[J]. 上海金属, 1979(1): 118-127.
- QIU Zhenhua. The application of eddy current testing in metallurgy[J]. Shanghai Metals, 1979(1): 118-127.
- [3] BLESZYNSKI E, BLESZYNSKI M, JAROSZE-WICZ T. AIM: Adaptive integral method for solving large-scale electromagnetic scattering and radiation problems[J]. Radio Science, 1996, 31(5): 1225-1251.
- [4] MICHIELSEN E, BOAG A. A multilevel matrix decomposition algorithm for analyzing scattering from large structures[J]. IEEE Transactions on Antennas & Propagation, 1996, 44(8): 1086-1093.
- [5] CHAI W, JIAO D. An H<sup>2</sup>-matrix-based integral equation solver of reduced complexity and controlled accuracy for solving electrodynamic problems[J]. IEEE Transactions on Antennas & Propagation, 2009, 57(10): 3147-3159.
- [6] TSANG L, QIN L. Wave scattering with UV multilevel partitioning method for volume scattering by discrete scatterers[J]. Microwave and Optical Technology Letters, 2004, 41(5): 354-361.
- [7] RUBINACCI G, TAMBURRINO A, VENTRE S, et al. Fast computational methods for large-scale eddy-current computation[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2002, 38(2): 529-532.
- [8] SONG J M, LU C C, CHEW W C. Multilevel fast multipole algorithm for electromagnetic scattering by large complex objects[J]. IEEE Transactions on Antennas & Propagation, 1997, 45(10): 1488-1493.
- [9] BAO Y, LIU Z W, SONG J M. Adaptive cross approximation algorithm for accelerating BEM in eddy current nondestructive evaluation[J]. Journal of Nondestructive Evaluation, 2018, 37(68): 1-8.
- [10] RAO S, WILTON D, GLISSON A. Electromagnetic scattering by surfaces of arbitrary shape[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1982, 30(3): 409-418.
- [11] BAO Y, SONG J M. Analysis of electromagnetic nondestructive evaluation modelling using Stratton-Chu formulation-based fast algorithm[J]. Philosophical Transactions of the Royal Society A, 2020, 378: 1-15.
- [12] BEBENDORF M. Approximation of boundary element matrices[J]. Numerische Mathematik, 2000, 86: 565-589.
- [13] ZHAO K, VOUVAKIS M N, LEE J F. The adaptive cross approximation algorithm for accelerated method of moments computations of EMC problems[J]. IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility, 2006, 47(4): 763-773.
- [14] SMAJIC J, ANDJELIC Z, BEBENDORF M. Fast BEM for eddy-current problems using H-matrices and adaptive cross approximation[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2007, 43: 1269-1272.
- [15] KURZ S, RAIN O, RJASANOW S. The adaptive cross-approximation technique for the 3-D boundary-element method[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2002, 38: 421-424.
- [16] BEBENDORF M, KUNIS S. Recompression techniques for adaptive cross approximation[J]. The Journal of Integral Equations and Applications, 2009, 21: 331-357.
- [17] BAO Y, XU M X, QIU J H, et al. Efficient model assisted probability of detection estimations in eddy current NDT with ACA-SVD based forward solver[J]. Sensors, 2022, 22(19): 1-13.
- [18] DODD C V, DEEDS W E. Analytical solutions to eddy-current probe-coil problems[J]. Applied Physics, 1968, 39(6): 2829-2838.
- [19] THEODOULIDIS T P, BOWLER J R. Eddy current coil interaction with a right-angled conductive wedge[J]. Proceedings of the Royal Society A Mathematical Physical & Engineering Sciences, 2005, 461(2062): 3123-3139.
- [20] WU T, BOWLER J R. Eddy-current induction by a coil whose axis is perpendicular to that of a tube[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2017, 53(7): 1-9.

(编辑:陈珺)