

DOI:10.16356/j.1005-2615.2023.04.014

非线性准零刚度系统分岔控制方法

蔡福建, 邵敏强

(南京航空航天大学机械结构力学及控制国家重点实验室, 南京 210016)

摘要: 以超稳定车载隔振平台为依托, 建立环绕式侧向弹性支撑构成的准零刚度系统, 研究该系统的非线性动力学特性和振动主动调节方法, 以获得优异的振动隔离效果。根据系统总体刚度和位移关系确定系统结构参数, 采用谐波平衡法求解获得系统动力学响应规律和非线性幅频响应函数。进一步对系统的非线性分岔特性进行主动控制方法研究, 获得准零刚度系统的分岔控制方法, 通过选取适当的控制参数消除系统分岔。仿真结果表明: 分岔控制方法在合适的控制参数下能有效消除分岔以及达到振动抑制的效果。

关键词: 振动控制; 准零刚度系统; 非线性特性; 分岔控制

中图分类号: TP391 **文献标志码:** A **文章编号:** 1005-2615(2023)04-0686-07

Bifurcation Control Method for Nonlinear Quasi-zero Stiffness System

CAI Fujian, SHAO Minqiang

(State Key Laboratory of Mechanics and Control of Mechanical Structures, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing 210016, China)

Abstract: Relying on the ultra-stable vehicle-mounted vibration isolation platform, a quasi-zero stiffness system composed of wrap-around lateral elastic supports is established, and the nonlinear dynamic characteristics of the system and the active vibration adjustment method are studied to obtain excellent vibration isolation effect. The structural parameters of the system are determined according to the relationship between the overall stiffness and displacement of the system, and the harmonic balance method is used to obtain the dynamic response law and nonlinear amplitude-frequency response function of the system. The nonlinear bifurcation characteristics of the system are further studied on the active control method, the bifurcation control method of the quasi-zero stiffness system is obtained, and the bifurcation of the system is eliminated by selecting appropriate control parameters. The simulation results show that the bifurcation control method can effectively eliminate the bifurcation and achieve the effect of vibration suppression under the appropriate control parameters.

Key words: vibration control; quasi-zero stiffness system; nonlinear characteristics; bifurcation control

超稳定车载隔振系统对精密仪器、设备在车辆高速行驶过程中能否正常运行具有重要作用, 能够提供稳定的动力学环境。传统线性隔振器由线性弹簧与阻尼并联而成, 其隔振频带为 $\sqrt{2}$ 倍以上的隔振器固有频率。现实情况通常是外界的低频激励相对高频激励幅值大很多, 为了隔离低频振动,

需要将弹簧刚度降低, 但对于具有较大负载的情况, 为了保证有良好的承载能力, 又不能将弹簧刚度设置过低。1957年 Molyneux^[1]首次提出了将垂向弹簧与倾斜弹簧并联组成一个准零刚度隔振器, 其中垂向弹簧具有正刚度, 倾斜弹簧可提供负刚度。准零刚度隔振器具有高静刚度、低动刚度特

基金项目: 国家自然科学基金(11732006); 航空科学基金(20200028052013)。

收稿日期: 2022-03-06; **修订日期:** 2022-05-17

通信作者: 邵敏强, 男, 副教授, E-mail: m.q.shao@nuaa.edu.cn。

引用格式: 蔡福建, 邵敏强. 非线性准零刚度系统分岔控制方法[J]. 南京航空航天大学学报, 2023, 55(4): 686-692.
CAI Fujian, SHAO Minqiang. Bifurcation control method for nonlinear quasi-zero stiffness system[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2023, 55(4): 686-692.

性,即在平衡位置附近具有非常低的动刚度,同时能够承受较大的设计载荷。Kovacic 等^[2-4]也深入研究过这种三弹簧类型的准零刚度隔振器,其考虑侧向弹簧为非线性弹簧,并分析当激励为非对称外激励时系统的分岔、混沌等非线性动力学行为。准零刚度隔振器具有如下几个特点^[5]:(1)隔振系统固有频率低,隔振频带宽;(2)具有较大的静刚度,结构变形较小,承载能力好;(3)结构的合理设计能灵活地调整系统刚度。基于准零刚度隔振器的优秀隔振性能,其在低频与超低频隔振方面具有广泛的应用前景。

现有研究表明准零刚度系统能够有效提高对低频振动的隔离效果,大大拓宽隔振系统有效频带范围。然而,准零刚度系统由于侧向弹性结构提供的负刚度作用,导致系统存在非线性特性,在特定条件下会产生分岔、混沌等非线性动力学行为,导致准零刚度系统难以在实际工程中广泛应用。为了能够进一步提高准零刚度系统的稳定性能,消除不稳定非线性动力学行为,考虑从主动控制方面对系统进行振动控制方法研究。在非线形系统控制研究方面,钱长照等^[6]研究了时滞参数对受简谐激励的 van der Pol-Duffing 系统分岔响应的影响,结果表明选择合适的时滞参数能改变分岔曲线拓扑形态与分岔点的位置。蔡克红等^[7]研究分析了一个含励磁控制的简单电力系统的分岔现象,并设计了静态负反馈控制器。仿真结果表明该控制器能有效延迟系统鞍结分岔从而提高系统稳定性。杨庆超等^[8]研究了准零刚度隔振系统倍周期分岔,以及运用延拓法得到随机激励及阻尼变化时的倍周期分岔规律。符文彬等^[9]设计了一种含参非线性分岔控制器对弱非线性的强迫 Duffing 系统进行主共振分岔控制。计算结果表明此方法能有效消除系统主共振时的鞍结分岔,降低响应幅值。

结合已有研究结果,本文以超稳定车载隔振平台为依托,建立环绕式侧向弹性支撑构成的准零刚度系统,研究其非线性动力学特性和分岔调节主动控制方法,通过选取合适的控制参数来消除系统的分岔现象,使系统稳定并实现有效的振动抑制,为准零刚度系统在车载超稳隔振平台方面的应用提供理论基础。

1 准零刚度系统特性分析

1.1 准零刚度系统模型

环绕式侧向弹性支撑构成的准零刚度系统模型简化如图 1 所示,其由 1 根垂向弹簧、4 根侧向弹簧以及 4 个侧向阻尼并联组成,并与质量块、基座串联,图 1 所示为系统处理平衡位置时的状态。侧

向弹簧原长为 l_0 ,压缩至平衡位置后长度为 l ,刚度为 k_2 ;垂向弹簧原长 H_0 ,压缩至平衡位置后长度为 H ,刚度为 k_1 ;侧向阻尼大小为 c ;质量块质量为 m 。垂向弹簧、侧向弹簧以及侧向阻尼一端均铰接于基座上,另一端铰接于承载质量块的平台上,并且使用垂向导杆限制质量块只能在垂直方向上运动。

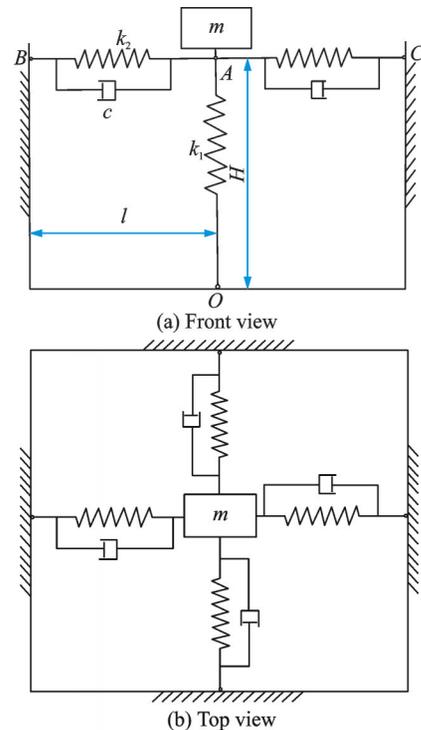


图 1 环绕式侧向弹性支撑准零刚度系统模型

Fig.1 A quasi-zero stiffness system model composed of wrap-around lateral elastic supports

1.2 理论建模

以侧向弹簧处于水平状态时质量块所处位置为原点,垂向弹簧伸长方向为 y 轴正方向建立空间直角坐标系。以质量块 m 为隔振对象,平衡位置处质量块所处的位置为零势能点,当质量块位移为 y 时侧向弹簧的长度为 l_1 ,可以得到质量块的动能与势能

$$T = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 \quad (1)$$

$$V = \frac{1}{2} [k_1 y^2 + 4k_2 (l_0 - l_1)^2] \quad (2)$$

系统的拉格朗日量为

$$L = T - V = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 - \frac{1}{2} [k_1 y^2 + 4k_2 (l_0 - l_1)^2] \quad (3)$$

式中 $l_1 = \sqrt{l^2 + y^2}$ 。将拉格朗日量代入拉格朗日方程 $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0$ 得系统在 y 方向的自由振动方程

$$m \ddot{y} + (k_1 + 4k_2) y - 4k_2 y \frac{l_0}{\sqrt{l^2 + y^2}} = 0 \quad (4)$$

对于侧向阻尼可用如下方法求得:

A点的速度矢量 $v_A = \frac{dOA}{dt} = \dot{y} \cdot j$, 其在BA上的投影为

$$v_A \cdot \frac{BA}{|BA|} = (0, \dot{y}) \cdot \frac{(-l, y)}{\sqrt{l^2 + y^2}} = \frac{y\dot{y}}{\sqrt{l^2 + y^2}}$$

对应的阻尼力为

$$F_c = -c \cdot v_A \cdot \frac{BA}{|BA|} = -\frac{cy\dot{y}}{l^2 + y^2} (-l, y)$$

单个阻尼的阻尼力在y方向的分力为 $F_{cy} = F_c \cdot n_y \cdot n_y =$

$$-\frac{cy\dot{y}}{l^2 + y^2} (-l, y) \cdot (0, 1) \cdot (0, 1) = \left(0, -\frac{cy^2\dot{y}}{l^2 + y^2}\right)$$

将侧向阻尼力加入动力学方程中,有

$$m\ddot{y} + 4\frac{cy^2\dot{y}}{l^2 + y^2} + (k_1 + 4k_2)y - 4k_2y\frac{l_0}{\sqrt{l^2 + y^2}} = 0 \quad (5)$$

式(5)为隔振系统自由振动的动力学方程。

引入如下参数

$$u = \frac{y}{l}, K = \frac{k_2}{k_1}, L_0 = \frac{l_0}{l}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_1}{m}}, \zeta = \frac{c}{2m\omega_n}, \tau = \omega_n t$$

则有 $\dot{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{d(ul)}{d(\tau/\omega_n)} = \omega_n l \frac{du}{d\tau} = \omega_n l \dot{u}$, 将以上参数代入式(5)可得系统无量纲自由振动方程为

$$\ddot{u} + 8\zeta \frac{u^2}{1+u^2} \dot{u} + u - 4K \left(\frac{L_0}{\sqrt{1+u^2}} - 1 \right) u = 0 \quad (6)$$

系统自由振动方程中的非线性项为

$$8\zeta \frac{u^2}{1+u^2} \dot{u} \text{ 和 } -4K \frac{L_0}{\sqrt{1+u^2}} u$$

两项,由于这两个非线性项较为复杂,动力学方程也无法求得解析解。在实际应用中,往往只关注平衡位置附近系统的振动情况,因此在平衡位置处对非线性项泰勒展开并只截取到三阶项对动力学方程处理。在平衡点 $u=0$ 处,有

$$\frac{u^2}{1+u^2} = u^2 + o(u^4), \frac{u}{\sqrt{1+u^2}} = u - \frac{u^3}{2} + o(u^3)$$

将其略去三阶以上高阶小量代入系统自由振动动力学方程并化简,则有

$$\ddot{u} + 8\zeta u^2 \dot{u} + (1 - 4KL_0 + 4K)u + 2KL_0 u^3 = 0 \quad (7)$$

1.3 系统静态特性

未简化的系统式(6)中,质量块所受的静力理论值为弹簧力

$$f_i = u - 4K \left(\frac{L_0}{\sqrt{1+u^2}} - 1 \right) u \quad (8)$$

未简化系统静态刚度理论值为

$$k_i = \frac{df_i}{du} = 4KL_0 \left[\frac{u^2}{(\sqrt{1+u^2})^3} - \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \right] + 4K + 1 \quad (9)$$

简化近似后的系统式(7)所受弹簧力近似值为

$$f_a = (1 - 4KL_0 + 4K)u + 2KL_0 u^3 \quad (10)$$

简化近似后系统静态刚度近似值为

$$k_a = \frac{df_a}{du} = 1 - 4KL_0 + 4K + 6KL_0 u^2 \quad (11)$$

为使系统在平衡位置处刚度为零,选择参数 $K=0.904, L_0=1.276$, 可得系统理论与近似的力-位移曲线以及刚度-位移曲线分别如图2、3所示。

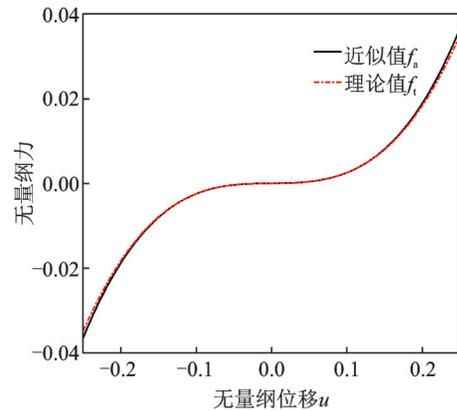


图2 环绕式侧向弹性支撑构成的准零刚度系统力-位移曲线

Fig.2 Force-displacement curve of a quasi-zero stiffness system composed of wrap-around lateral elastic supports

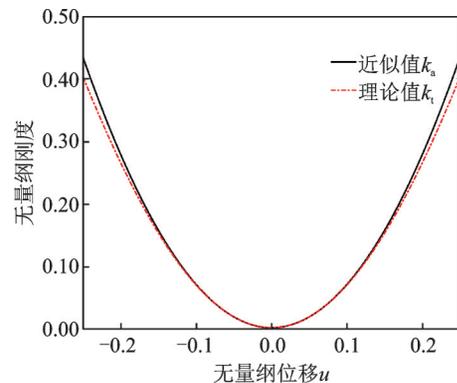


图3 环绕式侧向弹性支撑构成的准零刚度系统刚度-位移曲线

Fig.3 Stiffness-displacement curves of a quasi-zero stiffness system composed of wrap-around lateral elastic supports

可以看出,在平衡位置附近,截取到非线性项泰勒展开三阶项所得的力-位移曲线以及刚度-位移的近似值和理论值吻合度较高,由此可以验证截取到三阶泰勒展开对环绕式侧向弹性支撑构成的准零刚度系统近似的有效性。因此,为了计算方

便,后面的分析采用所得的简化近似动力学方程代替原方程进行分析。

1.4 系统动态特性

幅值为 F , 频率为 ω 的简谐力外激励作用于系统,对简谐力进行无量纲化,令

$$f_0 = \frac{F}{k_1 l}, \omega_n = \sqrt{\frac{k_1}{m}}, \Omega = \frac{\omega}{\omega_n}, \tau = \omega_n t$$

可得系统的动力学方程为

$$\ddot{u} + 8\zeta u^2 \dot{u} + (1 - 4KL_0 + 4K)u + 2KL_0 u^3 = f_0 \cos(\Omega\tau) \quad (12)$$

令 $\alpha = 1 - 4KL_0 + 4K$ 表示系统的线性刚度、 $\beta = 2KL_0$ 表示系统非线性刚度,可得

$$\ddot{u} + 8\zeta u^2 \dot{u} + \alpha u + \beta u^3 = f_0 \cos(\Omega\tau) \quad (13)$$

当线性刚度 $\alpha = 0$, 系统动力学方程变为

$$\ddot{u} + 8\zeta u^2 \dot{u} + \beta u^3 = f_0 \cos(\Omega\tau) \quad (14)$$

此处引入线性阻尼比 ξ 并且保留线性刚度项,系统的动力学方程为

$$\ddot{u} + 2\xi\dot{u} + 8\zeta u^2 \dot{u} + \alpha u + \beta u^3 = f_0 \cos(\Omega\tau) \quad (15)$$

运用谐波平衡法^[10]求解式(15),假设方程的一次谐波解为 $u = u_0 \cos(\Omega\tau + \gamma)$,代入式(15)可得

$$-\Omega^2 u_0 \cos(\Omega\tau + \gamma) - 2\xi u_0 \Omega \sin(\Omega\tau + \gamma) + 8\zeta [u_0 \cos(\Omega\tau + \gamma)]^2 [-\Omega u_0 \sin(\Omega\tau + \gamma)] + \alpha u_0 \cos(\Omega\tau + \gamma) + \beta [u_0 \cos(\Omega\tau + \gamma)]^3 = f_0 \cos(\Omega\tau) \quad (16)$$

经过一系列计算并化简最终得到如下幅频关系式

$$\left[\left(\frac{3}{4} \beta u_0^2 + \alpha - \Omega^2 \right) u_0 \right]^2 + [2u_0 \Omega (\zeta u_0^2 + \xi)]^2 = f_0^2 \quad (17)$$

将式(17)改写成 Ω^2 二次代数方程,则有

$$u_0^2 \Omega^4 + 2u_0^2 \left[-\left(\frac{3}{4} \beta u_0^2 + \alpha \right) + 2(\zeta u_0^2 + \xi) \right] \Omega^2 + u_0^2 \left(\frac{3}{4} \beta u_0^2 + \alpha \right)^2 - f_0^2 = 0 \quad (18)$$

令 $A = \frac{3}{4} \beta u_0^2 + \alpha, B = 2(\zeta u_0^2 + \xi)^2$, 则式(18)

可简化为

$$u_0^2 \Omega^4 + 2u_0^2 (B - A) \Omega^2 + u_0^2 A^2 - f_0^2 = 0 \quad (19)$$

舍去负数解可求得

$$\Omega = \sqrt{A - B \pm \sqrt{u_0^2 (A - B)^2 - A^2 + \left(\frac{f_0}{u_0} \right)^2}} \quad (20)$$

选取参数 $\alpha = 0, \beta = 2.289, \zeta = 0.05, \xi = 0, f_0 = 0.1$, 绘制幅频响应曲线如图 4 所示。从图 4 可以看出,系统存在两个幅值跳跃点,这两个幅值跳跃点

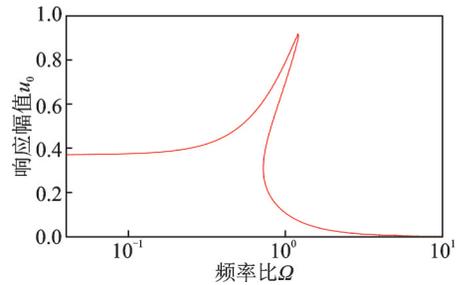


图 4 幅频响应曲线

Fig.4 Amplitude-frequency response curve

对应系统的两个鞍结分岔点。幅值跳跃现象是非线性系统有别于线性系统的重要特征。

2 共振带的分岔控制

由于系统在主共振区会因为参数组合而产生鞍结分岔,导致系统振幅在某个时刻产生跳变而降低隔振效果,因此需要根据系统的非线性特性设计控制器来有效消除系统的分岔现象。

准零刚度系统发生鞍结分岔有一定的条件,例如外激励幅值以及阻尼比会影响系统是否会发生鞍结分岔,因此设计控制器 $g(u, \dot{u}, t)$ 对系统进行分岔控制^[11]。将控制律加入系统中

$$\ddot{u} + 2\xi\dot{u} + 8\zeta u^2 \dot{u} + \alpha u + \beta u^3 = f_0 \cos(\Omega\tau) + g(u, \dot{u}, t) \quad (21)$$

假定控制参数为 a_1, a_2, a_3 , 假设控制器为

$$g(u, \dot{u}, t) = a_1 u + a_2 \dot{u} + a_3 u^3 \quad (22)$$

下面通过分析系统的主共振来分析系统的鞍结分岔的条件,以指导选择控制参数。整理加入控制律后的动力学方程为

$$\ddot{u} + (2\xi - a_2)\dot{u} + 8\zeta u^2 \dot{u} + (\alpha - a_1)u + (\beta - a_3)u^3 = f_0 \cos(\Omega\tau) \quad (23)$$

对系统的幅频响应关系式(19)进行微分,并且令 $d\Omega/du_0 = 0$, 得到系统鞍结分岔处

$$\Omega^4 + \left[2(B - A) + u_0^2 \left(8(\zeta u_0^2 + \xi)\zeta - \frac{3}{2}\beta \right) \right] \Omega^2 + A^2 + \frac{3}{2} \beta u_0^2 A = 0 \quad (24)$$

方程(24)的解为

$$\Omega_{1,2} = \sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4A \left(A + \frac{3}{2} \beta u_0^2 \right)}}{2}} \quad (25)$$

式中 $b = 2(B - A) + u_0^2 \left[8(\zeta u_0^2 + \xi)\zeta - \frac{3}{2}\beta \right]$ 。系统发生鞍结分岔的临界条件为

$$b^2 = 4 \left(A + \frac{3}{2} \beta u_0^2 \right) \quad (26)$$

当 $b^2 \leq 4A\left(A + \frac{3}{2}\beta u_0^2\right)$ 时, 系统不发生鞍结分岔, 即幅频响应曲线不会发生跳跃现象; 当 $b^2 > 4A\left(A + \frac{3}{2}\beta u_0^2\right)$ 时, 系统不发生鞍结分岔还需满足 Ω 不存在正实数解的条件, 即

$$A\left(A + \frac{3}{2}\beta u_0^2\right) > 0 \quad (27)$$

$$b > 0 \quad (28)$$

式(27)和式(28)需同时满足, 系统才不会产生鞍结分岔, 否则系统在 $\Omega > 0$ 的区间内将发生鞍结分岔。假设 $\Omega_1 \leq \Omega_2$, 系统所受外激励频率在区间 $[\Omega_1, \Omega_2]$ 时, 系统存在3个稳态解, 其中两个为稳定解, 一个为不稳定解。

引入控制律后, 通过调整控制参数 a_1, a_2, a_3 达到消除鞍结分岔的目的, 不产生鞍结分岔的条件为

$$\left\{ 2 \left[2 \left(\zeta u_0^2 + \left(\xi - \frac{a_2}{2} \right)^2 \right) - \frac{3}{4} (\beta - a_3) u_0^2 - (\alpha - a_1) \right] + u_0^2 \left[8 \left(\zeta u_0^2 + \left(\xi - \frac{a_2}{2} \right) \right) \zeta - \frac{3}{2} (\beta - a_3) \right] \right\}^2 < 4 \left[\frac{3}{4} (\beta - a_3) u_0^2 + (\alpha - a_1) \right] \left[\frac{9}{4} (\beta - a_3) u_0^2 + (\alpha - a_1) \right] \quad (29)$$

其中

$$2 \left[2 \left(\zeta u_0^2 + \left(\xi - \frac{a_2}{2} \right)^2 \right) - \frac{3}{4} (\beta - a_3) u_0^2 + (\alpha - a_1) \right] + u_0^2 \left[8 \left(\zeta u_0^2 + \left(\xi - \frac{a_2}{2} \right) \right) \zeta - \frac{3}{2} (\beta - a_3) \right] > 0$$

$$4 \left[\frac{3}{4} (\beta - a_3) u_0^2 + (\alpha - a_1) \right] \left[\frac{9}{4} (\beta - a_3) u_0^2 + (\alpha - a_1) \right] > 0$$

选定参数 $\zeta = 0.05, \xi = 0.02, \alpha = 0.03, \beta = 2.289$, 对不同参数值 a_1, a_2, a_3 与振动幅值 u_0 所形成的分岔区域进行仿真。改变其中一个参数, 其他两个控制参数为0, 仿真结果分别如图5~7所示。其中 S_1 表示不发生鞍结分岔的区域, S_2 表示发生鞍结分岔的区域, 曲线为两个区域的分界线。从图5可以看出, 对于幅值过大的振动, 通过改变参数 a_1 对分岔的控制效果有限, 但对于幅值较小的振动, 可控制参数范围取值较宽。从图6可以看出, 当系统振动幅值较大, 控制参数 a_2 的绝对值需要比较大才能有效消除分岔现象, 但对于小振幅振动, 只需较

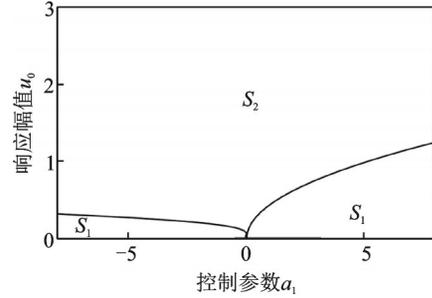


图5 主共振时参数 a_1 控制下系统鞍结分岔区域图

Fig.5 Saddle-node bifurcation region diagram of the system under the control of parameter a_1 in primary resonance

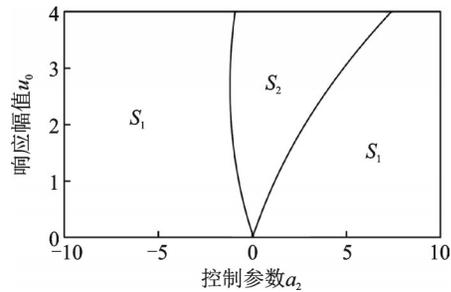


图6 主共振时参数 a_2 控制下系统鞍结分岔区域图

Fig.6 Saddle-node bifurcation region diagram of the system under the control of parameter a_2 in primary resonance

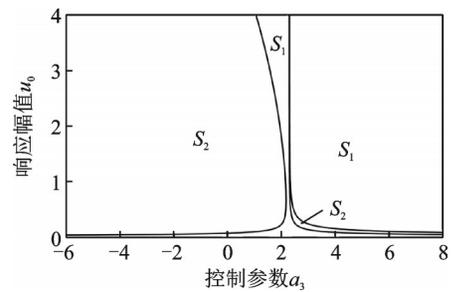


图7 主共振时参数 a_3 控制下系统鞍结分岔区域图

Fig.7 Saddle-node bifurcation region diagram of the system under the control of parameter a_3 in primary resonance

小的控制量就能控制系统的分岔。从图7可以看出, 控制参数 $a_3 \geq 2.17$ 时就能控制系统不同幅值的振动而不产生鞍结分岔现象。

3 控制效果仿真

对含控制的动力学方程(23)进行仿真研究, 采用谐波平衡法计算可得系统的幅频关系式与力传递率为

$$\left[\left(\frac{3}{4} (\beta - a_3) u_0^2 + (\alpha - a_1) - \Omega^2 \right) u_0 \right]^2 + \left[2u_0 \Omega \left(\zeta u_0^2 + \left(\xi - \frac{a_2}{2} \right) \right) \right]^2 = f_0^2 \quad (30)$$

$$T_f = 20\lg\left|\frac{f_1}{f_0}\right| = 20\lg\left[\frac{|u_0|}{f_0} \sqrt{\left(\frac{3}{4}(\beta - a_3)u_0^2 + (\alpha - a_1)\right)^2 + 4\Omega^2\left(\xi u_0^2 + \left(\xi - \frac{a_2}{2}\right)\right)^2}\right] \quad (31)$$

选定参数 $\zeta=0.05$ 、 $\xi=0.02$ 、 $\alpha=0.03$ 、 $\beta=2.289$ 、 $f_0=0.1$ ，通过仿真得到不同控制参数值 a_1 、 a_2 、 a_3 对系统的幅频曲线与力传递率以及鞍结分岔的影响。考虑不同控制参数 a_1 对系统的幅频曲线以及力传递率的影响，其他两个控制参数为 0，仿真结果分别如图 8、9 所示。从仿真结果可知，控制参数 a_1 越小，系统的幅频曲线的幅值越小，能够有效降低响应幅值与力传递率，但很难找到一个合适的参数消除分岔现象，只能使分岔点对应的频率变大，同时会使高频的隔振性能变差。因此，单独通过改变控制参数 a_1 很难达到控制效果。

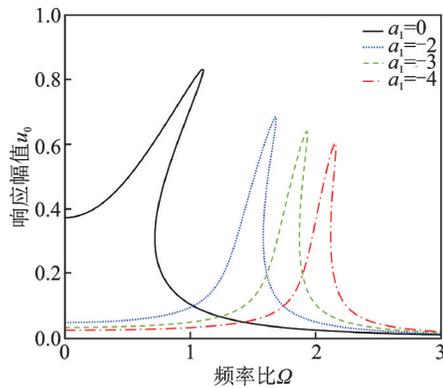


图 8 不同控制参数 a_1 的幅频响应曲线

Fig.8 Amplitude-frequency response curves of different control partameter a_1

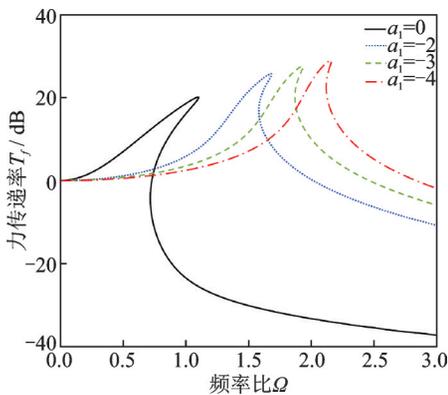


图 9 不同控制参数 a_1 的力传递率曲线

Fig.9 Force transmissibility curves of different control partameter a_1

考虑不同控制参数 a_2 对系统的幅频曲线以及力传递率的影响，其他两个控制参数为 0，仿真结果分别如图 10、11 所示。从仿真结果可知，控制参数 a_2 取值的绝对值越大，系统的幅频响应越小，能够有效消除分岔现象，但是较高频段系统的力传递率增大。因此需要选择合适的控制参数 a_2 才能达到消除分岔的同时改善隔振效果的目的。

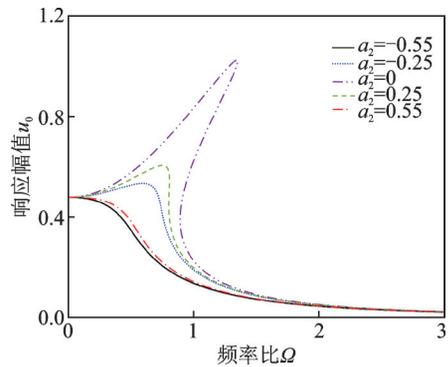


图 10 不同控制参数 a_2 的幅频响应曲线

Fig.10 Amplitude-frequency response curves of different control partameter a_2

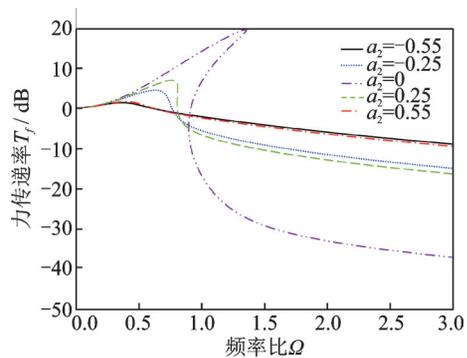


图 11 不同控制参数 a_2 的力传递率曲线

Fig.11 Force transmissibility curves of different control partameter a_2

考虑不同控制参数 a_3 对系统的幅频曲线以及力传递率的影响，其他两个控制参数为 0，仿真结果分别如图 12、13 所示。从仿真结果可知，控制参数 a_3 增大，均能够有效消除分岔现象。但 a_3 增大至某一值后，继续增大会反而使力传递率增大。因此选择合适的 a_3 才能更有效地改善隔振效果。

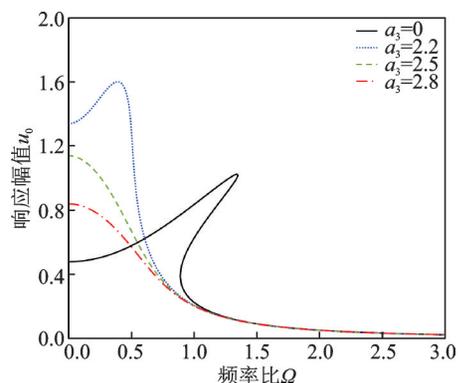


图 12 不同控制参数 a_3 的幅频响应曲线

Fig.12 Amplitude-frequency response curves of different control partameter a_3

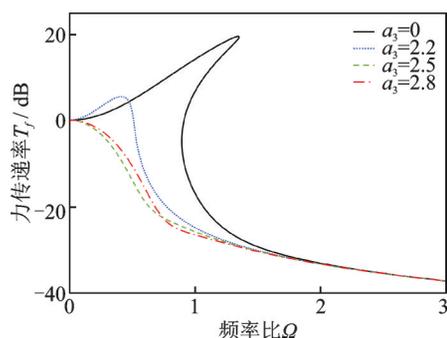


图13 不同控制参数 a_3 的力传递率曲线

Fig.13 Force transmissibility curves of different control parameter a_3

4 结 论

根据超稳隔振平台的应用需求建立环绕式侧向弹性支撑构成的准零刚度系统,通过静态特性分析获得系统的结构设计参数。进一步采用谐波平衡法求解简谐力激励下的动态响应规律,获得系统非线性幅频响应函数,形成非线性准零刚度隔振系统参数设计、动态特性理论研究方法。

进一步针对隔振系统的非线性动力学特性开展分岔控制方法研究,引入含有3个控制参数的非线性控制器,通过仿真获得系统响应幅值与不同控制参数鞍结分岔区域分布图以及不同控制参数对系统的幅频响应曲线与力传递率曲线的影响。结果表明,通过合理选择控制参数能够有效消除准零刚度系统的分岔现象,达到有效的振动抑制效果。

参考文献:

- [1] MOLYNEUX W. Supports for vibration isolation [M]. Great Britain: Aeronautical Research Council, 1957.
- [2] KOVACIC I, MICHAEL J, BRENNAN B, et al. On the resonance response of an asymmetric duffing oscillator [J]. International Journal of Non-linear Mechanics, 2008, 43(9): 858-867.
- [3] KOVACIC I, BRENNAN M J, LINETON B. Effect of a static force on the dynamic behaviour of harmonically excited quasi-zero stiffness system [J]. Journal of Sound and Vibration, 2009, 325(4): 870-883.
- [4] KOVACIC I, BRENNAN M J, WATERS T P. A study of a nonlinear vibration isolator with a quasi-zero stiffness characteristic [J]. Journal of Sound and Vibration, 2008, 315(3): 700-711.
- [5] 吴明亮,赵晨名,张来喜.准零刚度振动控制系统的研究进展[J].南京理工大学学报,2021,45(1):18-26. WU Mingliang, ZHAO Chenming, ZHANG Laixi. Research progress of quasi-zero stiffness vibration control system [J]. Journal of Nanjing University of Science and Technology, 2021, 45(1): 18-26.
- [6] 钱长照,唐驾时.一类非自治时滞反馈系统的分岔控制[J].物理学报,2006(2):617-621. QIAN Changzhao, TANG Jiashi. Bifurcation control for a non-autonomous system with two time delays [J]. Acta Physica Sinica, 2006(2): 617-621.
- [7] 蔡克红,李升.电力系统功角稳定鞍结分岔控制研究[J].南京工程学院学报,2009,7(3):23-27. CAI Kehong, LI Sheng. Research into saddle-node bifurcation control for improving power system angle stability [J]. Journal of Nanjing Institute of Technology, 2009, 7(3): 23-27.
- [8] 杨庆超,楼京俊,刘树勇,等.准零刚度隔振系统倍周期分岔研究[J].武汉理工大学学报(交通科学与工程版),2013,37(5):1022-1025. YANG Qingchao, LOU Jingjun, LIU Shuyong, et al. Study on period-doubling bifurcation of quasi-zero stiffness vibration isolation system [J]. Journal of Wuhan University of Technology (Transportation Science and Engineering), 2013, 37(5): 1022-1025.
- [9] 符文彬,唐驾时.强迫Duffing振动系统的主共振鞍结分岔控制[J].振动工程学报,2004(3):117-120. FU Wenbin, TANG Jiashi. Primary resonance saddle-node bifurcation control of forced duffing system [J]. Journal of Vibration Engineering, 2004(3): 117-120.
- [10] 胡海岩.应用非线性动力学[M].北京:航空工业出版社,2000. HU Haiyan. Applied nonlinear dynamics [M]. Beijing: Aviation Industry Press, 2000.
- [11] 唐驾时.非线性系统的分岔控制[M].北京:科学出版社,2016. TANG Jiashi. Bifurcation control in nonlinear systems [M]. Beijing: Science Press, 2016.

(编辑:夏道家)