

DOI:10.16356/j.1005-2615.2023.03.008

## 一种新的可重构三自由度平面并联机构的结构设计及运动学分析

王澍声<sup>1</sup>, 尤晶晶<sup>1,2</sup>, 黄宁宁<sup>1</sup>, 叶鹏达<sup>3</sup>, 李成刚<sup>2,4</sup>

(1.南京林业大学机械电子工程学院,南京 210037; 2.南京航空航天大学江苏省精密与微细制造技术重点实验室,南京 210016; 3.常州大学机械与轨道交通学院,常州 213016; 4.南京航空航天大学机电学院,南京 210016)

**摘要:**设计了一种新型的可变胞运动副,可用于实现 3-转动副转动副转动副 (Revolute-joint, revolute-joint, revolute-joint, RRR) 平面并联机构的重构,进而推导并验证了 R-R-R 和转动副移动副转动副 (Revolute-joint, prismatic-joint, revolute-joint, R-P-R) 两种模式下的运动学模型包括正解方程和逆解方程,可用于计算并联机构的奇异位形和工作空间。研究表明:所设计的可变胞运动副能够实现机构的重构功能;两种模式下的运动学正解算法一致,均为一元八次方程;R-R-R 型的运动学逆解为三个一元二次方程,R-P-R 型的运动学逆解可直接用两点间的距离公式表达。最后,通过虚拟样机实验,验证了运动学模型的正确性。

**关键词:** 并联机构; 变胞; 重构; 正向运动学; 反向运动学

**中图分类号:** TH112 **文献标志码:** A **文章编号:** 1005-2615(2023)03-0437-07

## Structural Design and Kinematic Analysis of a New Reconfigurable 3-DOF Planar Parallel Mechanism

WANG Shusheng<sup>1</sup>, YOU Jingjing<sup>1,2</sup>, HUANG Ningning<sup>1</sup>, YE Pengda<sup>3</sup>, LI Chenggang<sup>2,4</sup>

(1. College of Mechanical and Electronic Engineering, Nanjing Forestry University, Nanjing 210037, China; 2. Jiangsu Key Laboratory of Precision and Micro-manufacturing Technology, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing 210016, China; 3. School of Mechanical Engineering and Rail Transit, Changzhou University, Changzhou 213016, China; 4. College of Mechanical and Electrical Engineering, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing 210016, China)

**Abstract:** A new type of variable cell kinematic pair is designed, which can be used to realize the reconstruction of 3-revolute-joint, revolute-joint, revolute-joint (RRR) planar parallel mechanism. The kinematic models of R-R-R and revolute-joint, prismatic-joint, revolute-joint (R-P-R) modes are derived and verified, including forward and inverse solutions, which can be used to calculate the singular configuration and workspace of parallel mechanism. The research results show that the designed variable cell kinematic pair can realize the reconfiguration function of the mechanism. The forward kinematics algorithms in the two modes are consistent, both of which are unary eighth-order equations. The inverse kinematics solution of R-R-R type is three quadratic equations, and the inverse kinematics solution of R-P-R type can be expressed directly by the distance formula between two points. Finally, the correctness of the kinematic model is verified by the virtual prototype experiment.

**Key words:** parallel mechanism; metamorphic; reconfiguration; forward kinematics; inverse kinematics

**基金项目:** 国家自然科学基金(51405237); 国家留学基金(201908320035); 江苏省精密与微细制造技术重点实验室开放基金。

**收稿日期:** 2022-10-09; **修订日期:** 2022-12-11

**通信作者:** 尤晶晶, 男, 副教授, 硕士生导师, E-mail: youjingjing251010@126.com。

**引用格式:** 王澍声, 尤晶晶, 黄宁宁, 等. 一种新的可重构三自由度平面并联机构的结构设计及运动学分析[J]. 南京航空航天大学学报, 2023, 55(3): 437-443. WANG Shusheng, YOU Jingjing, HUANG Ningning, et al. Structural design and kinematic analysis of a new reconfigurable 3-DOF planar parallel mechanism[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2023, 55(3): 437-443.

并联机构种类繁多,不同种类的机构可应用于不同的场景,也可以根据工作的需要设计出专用的机构构型<sup>[1-2]</sup>。随之也带来一定的弊端,比如当工作需求发生变化时,原有机机构不再满足。为了解决这一问题,学者们提出了“可重构并联机构”的概念<sup>[3]</sup>。可重构并联机构继承了传统并联机构刚度大、精度高等特征,还可实现变自由度的功能,且对不同的工作需要适应性强,这就使其能够应用在更广泛的机器人、航空航天、军事和医疗设备等重要领域<sup>[4-5]</sup>。

重构可分为几何重构和拓扑重构<sup>[6]</sup>,前者指改变机构支链的尺寸或布置方位,后者指改变运动副的类型或序列。机构重构的模式有4种<sup>[7]</sup>,即转换运动副的驱动模式、对运动副施加几何约束、改变运动副轴线方向和锁合运动副。三自由度平面并联机构由3条闭环支链将动、静平台相连接<sup>[8]</sup>,其运动副之间的连接采用不同的形式可以组成多种驱动方式,例如转动副转动副转动副 (Revolute-joint, revolute-joint, revolute-joint, RRR)、转动副移动副转动副 (Revolute-joint, prismatic-joint, revolute-joint, RPR) 型等。文献[9-10]以对称型3-RRR并联机构为研究对象,均运用闭环约束法<sup>[11]</sup>构建了机构的正向运动学模型和反向运动学模型。文献[12]以3-RPR并联机构为研究对象,根据机构自身的几何特点求解出运动学反解和正解。文献[13]提出了一种2-移动副转动副转动副转动副 (Prismatic-joint, revolute-joint, revolute-joint, revolute-joint, PRRR)+ RRR 并联机器人的参数化模型,并以传动性能为目标,计算了静平台和动平台的最优尺寸。文献[14]设计了一种可重构3-RRR并联机构的结构模型并计算了运动学反解,但是所设计的结构只能实现两种简单构型之间的转换,并且没有建立重构前、后的正向运动学模型。

本文设计了一种新型的可变胞运动副,将其应用到传统的三自由度平面并联机构上,能够衍生出一种新型可重构三自由度平面并联机构。首先,通过可变胞运动副的组合可实现运动副的切换或锁合,从而实现3-RRR和3-RPR两种构型的转换,而且还能分别在这两种机构的状态下,实现几何重构。然后,建立这两种并联机构运动学模型。最后,通过虚拟实验验证数学模型的正确性。

## 1 结构设计

### 1.1 整体结构设计

所设计的可重构并联机构如图1所示,由正三角状静平台、动平台,驱动杆、从动杆以及可变胞运动副(图2)构成。可变胞运动副主要由紧固件和旋转件组成,它们通过螺栓、螺母配合,可作用在驱动

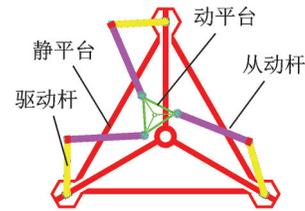


图1 可重构三自由度平面并联机构的结构模型

Fig.1 Structural model of reconfigurable 3-DOF planar parallel mechanism

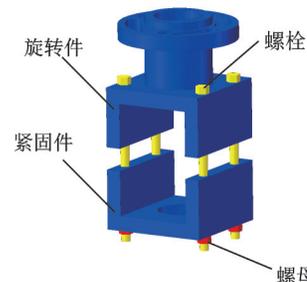


图2 可变胞运动副的结构模型

Fig.2 Structural model of variable cell motion pair

杆、从动杆以及静平台和动平台内部的结构上。

本机构中,可分别在静平台和驱动杆、驱动杆和从动杆以及从动杆和动平台的连接处安装可变胞运动副。为便于描述,将静平台和驱动杆的连接称为第1连接方式(如图3(a));驱动杆和从动杆的连接称为第2连接方式(如图3(b));从动杆和动平台的连接称为第3连接方式(如图3(c))。



(a) Schematic diagram of the first connection mode



(b) Schematic diagram of the second connection mode



(c) Schematic diagram of the third connection mode

图3 可变胞运动副的连接方式

Fig.3 Connection modes of variable cell kinematic pair

具体地,第1连接方式下,当螺栓和螺母紧配合时,可变胞运动副在静平台的位置上固定;当螺栓和螺母松配合时,可变胞运动副可以在静平台内部结构调整位置。可变胞运动副的旋转件和驱动杆上的旋转件配合使得可变胞运动副与驱动杆相互转动。当可变胞运动副与驱动杆的旋转件采用螺栓螺母配合时,可以使得两者相对静止,即锁合状态。第2连接方式下,两个可变胞运动副的旋转件配合使得两

个构件相互转动或锁合。一个可变胞运动副的旋转件和紧固件与驱动杆一端相连(图 3(b)),另一个可变胞运动副的旋转件和紧固件与从动杆一端相连(图 3(c))。在一个可变胞运动副中,当旋转件和紧固件之间的螺栓和螺母松配合时,驱动杆或者从动杆可以相对可变胞运动副移动。第 3 连接方式下,由于动平台和静平台结构相同,因此可变胞运动副与动平台的连接以及与从动杆的连接同第 1 连接方式。

1.2 可重构设计

在可变胞运动副的不同连接方式下,运动副状态也不同,如表 1 所示。

表 1 不同连接方式下运动副的状态(运动副位置可改变)  
Table1 State of the motion pair under different connection modes ( the position of the motion pair can be changed )

连接方式	第 1、3 连接方式	第 2 连接方式
运动副状态	转动/锁死	转动/锁死/移动

当机构的运动副均为转动副时,并联机构为 3-RRR 构型,如图 4 所示。当运用第 2 连接方式使驱动杆和从动杆之间的运动副变为移动副时,并联机构重构为 3-RPR 构型,如图 5 所示。

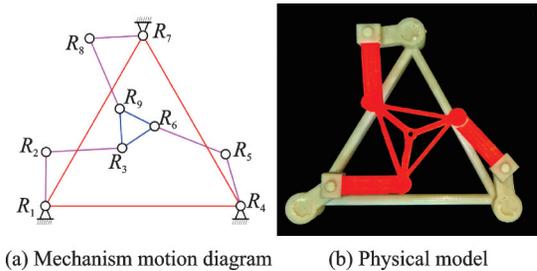


图 4 3-RRR 型并联机构

Fig.4 3-RRR parallel mechanism

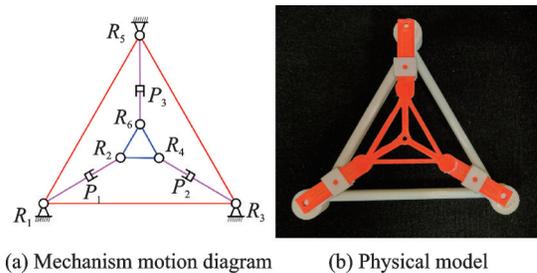


图 5 3-RPR 型并联机构

Fig.5 3-RPR parallel mechanism

$${}^oC = \begin{bmatrix} -\frac{r}{2} \cos \gamma + \frac{r}{2\sqrt{3}} \sin \gamma + X_p & \frac{r}{2} \cos \gamma + \frac{r}{2\sqrt{3}} \sin \gamma + X_p & -\frac{r}{\sqrt{3}} \sin \gamma + X_p \\ -\frac{r}{2} \sin \gamma - \frac{r}{2\sqrt{3}} \cos \gamma + Y_p & \frac{r}{2} \sin \gamma - \frac{r}{2\sqrt{3}} \cos \gamma + Y_p & \frac{r}{\sqrt{3}} \cos \gamma + Y_p \end{bmatrix} \quad (3)$$

根据两点间的距离公式,得到

$$\begin{cases} (x_{B_1} - x_{C_1})^2 + (y_{B_1} - y_{C_1})^2 = l_2^2 \\ (x_{B_2} - x_{C_2})^2 + (y_{B_2} - y_{C_2})^2 = l_2^2 \\ (x_{B_3} - x_{C_3})^2 + (y_{B_3} - y_{C_3})^2 = l_2^2 \end{cases} \quad (4)$$

2 运动学分析

2.1 重构前的运动学分析

2.1.1 坐标系建立

如图 6 所示,静平台的边长为  $R$ ,其中心点用  $O$  表示;动平台的边长为  $r$ ,其中心点用  $P$  表示。驱动杆  $A_1B_1$  杆长为  $l_1$ ,从动杆  $B_1C_1$  杆长为  $l_2$ 。 $O-XY$  为全局坐标系, $X$  轴平行于  $A_1A_2$ , $Y$  轴垂直于  $A_1A_2$ 。姿态角  $\gamma$  为  $X$  轴与  $C_1C_2$  逆时针方向的夹角。 $\alpha_i$  为驱动杆与  $A_1A_2$  的夹角。

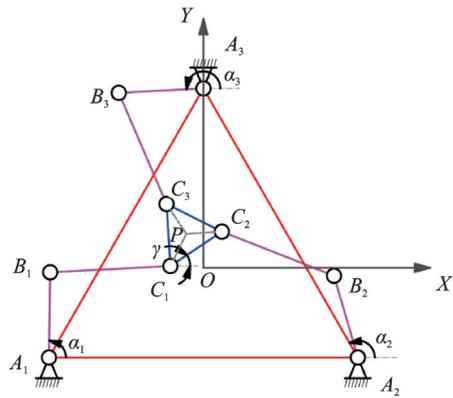


图 6 3-RRR 平面并联机构的参数表示

Fig.6 Parameters of 3-RRR planar parallel mechanism

2.1.2 运动学逆解

3-RRR 并联机构的运动学逆解是已知动平台的位姿( $X_p, Y_p, \gamma$ ),求解  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 。易知  $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$  和  $C_1, C_2, C_3$  的坐标为

$${}^oA = \begin{bmatrix} -\frac{R}{2} & \frac{R}{2} & 0 \\ -\frac{R}{2\sqrt{3}} & -\frac{R}{2\sqrt{3}} & \frac{R}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \quad (1)$$

$${}^oB = \begin{bmatrix} -\frac{R}{2} + l_1 \cos \alpha_1 & \frac{R}{2} + l_1 \cos \alpha_2 & l_1 \cos \alpha_3 \\ -\frac{R}{2\sqrt{3}} + l_1 \sin \alpha_1 & -\frac{R}{2\sqrt{3}} + l_1 \sin \alpha_2 & \frac{R}{\sqrt{3}} + l_1 \sin \alpha_3 \end{bmatrix} \quad (2)$$

将式(2,3)代入式(4),整理得

$$\begin{cases} E \cos \alpha_1 + F \sin \alpha_1 = K \\ G \cos \alpha_2 + H \sin \alpha_2 = L \\ I \cos \alpha_3 + J \sin \alpha_3 = M \end{cases} \quad (5)$$

式中

$$\begin{aligned}
 E &= -\frac{R}{2} + \frac{r}{2} \cos \gamma - \frac{r}{2\sqrt{3}} \sin \gamma - X_P \\
 F &= -\frac{R}{2\sqrt{3}} + \frac{r}{2} \sin \gamma + \frac{r}{2\sqrt{3}} \cos \gamma - Y_P \\
 G &= \frac{R}{2} - \frac{r}{2} \cos \gamma - \frac{r}{2\sqrt{3}} \sin \gamma - X_P \\
 H &= -\frac{R}{2\sqrt{3}} - \frac{r}{2} \sin \gamma + \frac{r}{2\sqrt{3}} \cos \gamma - Y_P \\
 I &= \frac{r}{\sqrt{3}} \sin \gamma - X_P \\
 J &= \frac{R}{\sqrt{3}} - \frac{r}{\sqrt{3}} \cos \gamma - Y_P \\
 K &= \frac{l_2^2 - l_1^2 - E^2 - F^2}{2l_1} \\
 L &= \frac{l_2^2 - l_1^2 - G^2 - H^2}{2l_1} \\
 M &= \frac{l_2^2 - l_1^2 - I^2 - J^2}{2l_1}
 \end{aligned}$$

令  $x_i = \tan \frac{\alpha_i}{2}$ , 则  $\sin \alpha_i = \frac{2x_i}{1+x_i^2}$ ,  $\cos \alpha_i =$

$\frac{1-x_i^2}{1+x_i^2}$ , 代入式(5)中可得

$$\begin{cases}
 (K+E)x_1^2 - 2Fx_1 + K - E = 0 \\
 (L+G)x_2^2 - 2Hx_2 + L - G = 0 \\
 (M+I)x_3^2 - 2Jx_3 + M - I = 0
 \end{cases} \quad (6)$$

由式(6)可以求出  $x_1, x_2$  和  $x_3$ , 再根据三角代换

可得  $\alpha_1, \alpha_2$  和  $\alpha_3$  为

$$\begin{cases}
 \alpha_1 = 2\arctan \frac{2F \pm \sqrt{\Delta_1}}{2(K+E)} \\
 \alpha_2 = 2\arctan \frac{2H \pm \sqrt{\Delta_2}}{2(L+G)} \\
 \alpha_3 = 2\arctan \frac{2J \pm \sqrt{\Delta_3}}{2(M+I)}
 \end{cases} \quad (7)$$

式中

$$\begin{aligned}
 \Delta_1 &= (-2F)^2 - 4(K+E)(K-E) \\
 \Delta_2 &= (-2H)^2 - 4(L+G)(L-G) \\
 \Delta_3 &= (-2J)^2 - 4(M+I)(M-I)
 \end{aligned}$$

### 2.1.3 运动学正解

3-RRR 并联机构的运动学正解是将  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  作为已知量, 求解动平台的位置姿态  $X_P, Y_P, \gamma$ 。根据  $C_3, P$  在  $O-XY$  坐标内的几何关系, 可以得  $C_3$  与  $P$  点之间的关系为

$$\begin{bmatrix} X_P \\ Y_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{C_3} + \frac{r}{\sqrt{3}} \sin \gamma \\ y_{C_3} - \frac{r}{\sqrt{3}} \cos \gamma \end{bmatrix} \quad (8)$$

根据  $C_1, C_2$  和  $C_3$  点的几何关系<sup>[15]</sup>, 可得

$$\begin{cases}
 x_{C_3} - r \cos(\frac{\pi}{3} + \gamma) = x_{C_1} \\
 y_{C_3} - r \sin(\frac{\pi}{3} + \gamma) = y_{C_1} \\
 x_{C_3} + r \cos(\frac{\pi}{3} - \gamma) = x_{C_2} \\
 y_{C_3} - r \sin(\frac{\pi}{3} - \gamma) = y_{C_2}
 \end{cases} \quad (9)$$

将式(2,3,9)代入式(4)求得

$$\begin{cases}
 (K' - x_{C_3})^2 + (L' - y_{C_3})^2 = l_2^2 \\
 (M' - x_{C_3})^2 + (N' - y_{C_3})^2 = l_2^2 \\
 (x_{B_3} - x_{C_3})^2 + (y_{B_3} - y_{C_3})^2 = l_2^2
 \end{cases} \quad (10)$$

式中

$$\begin{aligned}
 K' &= x_{B_1} + r \cos(\frac{\pi}{3} + \gamma), L' = y_{B_1} + r \sin(\frac{\pi}{3} + \gamma) \\
 M' &= x_{B_2} - r \cos(\frac{\pi}{3} - \gamma), N' = y_{B_2} + r \sin(\frac{\pi}{3} - \gamma)
 \end{aligned}$$

求解式(10)可得

$$\begin{cases}
 x_{C_3} = \frac{TO - QR}{SQ - PT} \\
 y_{C_3} = \frac{PR - SO}{SQ - PT}
 \end{cases} \quad (11)$$

式中

$$\begin{aligned}
 O &= K'^2 - M'^2 + L'^2 - N'^2 \\
 P &= 2M' - 2K' \\
 Q &= 2N' - 2L' \\
 R &= K'^2 - x_{B_3}^2 + L'^2 - y_{B_3}^2 \\
 S &= 2x_{B_3} - 2K' \\
 T &= 2y_{B_3} - 2L'
 \end{aligned}$$

令  $t = \tan \frac{\gamma}{2}$ , 则  $\sin \gamma = \frac{2t}{1+t^2}$ ,  $\cos \gamma = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ ,

式(11)可等效成

$$\begin{cases}
 x_{C_3} = \frac{X_0 + X_1 t + X_2 t^2 + X_3 t^3 + X_4 t^4}{Z_0 + Z_1 t + Z_2 t^2 + Z_3 t^3 + Z_4 t^4} \\
 y_{C_3} = \frac{Y_0 + Y_1 t + Y_2 t^2 + Y_3 t^3 + Y_4 t^4}{Z_0 + Z_1 t + Z_2 t^2 + Z_3 t^3 + Z_4 t^4}
 \end{cases} \quad (12)$$

式中  $X_i, Y_i$  和  $Z_i$  均与已知量有关。

将式(12)代入式(4)中的第3个式子并展开, 可得

$$f_1(t, t^2, t^3, t^4, t^5, t^6, t^7, t^8) = 0 \quad (13)$$

式(13)为关于  $t$  的一元八次方程,求解该方程可得  $\gamma$  的解为

$$\gamma_i = 2\arctan t_i \quad (14)$$

将  $\gamma$  代入式(12)可得  $C_3$  点坐标,将  $\gamma$  和  $C_3$  点坐标代入式(8)可得  $P$  点坐标,具体的计算流程如图 7 所示。

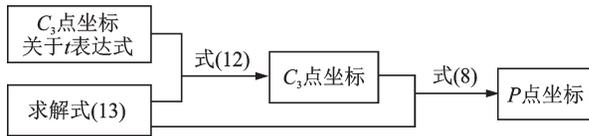


图 7 运动学正解的求解流程

Fig.7 Solving process of forward kinematics

## 2.2 重构后的运动学分析

### 2.2.1 构型描述

所有支链中驱动杆和从动杆共线形成了一个移动副(驱动副)。如图 8 所示,机构重构后与重构前的静平台、动平台参数以及坐标系均一致。另外,将驱动杆  $A_iC_i$  长度记为  $l_{A_iC_i}$ 。

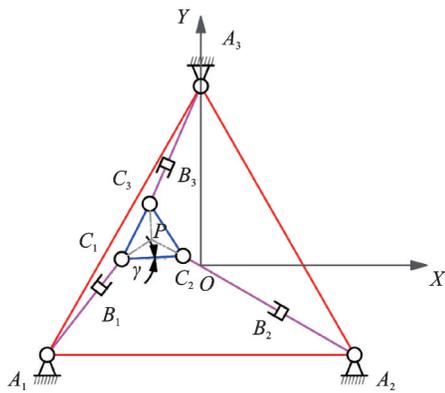


图 8 3-RPR 平面并联机构的参数表示

Fig.8 Parameters of 3-RPR planar parallel mechanism

### 2.2.2 运动学逆解

3-RPR 并联机构的运动学逆解是已知  $X_P, Y_P, \gamma$ , 求解  $l_{A_iC_i}$ 。由机构几何关系可得

$$\begin{cases} l_{A_1C_1}^2 = (x_{A_1} - x_{C_1})^2 + (y_{A_1} - y_{C_1})^2 \\ l_{A_2C_2}^2 = (x_{A_2} - x_{C_2})^2 + (y_{A_2} - y_{C_2})^2 \\ l_{A_3C_3}^2 = (x_{A_3} - x_{C_3})^2 + (y_{A_3} - y_{C_3})^2 \end{cases} \quad (15)$$

将  $A_1, A_2, A_3$  的坐标和  $C_1, C_2, C_3$  的坐标代入式(15)中,可得到驱动杆  $A_iC_i$  杆长。

### 2.2.3 运动学正解

3-RPR 并联机构的运动学正解是已知  $l_{A_iC_i}$ , 求解  $X_P, Y_P, \gamma$ 。根据两点间的距离公式,列出点  $A_i$  和点  $C_i (i=1, 2, 3)$  之间的距离公式

$$\begin{cases} (x_{A_1} - x_{C_1})^2 + (y_{A_1} - y_{C_1})^2 = l_{A_1C_1}^2 \\ (x_{A_2} - x_{C_2})^2 + (y_{A_2} - y_{C_2})^2 = l_{A_2C_2}^2 \\ (x_{A_3} - x_{C_3})^2 + (y_{A_3} - y_{C_3})^2 = l_{A_3C_3}^2 \end{cases} \quad (16)$$

将式(1, 3, 9)代入式(16)求得

$$\begin{cases} (K'' - x_{C_3})^2 + (L'' - y_{C_3})^2 = l_{A_1C_1}^2 \\ (M'' - x_{C_3})^2 + (N'' - y_{C_3})^2 = l_{A_2C_2}^2 \\ (x_{A_3} - x_{C_3})^2 + (y_{A_3} - y_{C_3})^2 = l_{A_3C_3}^2 \end{cases} \quad (17)$$

式中  $K'', L'', M''$  和  $N''$  均与已知量有关。

先求出  $C_3$  点的坐标,再将  $C_3$  点的坐标代入式(16)中的第 3 个式子可得

$$f_2(t, t^2, t^3, t^4, t^5, t^6, t^7, t^8) = 0 \quad (18)$$

式(18)也为一元八次方程,求解该方程可得  $\gamma$  的解,剩下的求解流程与重构前的相同。

## 3 数值算例

### 3.1 重构前的运动学仿真

设置重构前的并联机构结构参数为  $R=400$  mm,  $r=200$  mm,  $l_1=150$  mm,  $l_2=120$  mm。在 ADAMS 中建立 3-RRR 型并联机构的虚拟样机,如图 9 所示。任意选取动平台的运动状态 3 组数据进行数值计算与虚拟样机仿真,结果如表 2 所示。表 2 的结果显示运动学逆解模型的最大相对误

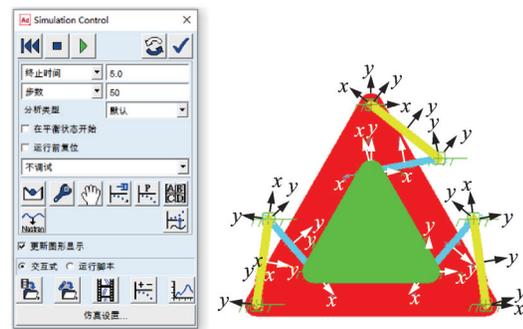


图 9 3-RRR 平面并联机构的虚拟样机

Fig.9 Virtual prototype of 3-RRR planar parallel mechanism

表 2 运动学逆解 I

Table 2 Inverse kinematics solution I

$X_P, Y_P, \gamma$	$\alpha_1$			$\alpha_2$			$\alpha_3$		
	理论值/(°)	实验值/(°)	误差/%	理论值/(°)	实验值/(°)	误差/%	理论值/(°)	实验值/(°)	误差/%
0, 0, 0	81.776 8	81.778 6	0.002	98.223 2	98.221 4	0.002	-38.223 2	-38.223 7	0.001
5, 5, 0	81.921 0	81.917 5	0.004	94.632 2	94.634 8	0.003	-35.198 6	-35.199 1	0.001
10, 10, 0	81.860 6	81.852 2	0.010	90.998 7	91.006 5	0.009	-32.028 6	-32.029 1	0.002

差为0.01%，这验证了运动学逆解模型的正确性。将表2的实验数据代入式(8~14)中，计算 $X_P, Y_P, \gamma$ 。当输入 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 时，动平台的位置姿态可以求出8组解，其中只有1组解在机构的工作空间范围内，而其他7组不在范围内故而舍去，如表3所示。

表3 运动学正解的理论计算结果

Table 3 Theoretical calculation results of forward kinematics

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 / (^\circ)$	$X_P, Y_P, \gamma$
81.778 6, 98.221 4, -38.223 7	0, 0.012 7, 0
81.917 5, 94.634 8, -35.199 1	5.001 8, 4.998 1, 0
81.852 2, 91.006 5, -32.029 1	10.002 8, 9.976 5, 0

表2和表3的结果验证了运动学正解模型的正确性。

表4 运动学逆解II

Table 4 Inverse kinematics solution II

$X_P, Y_P, \gamma$	$l_{A_1C_1}$			$l_{A_2C_2}$			$l_{A_3C_3}$		
	理论值/mm	实验值/mm	误差/%	理论值/mm	实验值/mm	误差/%	理论值/mm	实验值/mm	误差/%
0, 0, 0	115.470 1	115.467 5	0.002	115.470 1	115.467 5	0.002	115.470 1	115.467 5	0.002
5, 5, 0	122.313 9	122.311 3	0.002	113.845 0	113.842 2	0.002	110.583 1	110.583 1	0.000
10, 10, 0	129.182 2	129.179 5	0.002	112.641 2	112.638 2	0.002	105.943 1	105.943 0	0.001

表4的结果显示运动学逆解模型的最大相对误差为0.002%，这验证了运动学逆解模型的正确性。将表4的实验数据代入运动学正解模型，式(16~18)中，计算 $X_P, Y_P, \gamma$ 。当输入 $l_{A_1C_1}, l_{A_2C_2}, l_{A_3C_3}$ 时，动平台的位姿可以求出8组解，其中只有1组解在机构的工作空间范围内，而其他7组不在范围内故而舍去，如表5所示。表4和表5的结果验证了运动学正解模型的正确性。

表5 运动学正解的理论计算结果

Table 5 Theoretical calculation results of forward kinematics

$l_{A_1C_1}, l_{A_2C_2}, l_{A_3C_3} / \text{mm}$	$X_P, Y_P, \gamma$
115.467 5, 115.467 5, 115.467 5	0, -0.011 4, 0
122.311 3, 113.842 2, 110.583 1	5, 4.996 7, 0
129.179 5, 112.638 2, 105.943 0	9.999 8, 9.996 5, 0

## 4 结 论

设计了一种可变胞运动副，可实现三自由度平面并联机构的拓扑重构，并构建了机构在重构前、后的运动学模型。具体地：

(1) 实现了3-RRR和3-RPR两种拓扑构型之间的切换。除此之外，通过运动副的其他变胞方式，还可实现3-RRR与3-RRP、3-RPP、3-PRR、

## 3.2 重构后的运动学仿真

在ADAMS中建立3-RPR平面并联机构的虚拟样机，如图10所示。任意选取动平台的运动状态3组数据进行数值计算与虚拟样机仿真，结果如表4所示。

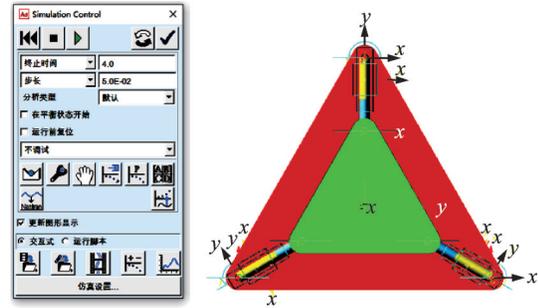


图10 3-RPR平面并联机构的虚拟样机

Fig.10 Virtual prototype of 3-RPR planar parallel mechanism

3-PPR、3-PRP之间的构型切换。

(2) 3-RRR平面并联机构的正运动学方程为1个一元八次方程，存在封闭解；逆运动学方程为3个一元二次方程，具有解析解。

(3) 3-RPR平面并联机构的正运动学方程为1个一元八次方程，存在封闭解，与3-RRR的正解算法完全一致，这有利于程式化处理；逆运动学方程具有解析解。

(4) 两种构型运动学的理论推导结果与虚拟样机实验结果均一致，验证了运动学模型的正确性。

## 参考文献：

[1] 尤晶晶, 严飞, 周为, 等. 压电驱动式台体型并联机构的位置正解研究[J]. 压电与声光, 2017, 39(6): 829-833.  
 YOU Jingjing, YAN Fei, ZHOU Wei, et al. Research on the forward position solution of piezoelectric driven platform parallel mechanism[J]. Piezoelectrics & Acoustooptics, 2017, 39(6): 829-833.  
 [2] YOU J J, XI F F, SHEN H P, et al. A novel stewart-type parallel mechanism with topological reconfiguration: Design, kinematics and stiffness evaluation[J]. Mechanism and Machine Theory, 2021, 162: 104329.

- [3] YE W, FANG Y F, GUO S, et al. Two classes of reconfigurable parallel mechanisms constructed with multi-diamond kinematotropic chain[J]. Proc IMechE Part C: J Mechanical Engineering Science, 2016, 230(18): 3319-3330.
- [4] YOU J J, WANG L K, XI F F, et al. Decoupling algorithm and maximum operation frequency of a novel parallel type six-axis accelerometer[J]. IEEE Sensors Journal, 2020, 20(21): 12637-12651.
- [5] WANG M X, CHEN Q S, LIU H T, et al. Evaluation of the kinematic performance of a 3-RRS parallel mechanism[J]. Robotica, 2021, 39(4): 606-617.
- [6] 徐帅, 尤晶晶, 沈惠平, 等. 一种可重构并联机构的拓扑特性分析[J]. 南京师大学报(自然科学版), 2021, 44(4): 7-16.  
XU Shuai, YOU Jingjing, SHEN Huiping, et al. Topological characteristic analysis of a reconfigurable parallel mechanism[J]. Journal of Nanjing Normal University(Natural Science Edition), 2021, 44(4): 7-16.
- [7] GAN D M, DIAS J, SENE CIRATNE L. Unified kinematics and optimal design of a 3rRPS metamorphic parallel mechanism with a reconfigurable revolute joint[J]. Mechanism and Machine Theory, 2016, 25(96): 239-254.
- [8] 朱大昌, 冯文结, 安梓铭. 整体式平面三自由度全柔顺并联机构构型拓扑优化设计[J]. 机械工程学报, 2015, 51(5): 30-36.  
ZHU Dachang, FENG Wenjie, AN Ziming. Topology optimization design of integral planar three-degree of freedom fully compliant parallel mechanism[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2015, 51(5): 30-36.
- [9] OZDEMIR M. Hypersingularities of 3-RRR planar parallel robots[J]. Proceedings of the Romanian Academy, Series A, 2021, 22(4): 353-360.
- [10] YAO S, LI H, ZENG L, et al. Vision-based adaptive control of a 3-RRR parallel positioning system[J]. Science China—Technological Sciences, 2018, 61(8): 1253-1264.
- [11] 罗建国, 王婷, 聂高兴, 等. 3-RRR 并联机构 SolidWorks 和 MATLAB 运动学仿真分析[J]. 机械设计与制造工程, 2021, 50(3): 19-22.  
LUO Jianguo, WANG Ting, NIE Gaoxing, et al. Kinematics simulation analysis of 3-RRR parallel mechanism based on solidworks and MATLAB[J]. Machine Design and Manufacturing Engineering, 2021, 50(3): 19-22.
- [12] DING J Z, WANG C J. Error modeling and singularity analysis of planar parallel mechanisms using optimized expression of joint clearances and link deformation[J]. Proc IMechE Part C: J Mechanical Engineering Science, 2021, 235(22): 6219-6227.
- [13] 邹琦, 曲海波, 郭盛. 一种三自由度可重构并联机构优化设计及性能分析[J]. 中国机械工程, 2018, 29(10): 1172-1178.  
ZOU Qi, QU Haibo, GUO Sheng. Optimization design and performance analysis of a three-freedom reconfigurable parallel mechanism[J]. China Mechanical Engineering, 2018, 29(10): 1172-1178.
- [14] 徐帅, 尤晶晶, 叶鹏达, 等. 一种可重构 3-RRR 平面并联机构及其工作空间分析[J]. 南京航空航天大学学报, 2022, 54(3): 466-472.  
XU Shuai, YOU Jingjing, YE Pengda, et al. A reconfiguration 3-RRR planar parallel mechanism and its workspace analysis[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2022, 54(3): 466-472.
- [15] 李庠, 李瑞琴, 李辉, 等. 可重构单驱动 3-RRR 平面并联机构连杆曲线与姿态的数值解法[J]. 兵工学报, 2021, 42(5): 1074-1082.  
LI Xiang, LI Ruiqin, LI Hui, et al. Numerical solution of link curve and attitude of reconfigurable single-drive 3-RRR planar parallel mechanism[J]. Acta Armamentarii, 2021, 42(5): 1074-1082.

(编辑: 陈琚)