

DOI:10.16356/j.1005-2615.2023.01.007

基于应变能动态聚类的梯度点阵结构优化设计

梁有鹏¹, 徐亮¹, 钱征华^{1,2}

(1. 南京航空航天大学航空学院, 南京 210016;

2. 南京航空航天大学机械结构力学及控制国家重点实验室, 南京 210016)

摘要: 为了优化具有空间渐变几何特点的梯度点阵结构, 促使有限材料在宏观结构中实现合理分布, 提出结合动态聚类的两尺度并发拓扑优化方法。在整个优化过程中, 微结构分区方式可以通过 K-means 聚类方法基于当前的宏观单元应变能进行聚类更新, 获得比静态分区更为合理的微结构分布方式; 并引入微结构转角变量, 根据结构主应力方向来布置微结构转角, 获得更为合理的宏观结构传力路径。数值算例表明, 相较于传统指定材料区域的静态分区方法, 该方法可以更为有效地进行材料分布, 充分利用材料的各向异性, 提升结构性能。

关键词: 梯度点阵结构; 拓扑优化; 动态聚类; K-means 方法; 映射方法

中图分类号: O34 文献标志码: A 文章编号: 1005-2615(2023)01-0058-09

Optimization Design of Graded Lattice Structures Based on Dynamic Strain Energy Clustering

LIANG Youpeng¹, XU Liang¹, QIAN Zhenghua^{1,2}

(1. College of Aerospace Engineering, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing 210016, China;

2. State Key Laboratory of Mechanics and Control of Mechanical Structures, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing 210016, China)

Abstract: To optimize graded lattice structures with spatially graded geometrical characteristics and promote the rational distribution of finite materials in macrostructure, a two-scale concurrent topology optimization method combining dynamic clustering is proposed. Dynamic clustering strategy is developed to group microstructures, which means that the clustering pattern will be updated according to the current strain energy during the whole iterations and obtains a more reasonable microstructures' distribution than the static partition. Further, rotational degree of freedom is introduced to make sure that the microstructures are oriented along principal stress directions, so as to obtain a more reasonable load transfer path. Numerical examples show that, compared with the traditional static partition method, this method can more effectively distribute materials, make full use of the anisotropic of lattice structures, and improve structural performance.

Key words: graded lattice structure; topology optimization; dynamic clustering; K-means method; mapping method

点阵结构是由某种代表性单胞在空间中重复排列而形成的一种周期性结构, 可以展现出某些卓越的力学性能和物理功能(如轻质、高比强度/刚

度、负泊松比、光学/声学隐身、能量吸收等), 在力学、热学、电磁学、声学、医学和航空航天等领域有着广泛的应用^[1-6]。近年来快速发展的增材制造技

基金项目: 国家自然科学基金(12061131013, 12172171, 12211530064); 国家自然科学基金创新群体项目(51921003); 机械结构力学及控制国家重点实验室自主课题(MCMS-I-0522G01); 江苏省自然科学基金(BK20211176)。

收稿日期: 2022-01-03; **修订日期:** 2022-03-23

通信作者: 钱征华, 男, 教授, 博士生导师, E-mail: qianzh@nuaa.edu.cn。

引用格式: 梁有鹏, 徐亮, 钱征华. 基于应变能动态聚类的梯度点阵结构优化设计[J]. 南京航空航天大学学报, 2023, 55(1): 58-66. LIANG Youpeng, XU Liang, QIAN Zhenghua. Optimization design of graded lattice structures based on dynamic strain energy clustering[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2023, 55(1): 58-66.

术为复杂点阵结构的实际制造提供了可能,这也进一步刺激和促进了相关研究。相较于传统的微结构呈周期性排列的周期点阵结构,微结构构型在空间中不断变化的梯度点阵结构享有更大的设计自由度和更多样的材料分布方式,正逐渐成为拓扑优化领域新的研究热点之一。由于其具有跨尺度及空间渐变的几何特点,目前梯度点阵结构的设计仍然是一项具有挑战性的任务。

Bendsøe等^[7]针对结构最小柔顺性问题提出了均匀化方法,首次将复合材料描述引入多尺度结构优化中,相较于变密度法(Solid isotropic material with penalization, SIMP)所采用的材料/空隙描述方式,逐点变化的复合材料描述方式可以保留更多的物理信息,在相对粗糙的网格划分基础上即可实现复杂结构设计的描述。Rodrigues等^[8]提出了一种层级优化策略,同时优化复合材料的宏观结构布局和微观材料拓扑,获得微结构处处不同的两尺度结构设计,但该方法计算量极大且无法保证微结构之间的连接性,优化结果难以实际制造,限制了该方法的广泛应用。针对点阵结构的两尺度优化设计,考虑点阵结构的实际制造性,Liu等^[9]提出了各向异性多孔材料惩罚模型(Porous anisotropic material with penalty, PAMP),假设整个宏观结构中只存在一种微结构单胞,将原有的两尺度优化问题解耦成两个单尺度优化问题,实现宏、微观两尺度并发拓扑优化。该方法被进一步成功应用到多尺度结构的基频最大化问题^[10]、多尺度结构热力学耦合问题^[11]。另一方面,单一微结构假设也极大地缩减了设计空间,对此一种常见的改进策略是,参照某种准则对宏观结构进行分区,假设每个区域内分布同一种微结构单胞,以达到实现平衡设计空间和计算量的目的。Zhang等^[12]以最小柔顺性为目标函数,结合两个新颖的体积约束函数实现了按空间位置分区的两尺度并发拓扑优化。Xu等^[13]选取主应力方向作为分区准则,结合离散材料方法研究了最小柔顺性点阵结构设计的两尺度并发拓扑优化问题。Jia等^[14]结合元胞自动机和聚类方法选取单元应变能作为分区准则,提出一种针对非均匀点阵结构的两尺度优化框架,实现宏观结构和微结构单胞的并发拓扑优化。Qiu等^[15]提出一种结合动态聚类策略的两尺度并发拓扑优化方法,根据优化过程中宏观单元内的主应力方向和主应力比值实现自主分区,获得性能优异的两尺度优化设计。Kumar等^[16]在变厚度优化设计的基础上首先结合密度和主应变比值进行静态聚类分区,然后进行微

结构优化并通过映射方法获得精细的梯度点阵结构。

本文针对梯度点阵结构最小柔顺性问题,引入动态分区策略,在优化过程中通过K-means聚类方法结合实时的应变能分布情况逐渐调整微结构分区方式,实现材料合理分配,并引入微结构转角变量,使微结构取向与主应力方向一致,充分利用点阵材料的各向异性,提升结构性能。

1 设计变量及材料插值模型

如图1(a)所示的两尺度结构示意图,宏观设计域 Ω 划分成 r 个区域 $\Omega_1, \dots, \Omega_r$,每个区域中分布同一类型的微结构。

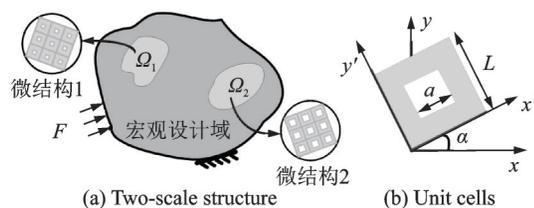


图1 两尺度优化示意图

Fig.1 Schematic of two-scale optimization

为了描述宏观单元内部是否存在微结构,定义宏观设计变量为

$$P = \{P_1, \dots, P_N\}^T \quad (1)$$

式中: N 为宏观单元数目; P_i 为第 i 个宏观单元的宏观设计变量,当 $P_i = 1$ 时表示该单元中存在微结构, $P_i = 0$ 时表示不存在微结构。

如图1(b)所示,本文选取内部具有方形孔洞的微结构类型作为待优化微结构,这类微结构的具体构型可以通过其体积分数确定,故选取微结构体积分数作为微观设计变量

$$\rho = \{\rho_1, \dots, \rho_r\} \quad (2)$$

式中: r 为微结构种类数目, ρ_i 为第 i 种微结构的体积分数。

综上两尺度优化设计变量 d 为

$$d^T = \{P^T, \rho^T\}^T = \{P_1, \dots, P_N, \rho_1, \dots, \rho_r\}^T \quad (3)$$

宏、微观设计变量之间互相独立,两种设计变量之间通过微结构等效性质相互关联。

本文采用渐近均匀化方法新数值求解算法(New implementation of asymptotic homogenization, NIAH)求解微结构等效性质^[17]。逐步改变微结构内部孔洞的尺寸参数,计算不同体积分数下微结构的等效性质,获得微结构等效性质关于体积分数的插值曲线 $D^H(\rho)$,第 i 种微结构的等效性质 D_i^H 可以由其体积分数 ρ_i 确定。

$$D_i^H = D^H(\rho_i) \quad (4)$$

微结构等效性质关于微观设计变量的灵敏度 $\partial D^H(\rho)/\partial \rho$ 通过差分法计算。

宏观单元弹性张量通过改进的 PAMP 方法计算

$$D_i^{MA} = [(1 - \epsilon)P_i^3 + \epsilon] D_{g(i)}^H \quad (5)$$

式中: ϵ 取 10^{-6} 来避免总刚度矩阵奇异; $D_{g(i)}^H$ 为第 i 个宏观单元所对应类型微结构的等效性质; $g(i)$ 为宏观单元和微结构种类之间的对应关系, 表明第 i 个宏观单元中分布的是第 $g(i)$ 种微结构, 宏观单元和微结构种类之间的具体对应关系通过 K-means 聚类方法来确定。

为了充分利用点阵材料的各向异性, 进一步扩大设计空间, 考虑添加微结构的旋转自由度。设第 i 个宏观单元内的微结构旋转角度为 α_i , 则第 i 个宏观单元的弹性张量矩阵表示为 $Q(\alpha_i)^T D_i^{MA} Q(\alpha_i)$, $Q(\alpha_i)$ 为相应的旋转矩阵

$$Q(\alpha_i) = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha_i & \sin^2 \alpha_i & \sin(2\alpha_i) \\ \sin^2 \alpha_i & \cos^2 \alpha_i & -\sin(2\alpha_i) \\ -\sin(2\alpha_i)/2 & \sin(2\alpha_i)/2 & \cos(2\alpha_i) \end{bmatrix} \quad (6)$$

Pedersen^[18] 针对具有极端应变能密度的正交各向异性复合材料的取向问题进行了研究, 证明在给定位移场下正交各向异性复合材料的最佳取向同主应力方向一致, 故本文在优化过程中使用宏观单元主应力方向 θ_i 代替微结构旋转角 α_i 。

2 优化列式及灵敏度分析

选取最小化结构柔顺性为目标函数

$$C(d, U) = U^T K U \quad (7)$$

式中: U 为宏观结构的节点位移向量; K 为宏观结构的总刚度矩阵。

通过一组平均体积率约束和宏观覆盖率约束来实现有限材料在各种微结构中自主分配用量的目的。为了控制材料的实际使用量, 构造平均体积率约束

$$G_{\text{avc}}: \sum_{i=1}^N P_i \rho_{g(i)} V_i - f_{\text{avc}} \sum_{i=1}^N V_i \leq 0 \quad (8)$$

式中: $\rho_{g(i)}$ 表示第 i 个宏观单元所对应类型微结构的体积分数; V_i 为第 i 个宏观单元的体积; f_{avc} 为平均体积率。

为了避免最终优化结果退变成 SIMP 法的单尺度优化结果, 构造宏观覆盖率约束来控制宏观结构中点阵材料的覆盖面积

$$G_{\text{scc}}: \sum_{i=1}^N P_i V_i - f_{\text{scc}} \sum_{i=1}^N V_i = 0 \quad (9)$$

式中 f_{scc} 为宏观覆盖率。该等式约束可以由两组不等式约束近似

$$\begin{aligned} G_{\text{scc_low}}: \sum_{i=1}^N P_i V_i - f_{\text{scc_low}} \sum_{i=1}^N V_i &\geq 0 \\ G_{\text{scc_up}}: f_{\text{scc_up}} \sum_{i=1}^N V_i - \sum_{i=1}^N P_i V_i &\geq 0 \end{aligned} \quad (10)$$

式中: $f_{\text{scc_low}}$ 为宏观覆盖率下限; $f_{\text{scc_up}}$ 为宏观覆盖率上限。宏观覆盖率表示点阵材料覆盖区域面积占结构总面积的比值, 故式(9)中的宏观设计变量对应于点阵材料区域的宏观单元。当微观设计变量下界 $\rho_{\min} = 0$ 时, 宏观设计变量 P_i 只能表征第 i 个宏观单元中是否存在第 $g(i)$ 种微结构, 无法判断第 $g(i)$ 种微结构是否是空材料相。设计变量 $P_i = 0$ 或 $\rho_i = 0$ 均可控制宏观结构拓扑改变, 将导致宏观覆盖率约束失效, 无法控制点阵材料覆盖的区域面积, 最终导致所有类型微结构都演化为实体材料相或空材料相, 呈现如同 SIMP 法的单尺度优化结果; 当微观设计变量下界 $\rho_{\min} > 0$ 时, 宏观结构拓扑变化只能通过宏观设计变量 $P_i = 0$ 实现, 故宏观设计变量 P_i 具有明确的物理意义: 第 i 个宏观单元中是否存在第 $g(i)$ 种点阵材料(微结构体积分数不为 0)。

为了使得宏观设计变量达到 0-1 分明, 构造一个显式的材料分明约束

$$G_{0-1}: \frac{4}{N} \sum_{i=1}^N P_i (1 - P_i) - f_{0-1} \leq 0 \quad (11)$$

式中 f_{0-1} 为一极小量, 为了避免目标函数在优化过程的初期就陷入局部最优解中, 采用连续化策略逐渐降低 f_{0-1} 的值, 直至达到一极小值。

综上, 该最小柔顺性问题优化列式为

$$\begin{aligned} \min_d \quad & C = U^T K U \\ \text{s.t.} \quad & K U = F \\ & \sum_{i=1}^N P_i \rho_{g(i)} V_i - f_{\text{avc}} \sum_{i=1}^N V_i \leq 0 \\ & \sum_{i=1}^N P_i V_i - f_{\text{scc_low}} \sum_{i=1}^N V_i \geq 0 \\ & f_{\text{scc_up}} \sum_{i=1}^N V_i - \sum_{i=1}^N P_i V_i \geq 0 \\ & \frac{4}{N} \sum_{i=1}^N P_i (1 - P_i) - f_{0-1} \leq 0 \\ & 0 \leq P_i \leq 1, 0 < \rho_{\min} \leq \rho_i \leq 1 \end{aligned} \quad (12)$$

为了避免棋盘格现象和中间灰度单元等数值问题, 在优化过程中使用线性密度过滤方法^[19] 和非线性密度过滤方法^[20] 处理宏观设计变量, 结合

移动渐近线法^[21]更新设计变量。

目标函数 C 关于宏观物理密度 \tilde{P} 和微观设计变量 ρ 的灵敏度为

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial \tilde{P}_i} &= \frac{\partial}{\partial \tilde{P}_i} (U^T K U) = - \left(\sum_{j=1}^N U_j^T \frac{\partial K e_j}{\partial \tilde{P}_i} U_j \right) = \\ 3(1-\epsilon) \tilde{P}_i^2 U_i^T \int B^T Q(\theta_i)^T D_{g(i)}^H Q(\theta_i) B dv U_i \frac{\partial C}{\partial \rho_i} &= \\ \frac{\partial}{\partial \rho_i} (U^T K U) &= - \left(\sum_{j=1}^N U_j^T \frac{\partial K e_j}{\partial \rho_i} U_j \right) = \\ \sum_{\{j|g(j)=i\}} \left([(1-\epsilon) \tilde{P}_j^3 + \epsilon] U_j^T \cdot \right. & \\ \left. \int B^T Q(\theta_j)^T \frac{\partial D_{g(j)}^H}{\partial \rho_i} Q(\theta_j) B dv U_j \right) & \quad (13) \end{aligned}$$

平均体积率约束 G_{ave} 的灵敏度为

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_{\text{ave}}}{\partial \tilde{P}_i} &= \rho_{g(i)} V_i \\ \frac{\partial G_{\text{ave}}}{\partial \rho_i} &= \sum_{\{j|g(j)=i\}} P_{g(j)} V_j \end{aligned} \quad (14)$$

宏观覆盖率约束 $G_{\text{sec,low}}$ 和 $G_{\text{sec,up}}$ 的灵敏度为

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_{\text{sec,low}}}{\partial \tilde{P}_i} &= -V_i, \quad \frac{\partial G_{\text{sec,up}}}{\partial \tilde{P}_i} = V_i \\ \frac{\partial G_{\text{sec,low}}}{\partial \rho_i} &= 0, \quad \frac{\partial G_{\text{sec,up}}}{\partial \rho_i} = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

材料分明约束 G_{0-1} 的灵敏度为

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_{0-1}}{\partial \tilde{P}_i} &= \frac{4}{N} (1 - 2\tilde{P}_i) \\ \frac{\partial G_{0-1}}{\partial \rho_i} &= 0 \end{aligned} \quad (16)$$

3 宏观单元聚类分区

本文采用 K-means 聚类方法结合宏观单元应变能实现微结构分区。K-means 聚类方法将样本集合 $x = \{x_1, \dots, x_n\}$ 根据某种距离定义划分成 r 个簇 $\Omega = \{\Omega_1, \dots, \Omega_r\}$, 使得样本集合的距离误差 E_{dist} 取得最小值

$$E_{\text{dist}} = \sum_{j=1}^r \sum_{x_i \in \Omega_j} \|x_i - \mu_j\|, \quad \mu_j = \frac{1}{n_j} \sum_{x_i \in \Omega_j} x_i \quad (17)$$

式中: n_j 为第 j 个簇中的样本数量; 距离误差 E_{dist} 反映了簇内样本围绕簇均值 (聚类中心) μ_j 的紧密程度, 距离误差数值越小表明簇内样本相似度越高。

K-means 方法划分样本集合的步骤为:

(1) 从样本数据集 x 中随机选择 r 个样本作为初始聚类中心 $\mu = \{\mu_1, \dots, \mu_r\}$;

(2) 计算每个样本 x_i 到各个聚类中心 μ_j 的距离 $\|x_i - \mu_j\|$, 挑选出距离该样本点最近的聚类中心,

并将该样本点划分到该聚类中心所对应的簇中;

(3) 当所有样本点都被划分到相应的簇以后, 计算更新各个簇均值;

(4) 重复上述步骤 (2) 和 (3), 直至连续两次聚类过程获得的簇均值不再变化。

如图 2 所示的 K-means 算法示意图, 样本数据点通过 K-means 聚类方法被划分成了不同颜色所表示的 4 个簇, 五角星标记对应着各个簇的簇均值。

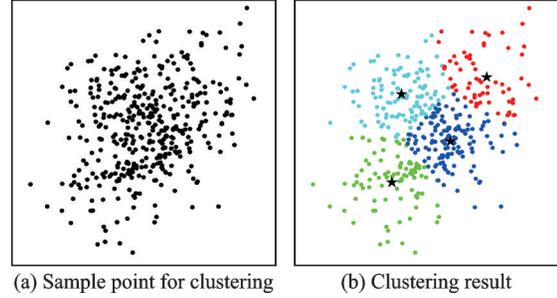


图 2 K-means 算法示意图

Fig.2 Schematic of K-means clustering

K-means 算法的初始聚类中心在一定程度上会影响聚类结果, 为了避免初始聚类中心从样本集合中随机选取而导致聚类结果的细微差别, 本文选取变厚度优化结果的宏观单元应变能作为初始样本进行聚类获得初始聚类模式 $g(i)$ 。在优化迭代过程中, 以有限元分析获得的实时宏观单元应变能为样本进行聚类来更新聚类模式 $g(i)$ 。

宏观材料插值使用改进的 PAMP 插值模型, 导致即使宏观单元中不存在点阵结构 ($P_i = 0$), 也具有极小的、非零的应变能。如图 3(b) 所示, 宏观结构可以被划分为 3 种区域: 具有较大应变能的点阵材料区域 (橘红色区域)、具有较小应变能的点阵材料区域 (绿色区域) 和具有极小应变能的空材料区域 (蓝色区域)。K-means 聚类方法处理一维标量数据存在一定不足, 无法清晰地划分具有极小数值和较小数值的数据样本。

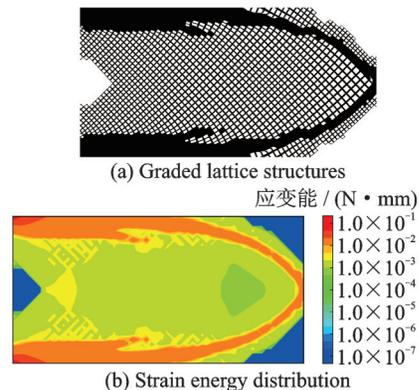


图 3 梯度点阵结构的应变能分布

Fig.3 Strain energy distribution of graded lattice structures

为了避免K-means聚类方法将空材料区域内具有极小应变能的宏观单元和由点阵填充的具有较低应变能的宏观单元划分到一个簇,提出两步聚类策略:

(1)首先使用K-means方法以单元应变能为样本将宏观单元聚类成 $r-1$ 个簇。

(2)取出上述 $r-1$ 个簇中平均应变能最小的簇,将该簇以单元应变能对数值 $\lg e_i$ 为样本使用K-means方法重新聚类成2个簇。

(3)将第1步中剩余的 $r-2$ 个簇和第3步所获得的2个簇合并组成的 r 个簇作为最终聚类结果,以该聚类结果进行后续的有限元分析。

如图4所示,对比不同聚类策略的聚类结果发现,两步聚类策略可以将具有极小应变能的宏观单元和由点阵填充的具有较小应变能的宏观单元划分到不同的两个簇中。

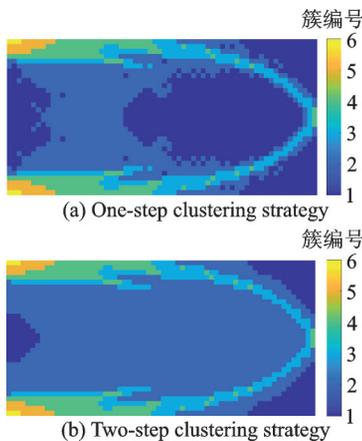


图4 不同聚类策略结果对比

Fig.4 Comparison of different clustering strategies

获得聚类结果后,以簇均值为指标将各个簇按从小到大的顺序进行编号,最终将第 i 个微观设计变量所表示的体积分数赋予第 i 个簇,构建起微观设计变量与簇之间的对应关系。

根据实时宏观单元应变能情况动态更新的微结构分区方式将导致每次迭代所处理的优化问题都略有不同,但随着优化的进行,微结构分区方式将逐渐趋于稳定。动态聚类的关键问题是保证迭代过程中聚类结果的稳定性,聚类结果的稳定性直接影响宏观单元中所填充的微结构种类,决定优化过程是否可以稳定进行。本文采用如下方法来提高聚类结果的稳定性^[15]:

(1)使用上一次聚类结果的聚类中心作为下一次聚类的初始聚类中心。

(2)宏、微观设计变量的优化更新并不同时进行,通过两次有限元分析分别优化宏、微观设计变量,同时为设计变量设置极小的更新步长,保证连

续两次迭代过程之间宏、微观设计变量不剧烈变化。

4 微结构映射方法

微结构单元之间的连接性对于梯度点阵结构的实际制造和宏观结构性能具有重要意义。不考虑微结构旋转自由度时,本文所选取的微结构类型可以自动保证不同宏观单元间微结构的连接性,如图5(a)所示。当考虑微结构旋转自由度时,由于每个宏观单元中微结构的转角并不一致,导致相邻宏观单元中微结构不能进行光滑地连接,如图5(b)所示。

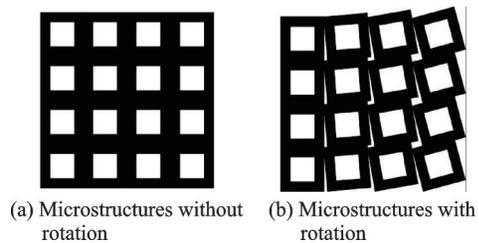


图5 微结构连接性示意图

Fig.5 Schematic of microstructural connectivity

本文采用Groen等^[22]提出的映射方法来实现微结构之间的光滑连接。在设计域中构造两组分别沿着微结构旋转方向连续变化的坐标系,该坐标系可以将原有的周期点阵结构沿着微结构旋转方向映射成梯度点阵结构。记映射函数为 $\varphi_1(x)$ 和 $\varphi_2(x)$,理想的映射过程应在保证微结构沿其旋转方向分布的同时维持原有的微结构样式,即满足两个约束。

(1)角度约束:映射函数的梯度方向应和微结构旋转方向一致;

(2)间距约束:映射函数的等高线间距(梯度模长)应保持不变。

为求解映射函数 $\varphi_1(x)$ 构造一优化问题(两组映射函数的求解方法完全相同且相互独立,故仅以 $\varphi_1(x)$ 为例),该优化问题以损失部分间距约束为代价来保证映射函数满足角度约束

$$\begin{aligned} \min_{\varphi_1(x)} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} w_1(x) \|\nabla \varphi_1(x) - \mathbf{n}_1(x)\|^2 d\Omega \\ \text{s.t.} & w_2(x) \nabla \varphi_1(x) \cdot \mathbf{t}_1(x) = 0 \\ w_1(x) &= \begin{cases} 0.01 & \rho(x) = 0 \\ 0.1 & \rho(x) = 1 \\ 1 & 0 < \rho(x) < 1 \end{cases} \\ w_2(x) &= \begin{cases} 0 & \rho(x) = 0 \\ 0 & \rho(x) = 1 \\ 1 & 0 < \rho(x) < 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (18)$$

式中: $\mathbf{n}_1 = [\cos \theta, \sin \theta]^T$ 和 $\mathbf{t}_1 = [-\sin \theta, \cos \theta]^T$ 对

应于图 1(b)中微结构局部坐标系 x' 和 y' 的单位方向矢量; θ 为微结构旋转角度。 $w_1(x)$ 为对应于间距约束的修正项: 实体材料和空材料材料性质不受微结构尺寸变化的影响, 故在该区域间距约束可以适当放松; $w_2(x)$ 为对应于角度约束的修正项: 各向同性实体材料和空材料材料性质不受微结构旋转角度影响, 在该区域可以不考虑角度约束。点阵材料区域内宏观单元的弹性张量受微结构旋转角度影响极为明显, 故在该区域不能放松角度约束。

针对式(18)所描述的带约束的优化问题, 本文采用罚函数法引入一极大值 λ 将其转化为一无约束优化问题, 并根据极小值存在的必要性条件结合有限元方法进行求解。

$$\min_{\varphi_1(x)} \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} w_1(x) \|\nabla \varphi_1(x) - n_1(x)\|^2 d\Omega + \lambda w_2(x) \|\nabla \varphi_1(x) \cdot t_1(x)\|^2 \right) \quad (19)$$

获得映射函数 $\varphi_1(x)$ 和 $\varphi_2(x)$ 后, 以精细点阵结构中微结构单胞的尺寸作为间距绘制映射函数等高线。图 6 所示为两组映射函数的等高线分布示意图, 两组等高线相交所构成的曲边四边形即为一个微结构单胞所占据的实际空间, 在各个曲边四边形中填充相应的微结构构型即可获得映射后的精细点阵结构。

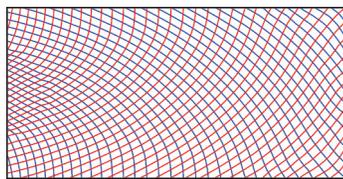


图 6 映射函数示意图

Fig.6 Schematic of mapping functions

5 优化流程

优化流程可以被划分为设计变量初始化、设计变量优化更新和微结构映射 3 部分, 如图 7 所示。

设计变量初始化部分: 离散宏观设计域和微结构单胞, 并获取微结构等效性质关于体积分数的插值曲线。对宏观结构进行变厚度优化设计, 以宏观单元主应力方向作为初始微结构转角, 以宏观单元应变能为样本获得初始簇集合, 根据初始簇集合初始化宏、微观设计变量。

设计变量优化更新部分: 计算各宏观单元弹性张量, 对宏观结构进行有限元分析并根据当前宏观单元应变能更新簇集合, 计算宏观设计变量灵敏度, 使用移动渐近线法更新宏观设计变量。基于更

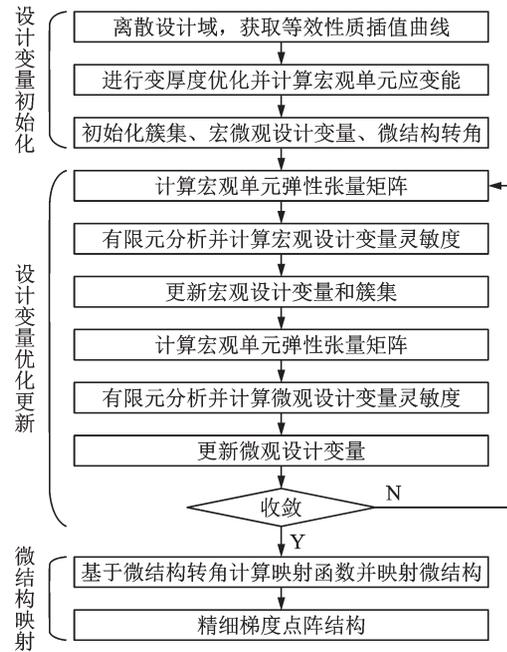


图 7 优化流程图

Fig.7 Flowchart of optimization procedures

新后的宏观设计变量和簇集合重新计算各宏观单元弹性张量, 对宏观结构进行有限元分析, 计算微观设计变量灵敏度并使用移动渐近线法更新微观设计变量。当目标函数没有收敛时, 重复该部分直至目标函数收敛。

微结构映射部分: 基于优化结果计算映射函数, 进行微结构映射获得精细的梯度点阵结构。

6 数值算例

考虑图 8 所示的悬臂梁问题, 实体材料选取各向同性碳钢材料, 杨氏模量为 210 000 MPa, 泊松比为 0.3。宏观结构设计域离散成 64×32 个四节点矩形单元, 微观单胞离散成 40×40 个四节点矩形单元, 取微结构单胞最外侧 3 层微结构单元作为不可设计域, 即 $\rho_{\min} = 0.27$ 。微结构种类数设为 8, 平均体积率设为 50%, 宏观覆盖率设为 100%。

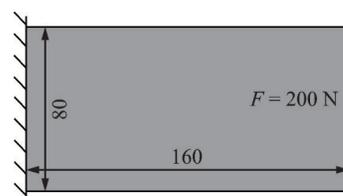


图 8 悬臂梁问题示意图

Fig.8 Schematic of cantilever problem

图 9(a)所示的目标函数和约束函数迭代曲线表明整个优化过程非常平稳, 约束函数没有违反且目标函数逐渐下降并趋于收敛。图 9(b)为第 1、10、30、90、250 和 400 步迭代时的微结构分区情况,

在150步以后微结构分区模式已经趋于稳定,该趋势在目标函数和约束函数迭代曲线、微观设计变量迭代曲线和簇均值迭代曲线上也有所反映。图9(c)所示的簇均值迭代曲线表明在整个优化过程中各个应变能簇之间没有发生相互转变,微观设计变量始终和各个簇之间保持着稳定的对应关系,证明了动态聚类过程的稳定性。两步聚类策略根据宏观单元应变能首先聚类获得了7个应变能簇,然后将具有最小簇均值的簇内样本取对数,进而将具有相对较低和极低应变能的宏观单元划分开,所以应变能簇均值数量相较于待优化微结构数量少1个。图9(d)所示的体积分数迭代曲线表明在整个优化过程中微观设计变量变化平稳且趋于收敛,最终优化结果中8种微结构的体积分数分别收敛于0.27、0.32、1、1、1、1、1和1,平均应变能较大的6个簇所对应的微结构均演变成实体材料进而承载相对更大的应变能。

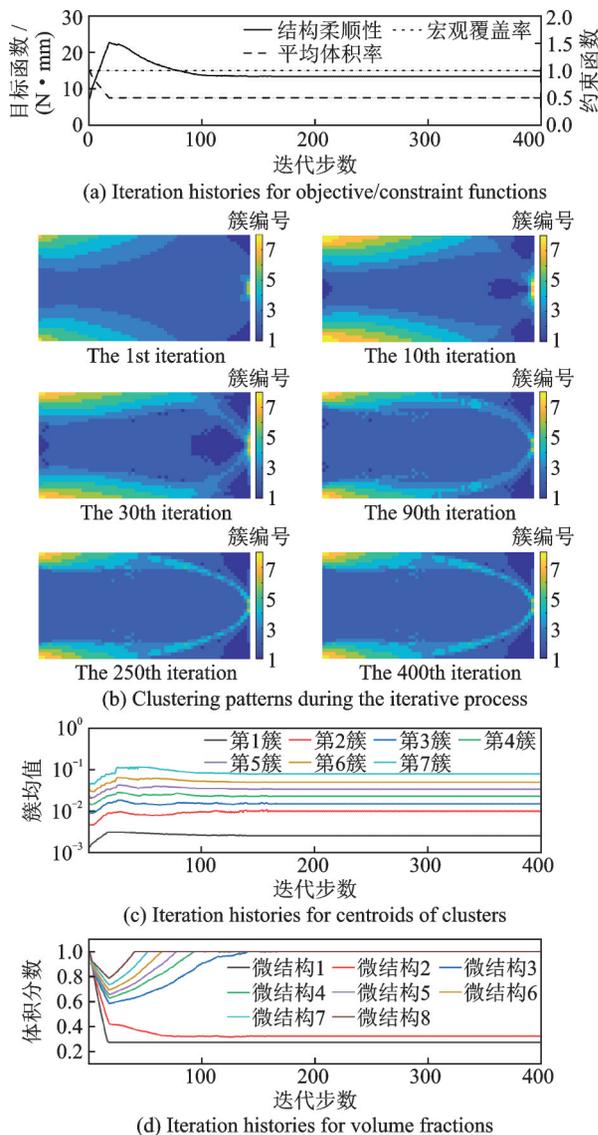


图9 悬臂梁问题优化结果

Fig.9 Optimization results of cantilever problem

图10(a)为微结构转角场示意图,即宏观单元主应力方向,图10(b)为相应的映射函数等高线分布,与图10(c)所示的映射前的精细点阵结构对照发现,在体积分数相对较低的点阵材料填充区域,两组映射函数等高线保持垂直,表明点阵材料构型在映射前后不会发生较大改变。在图10(d)所示的映射后的精细点阵结构中,实体材料主要分布在传力路径上的高应变能宏观单元中,而体积分数相对较低的点阵材料大多作为填充材料分布在宏观结构内部,不同微结构单胞之间具有良好的连接性。通过ANSYS软件进行有限元分析获得的精细结构柔顺性为13.92 N·mm,和均匀化方法计算结果13.32 N·mm之间相对误差仅为4.5%,证明该映射方法不会对结构柔顺性产生显著影响。

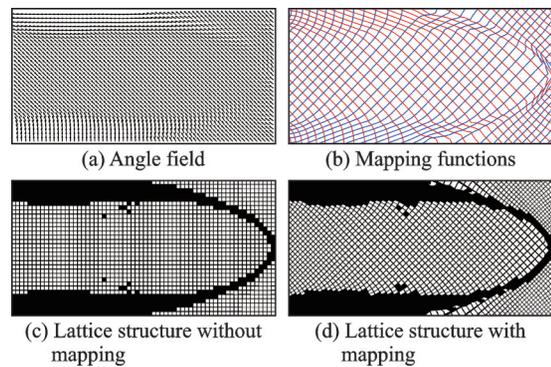


图10 映射过程示意图

Fig.10 Schematic of mapping process

为了探究簇数对于结构柔顺性的影响,设置不同簇数对上述悬臂梁问题进行优化,平均体积率和宏观覆盖率分别设为50%和90%。不同簇数的悬臂梁优化结果如图11所示,左侧为微结构分区情况,右侧为映射后的精细点阵结构。

不同簇数的优化结果均通过ANSYS软件验证精细结构柔顺性,具体的结构柔顺性结果如表1所示。随着簇数的增加设计自由度逐渐增大,结构柔顺性逐渐降低;当簇数增加到6簇以后,结构柔顺性逐渐趋于平稳,之后簇数增加不会再导致结构柔顺性出现明显降低,在这期间结构柔顺性降低了约25%。

通过图12所示微结构分区和宏观设计变量分布情况可以发现,通过两步聚类策略空材料相(宏观设计变量为零)所填充的宏观单元被划分到了同一个簇中,证明了两步聚类策略的有效性。

为了进一步证明所提方法的有效性,对按空间位置分区的悬臂梁结构进行两尺度并发拓扑优化设计,宏观结构被划分成8个分区,每个区域中分

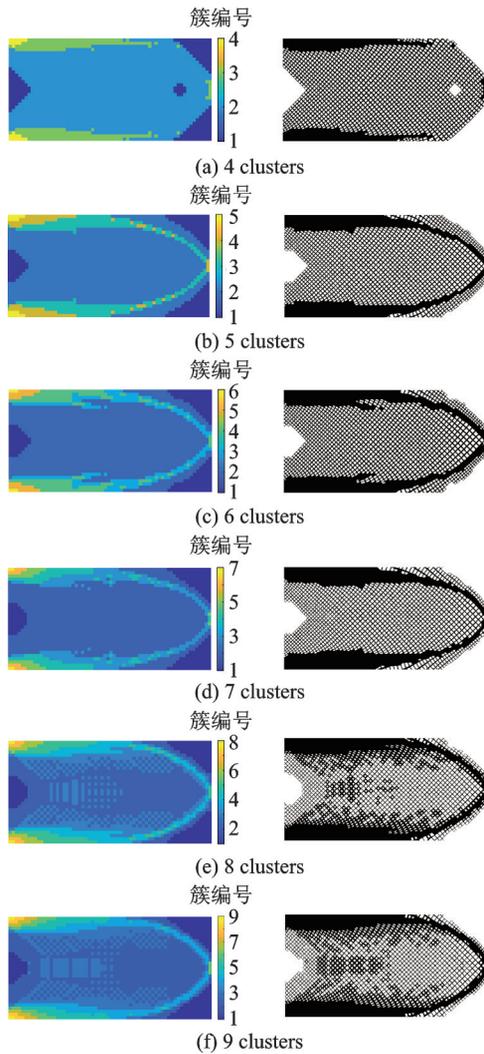


图 11 不同簇数下的悬臂梁设计
Fig.11 Cantilever designs with different number of clusters

表 1 不同簇数下的结构柔顺性对比

Table 1 Comparison of structural compliance with different number of clusters

簇数	均匀化方法/ (N·mm)	有限元验证/ (N·mm)	相对误差/ %
4	17.30	17.56	1.50
5	14.49	14.21	1.97
6	14.07	13.74	2.40
7	13.72	13.94	1.60
8	14.02	13.88	1.01
9	14.05	13.92	0.93

布着一种微结构单胞,平均体积率和宏观覆盖率分别设置为 50% 和 90%,材料参数、宏观结构和微观单胞的离散方式同上述悬臂梁算例完全相同,优化结果如图 13 所示。基于均匀化理论计算的结构柔顺性为 18.52 N·mm,该结果比本文所提方法高约 30%,证明本文选取宏观单元应变能作为微结构分区准则是合理的。

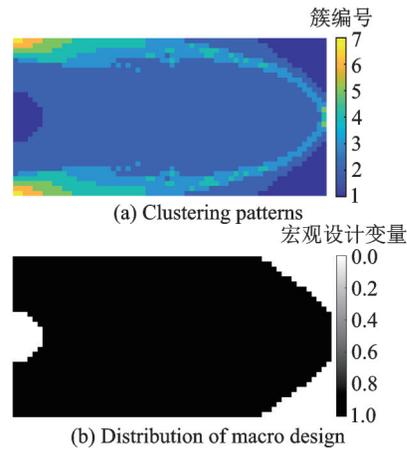


图 12 两步聚类策略的有效性
Fig.12 Effectiveness of two-step clustering strategy

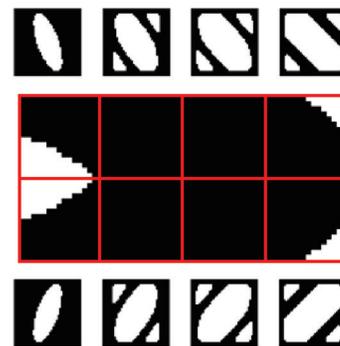


图 13 按空间位置分区的两尺度优化设计
Fig.13 Two-scale optimization design for grid-style grouping

7 结 论

本文针对梯度点阵结构的最小柔顺性问题,提出一种动态聚类分区的两尺度并发拓扑优化方法,该方法利用 K-means 聚类方法结合实时的应变能分布情况进行聚类动态调整微结构分区方式,最后通过映射方法重构精细的梯度点阵结构。数值算例表明,动态聚类方法的引入使得主要传力路径上的宏观单元可以获得相对更多的材料来承载相对更大的单元应变能。微结构的旋转自由度的引入则保证微结构可以始终沿着主应力方向分布,充分利用了点阵材料的各向异性,使得宏观结构传力路径更为合理。

参考文献:

[1] MACONACHIE T, LEARY M, LOZANOVSKI B, et al. SLM lattice structures: Properties, performance, applications and challenges[J]. Materials & Design, 2019, 183: 108-137.
[2] 刘伟先,穆雪峰,曾果.复合材料蜂窝夹层进气道结构优化设计方法研究[J].南京航空航天大学学报, 2018, 50(1): 86-90.

- LIU Weixian, MU Xuefeng, ZENG Guo. Optimal design of composite honeycomb sandwich inlet structure [J]. *Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics*, 2018, 50(1): 86-90.
- [3] 谢浩然, 贺媛媛, 陶志坚. 扑旋翼飞行器气动特性分析及机翼拓扑优化设计[J]. *南京航空航天大学学报*, 2020, 52(2): 280-287.
- XIE Haoran, HE Yuanyuan, TAO Zhijian. Aerodynamic characteristics analysis and topology optimization design of wing of flapping rotorcraft[J]. *Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics*, 2020, 52(2): 280-287.
- [4] 王博, 王斌, 程耿东. Kagome蜂窝夹层平板的多功能优化设计[J]. *复合材料学报*, 2007, 24(3): 109-115.
- WANG Bo, WANG Bin, CHENG Gengdong. Multifunctional design of sandwich panels with Kagome-like cores[J]. *Acta Materiae Compositae Sinica*, 2007, 24(3): 109-115.
- [5] 吴文旺, 肖登宝, 孟嘉旭, 等. 负泊松比结构力学设计、抗冲击性能及在车辆工程的应用与展望[J]. *力学学报*, 2021, 53(3): 611-638.
- WU Wenwang, XIAO Dengbao, MENG Jiaxu, et al. Mechanical design, impact energy absorption and applications of auxetic structures in automobile lightweight engineering[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2021, 53(3): 611-638.
- [6] ZHANG Wen, YIN Sha, YU Tongxi, et al. Crushing resistance and energy absorption of pomelo peel inspired hierarchical honeycomb[J]. *International Journal of Impact Engineering*, 2019, 125: 163-172.
- [7] BENDSØE M P, KIKUCHI N. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1988, 71(2): 197-224.
- [8] RODRIGUES H, GUEDES J M, BENDSOE M P. Hierarchical optimization of material and structure[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2002, 24(1): 1-10.
- [9] LIU Ling, YAN Jun, CHENG Gengdong. Optimum structure with homogeneous optimum truss-like material[J]. *Computers & Structures*, 2008, 86(13/14): 1417-1425.
- [10] NIU Bin, YAN Jun, CHENG Gengdong. Optimum structure with homogeneous optimum cellular material for maximum fundamental frequency[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2009, 39(2): 115-132.
- [11] YAN Jun, GUO Xu, CHENG Gengdong. Multi-scale concurrent material and structural design under mechanical and thermal loads[J]. *Computational Mechanics*, 2016, 57(3): 437-446.
- [12] ZHANG Huikai, WANG Yaguang, KANG Zhan. Topology optimization for concurrent design of layer-wise graded lattice materials and structures[J]. *International Journal of Engineering Science*, 2019, 138: 26-49.
- [13] XU Liang, CHENG Gengdong. Two-scale concurrent topology optimization with multiple micro materials based on principal stress orientation[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2018, 57(5): 2093-2107.
- [14] JIA Jiao, DA DAICONG, LOH C L, et al. Multi-scale topology optimization for non-uniform microstructures with hybrid cellular automata[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2020, 62(2): 757-770.
- [15] QIU Zheng, LI Quhao, LIU Shutian, et al. Clustering-based concurrent topology optimization with macrostructure, components, and materials[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2021, 63(3): 1243-1263.
- [16] KUMAR T, SURESH K. A density-and-strain-based K-clustering approach to microstructural topology optimization[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2020, 61(4): 1399-1415.
- [17] CHENG Gengdong, CAI Yuanwu, XU Liang. Novel implementation of homogenization method to predict effective properties of periodic materials[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2013, 29(4): 550-556.
- [18] PEDERSEN P. On optimal orientation of orthotropic materials[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 1989, 1(2): 101-106.
- [19] SIGMUND O. Morphology-based black and white filters for topology optimization[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2007, 33(4/5): 401-424.
- [20] GUEST J K, PREVOST J H, BELYTSCHKO T. Achieving minimum length scale in topology optimization using nodal design variables and projection functions[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2004, 61(2): 238-254.
- [21] SVANBERG K. The method of moving asymptotes—A new method for structural optimization[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2010, 24(2): 359-373.
- [22] GROEN J P, SIGMUND O. Homogenization-based topology optimization for high-resolution manufacturable micro-structures[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2018, 113(8): 1148-1163.