

DOI:10.16356/j.1005-2615.2022.05.006

## 格子玻尔兹曼和气体动理学通量算法及其应用进展

舒 昌<sup>1</sup>, 杨鲤铭<sup>2,3,4</sup>, 王 岩<sup>2,3,4</sup>, 吴 杰<sup>2,3,4</sup>

(1. 新加坡国立大学机械工程系, 新加坡 119260, 新加坡; 2. 南京航空航天大学航空学院, 南京 210016;  
3. 南京航空航天大学非定常空气动力学与流动控制工信部重点实验室, 南京 210016; 4. 南京航空航天大学机械  
结构力学及控制国家重点实验室, 南京 210016)

**摘要:** 采用守恒律方程求解流体流动问题时, 单元界面通量的计算尤为关键, 该过程也被称为通量重构。由于离散控制方程的物理量定义在解点上, 如何利用解点上的值来计算单元界面的通量, 是计算流体力学最为关心的问题之一。针对该问题的研究已发展了各式各样的计算格式, 例如完全基于数学重构的差分近似、基于部分物理重构的黎曼通量求解器以及近年发展起来的基于完全物理重构的气体动理学格式、格子 Boltzmann 通量算法和气体动理学通量算法。本文首先对几种典型的通量重构算法进展进行回顾和分析; 然后着重介绍格子玻尔兹曼通量算法和气体动理学通量算法的研究进展及其相关应用; 最后就该类算法存在的挑战和可能的研究方向进行展望。

**关键词:** 计算流体力学; 气体动理学格式; 格子玻尔兹曼通量算法; 气体动理学通量算法; 连续和稀薄流动

**中图分类号:** O354 **文献标志码:** A **文章编号:** 1005-2615(2022)05-0801-16

## Advances of Lattice Boltzmann and Gas Kinetic Flux Solvers and Their Applications

SHU Chang<sup>1</sup>, YANG Liming<sup>2,3,4</sup>, WANG Yan<sup>2,3,4</sup>, WU Jie<sup>2,3,4</sup>

(1. Department of Mechanical Engineering, National University of Singapore, Singapore 119260, Singapore; 2. College of Aerospace Engineering, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing 210016, China; 3. Key Laboratory of Unsteady Aerodynamics and Flow Control, Ministry of Industry and Information Technology, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing 210016, China; 4. State Key Laboratory of Mechanics and Control of Mechanical Structures, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing 210016, China)

**Abstract:** When the governing equations resultant from conservation laws are solved to simulate fluid flow problems, one of key issues is to evaluate numerical fluxes at the cell interface, which is also called flux reconstruction. Since the conservative variables of discrete governing equations are defined at the solution points, how to use the values at the solution points to calculate the flux at the cell interface is one of the most important and challenging issues in computational fluid dynamics (CFD). In order to resolve this problem, various numerical algorithms have been developed, such as finite difference schemes based on mathematical reconstruction, the Riemannian flux solver based on partial physical reconstruction, and the newly-developed gas kinetic scheme (GKS), lattice Boltzmann flux solver (LBFS), gas kinetic flux solver (GKFS) based on

**基金项目:** 国家自然科学基金(12202191); 江苏省自然科学基金(BK20210273); 南京航空航天大学前瞻布局科研专项资金资助; 江苏高校优势学科建设工程(PAPD)。

**收稿日期:** 2022-08-30; **修订日期:** 2022-09-23

**作者简介:** 舒昌, 男, 教授, 博士生导师, 国际著名计算流体力学专家, 曾获国家自然科学基金海外青年学者合作研究基金(杰青B), 教育部“长江学者计划”讲座教授, 南京航空航天大学 79 级校友。主要从事计算流体力学数值离散方法、流动建模和流体力学应用等方面研究工作。出版专著 4 部, 发表 SCI 学术论文 380 余篇, 担任多个国际期刊主编和编委。

**通信作者:** 杨鲤铭, 男, 教授, 博士生导师, E-mail: lmyang@nuaa.edu.cn。

**引用格式:** 舒昌, 杨鲤铭, 王岩, 等. 格子玻尔兹曼和气体动理学通量算法及其应用进展[J]. 南京航空航天大学学报, 2022, 54(5): 801-816. SHU Chang, YANG Liming, WANG Yan, et al. Advances of lattice Boltzmann and gas kinetic flux solvers and their applications[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2022, 54(5): 801-816.

the fully physical reconstruction. In this paper, several typical flux reconstruction methods are reviewed and analyzed. In particular, the research progress of LBFS and GKFS and their applications are introduced. Finally, some challenges and possible research directions of LBFS and GKFS are addressed.

**Key words:** computational fluid dynamics; gas kinetic scheme; lattice Boltzmann flux solver; gas kinetic flux solver; continuous and rarefied flows

随着计算机性能的不不断提升,计算流体力学(Computational fluid dynamics, CFD)已经成为解决流体流动问题的重要手段之一,在航空、航天、航海等领域均已取得了非常成功的应用<sup>[1-4]</sup>。与理论流体力学和实验流体力学相比,CFD的应用场景更为灵活和广泛,且大多数情况下更为经济。特别是对于实验难于复现的场景以及不便测量的区域,例如临近空间的高速稀薄流动和航空发动机内部的精细流场结构,CFD更是发挥着不可替代的作用。CFD通过求解流体流动控制方程来获得流场的解,常用的方法包括有限差分法(Finite difference method, FDM)<sup>[5-6]</sup>、有限体积法(Finite volume method, FVM)<sup>[7-8]</sup>以及有限元法(Finite element method, FEM)<sup>[9-10]</sup>等。在这些方法中,由于离散控制方程的解通常定义在解点上,如何利用解点上的值来计算单元界面的通量,是CFD最为关心的问题之一,该过程也被称为通量重构。

光滑函数近似是最为直观和简单的通量重构方法,该方法采用光滑函数将单元界面周围解点上的物理量连接起来,由此界面上的物理量便可通过该光滑函数插值计算。由于没有考虑流动的特征,该类算法可以视为完全的数学重构。其典型代表为中心格式,即采用单元界面左右两侧解点的平均值来重构界面通量。虽然该方法极为简单,但在求解含有间断的流动问题时,会导致计算不稳定的现象。克服该问题的常用办法是在计算通量过程中增加人工黏性,例如Jameson-Schmidt-Turkel(JST)格式通过增加2阶和4阶人工黏性项来改善中心格式的数值稳定性<sup>[11-12]</sup>。其中,2阶黏性项用于抑制激波附近的振荡,仅在流场中压力梯度较大的区域发挥作用,而4阶黏性项用于抑制高频振荡,使数值解趋于稳定。

不同于数学重构,物理重构在计算单元界面通量时会考虑流动的信息或者通过求解等效的物理方程(或简化的物理方程)来获得界面的物理量。著名的通量矢量分裂格式,例如van Leer格式<sup>[13-14]</sup>和AUSM格式<sup>[15-16]</sup>均是依据波的传播方向来计算无黏通量。具体地,van Leer格式依据当地马赫数的符号直接将无黏通量分解为左通量和右通量两部分,而AUSM格式则先将无黏通量拆分为对流项和压力项,然后再依据当地马赫数的符号对各自

进行分解。与通量矢量分裂格式不同,Godunov格式<sup>[17-18]</sup>、HLL格式<sup>[19-20]</sup>、HLLC格式<sup>[21-22]</sup>和Roe格式<sup>[23-24]</sup>等则利用一维Riemann问题的精确解或近似解来重构单元界面的通量。由于从界面左侧解点和右侧解点插值到界面上的左状态和右状态通常不相等,会在界面形成Riemann问题。Godunov格式正是通过求解一维Riemann问题的解析解来计算无黏通量,HLL格式和HLLC格式则是利用一维Riemann问题的近似解来计算无黏通量,而Roe格式通过求解近似Riemann问题的解析解来获得无黏通量的表达式。

无论是采用数学重构还是物理重构,上述这些通量格式仅考虑了无黏通量的计算,黏性通量则是通过中心差分来获得。另外,由于采用一维Riemann问题的精确解或近似解来重构单元界面的通量,Godunov格式、HLL格式、HLLC格式和Roe格式等只能沿单元界面法向应用,切向通量则需要通过被动标量的方式来计算。由此可见,这些格式在单元界面上并不能精确满足Navier-Stokes方程,亦或是多维的Euler方程。其原因在于,多维Riemann问题的求解非常困难,需要考虑的解的种类非常多,从而导致计算成本显著增加。

与上述通量重构的思路不同,气体动理学格式(Gas kinetic scheme, GKS)通过在单元界面应用Boltzmann模型方程的局部解来计算宏观Navier-Stokes方程的通量<sup>[25-30]</sup>,实现了通量的完全物理重构。在连续介质假设的前提下,Boltzmann模型方程可以还原回Navier-Stokes方程,该关系为采用Boltzmann模型方程的局部解来计算Navier-Stokes方程的通量奠定了基础。由于Boltzmann模型方程仅为分布函数的单变量方程,形式比Navier-Stokes方程更简单,因而可以方便地获得该方程的局部解。GKS正是采用Boltzmann模型方程在单元界面的局部积分解结合对应于Navier-Stokes方程截断形式的初始分布函数来计算Navier-Stokes方程的通量,从而使得单元界面的物理量也满足Navier-Stokes方程的等价形式,并且无黏通量和黏性通量可以采用统一的方式计算。另一方面,GKS由于在求解过程中引入了许多参数,其计算效率要低于传统的Navier-Stokes方程求解器。

本文所要介绍的格子玻尔兹曼通量算法(Lattice Boltzmann flux solver, LBFS)和气体动力学通量算法(Gas kinetic flux solver, GKFS)与GKS类似,也是借助于Boltzmann模型方程的局部解来计算宏观Navier-Stokes方程的通量。但与GKS不同,LBFS和GKFS采用的是Boltzmann模型方程的渐进展开解<sup>[30-35]</sup>,其形式比GKS采用的局部分解更为简单而且其计算量和传统的Navier-Stokes方程求解器相当。该渐进展开解的不同阶截断对应于不同层次的宏观控制方程,其中采用一阶截断即可还原Navier-Stokes方程。利用渐进展开解的一阶截断结合不同的平衡态分布函数,即可发展相应的LBFS和GKFS用于宏观控制方程的求解。除了应用于连续流动问题,GKFS也可拓展到稀薄流动问题求解<sup>[36-38]</sup>。但在稀薄流动问题求解时,单元界面的初始分布函数不能再采用平衡态来近似,需要替换为考虑非平衡效应的分布函数,例如取为Boltzmann模型方程的解或Grad分布函数。将单元界面的初始分布函数直接取为Boltzmann模型方程的解可以实现全流域流动问题的求解,但该方式需要在分子速度空间离散求解Boltzmann模型方程。通过Grad分布函数来近似单元界面的初始分布函数可以避开Boltzmann模型方程的求解,提高计算效率并降低内存需求,但该方式适用的克努森数范围有限,一般与矩方法相当。鉴于GKS、LBFS和GKFS均采用完全物理重构的方式来计算单元界面的通量,因而通量也可视为满足宏观控制方程的等价形式。大量数值实验表明,该类算法从低速到高超声速流动问题求解均具有非常好的稳定性<sup>[39-40]</sup>,因而已被扩展应用于多相流、动边界、流固共轭传热以及化学反应流等问题的求解。

## 1 Boltzmann模型方程和宏观守恒律方程

### 1.1 Boltzmann模型方程及其渐进展开解

Boltzmann方程通过引入气体分子速度分布函数 $f$ 来描述微观系统中分子的迁移和碰撞过程。原始Boltzmann方程的碰撞项为分布函数的五重积分,而且与分子的模型和碰撞截面积相关,因而表达式极为复杂,难以在实际工程中直接应用。为了简化该方程的碰撞项,相继提出了各种简化模型方程<sup>[41-43]</sup>,其中BGK模型由于其形式最为简单而获得了广泛的应用。BGK模型由Bhatnagar、Gross和Krook提出,它可以满足质量、动量和能量守恒,满足熵增条件,并且导出的平衡态即为Maxwell分

布。但是,该模型对应的普朗特数恒为1,与通过原始Boltzmann方程推导得到的正确值 $2/3$ 不一致,因此在实际应用中需要对其进行修正。采用BGK模型作为碰撞项的Boltzmann方程可以改写为

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla f = \frac{f^{\text{eq}} - f}{\tau} \quad (1)$$

式中: $t$ 为时间; $\boldsymbol{\xi}$ 为分子速度; $\nabla$ 为空间导数; $\tau$ 为分子碰撞时间,对于硬球模型分子可以表示为

$$\tau = \frac{\mu}{\rho} = \frac{Ma^2}{Re} \frac{\gamma L_\infty}{u_\infty} = Kn \frac{5\sqrt{2\pi\gamma}}{16} \frac{L_\infty}{c_\infty} \propto Kn \quad (2)$$

式中: $\mu$ 和 $\rho$ 分别为动力学黏性和压力; $Ma$ 、 $Re$ 和 $Kn$ 分别为马赫数、雷诺数和克努森数; $\gamma$ 为比热容比; $u_\infty$ 为参考速度; $L_\infty$ 为参考长度; $c_\infty$ 为声速。另外,式(1)中 $f^{\text{eq}}$ 为Maxwell平衡态分布函数,即

$$f^{\text{eq}} = \frac{\rho}{(2\pi RT)^{3/2}} \exp\left[-\frac{c^2}{2RT}\right] \quad (3)$$

式中: $c = \boldsymbol{\xi} - \mathbf{u}$ 为分子的最可几热运动速度, $\mathbf{u}$ 为宏观速度; $\rho$ 为密度; $T$ 为温度; $R$ 为气体常数。除特殊说明外,本文中约定用黑体来表示矢量,用对应的白斜体来表示矢量的长度。

为了便于推导Boltzmann-BGK模型方程的渐进展开解,可将式(1)改写为

$$f = f^{\text{eq}} - \tau Df \quad (4)$$

式中 $Df = \partial_t f + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla f$ 为分布函数的物质导数。将上述 $f$ 的表达式不断地代入方程最后1项,即可获得Boltzmann-BGK模型方程的渐进展开解,即

$$f = f^{\text{eq}} - \tau Df^{\text{eq}} + \tau^2 D^2 f^{\text{eq}} - \tau^3 D^3 f^{\text{eq}} + \dots \quad (5)$$

式中已将 $\tau$ 近似为局部常数,因而可以提到物质导数算子前面。实际上,式(5)的不同阶截断即代表不同的宏观控制方程。

### 1.2 宏观守恒律方程

不同于Boltzmann方程,宏观控制方程直接在宏观层次上利用质量、动量和能量守恒规律来建立流体流动的控制方程。由于同为描述流体问题的控制方程,Boltzmann方程和宏观控制方程间存在必然的联系。在式(1)左右两边同时乘以微观守恒矩,并在分子速度空间积分,可得

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F} = 0 \quad (6)$$

$$\mathbf{W} = (\rho, \rho \mathbf{u}, \rho E)^T = \langle \boldsymbol{\psi} f \rangle = \langle \boldsymbol{\psi} f^{\text{eq}} \rangle \quad (7)$$

$$\mathbf{F} = (F_\rho, F_{\rho u}, F_{\rho E})^T = \langle \boldsymbol{\xi} \boldsymbol{\psi} f \rangle \quad (8)$$

式中: $E$ 为总能; $\boldsymbol{\psi} = (1, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}^2/2)^T$ 为微观守恒矩矢量。符号 $\langle \cdot \rangle$ 表示在分子速度空间的积分,即

$\langle f \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f d\xi$ 。对于全流域内的流体流动问题, 由于分布函数  $f$  依赖于式(1), 宏观控制方程式(6)中的通量  $F$  并不能显式表示出来。然而, 对于连续流问题, 可以采用式(5)的截断形式来近似分布函数  $f$ , 则相应的宏观控制方程便可完全确定。

如果将分布函数  $f$  近似为其平衡态  $f^{eq}$ , 则对应的宏观控制方程为 Euler 方程。此时相当于将  $\tau$  取为 0, 即克努森数  $Kn$  设置为 0, 等效于引入了无粘假设。为了还原 Navier-Stokes 方程, 可以将分布函数  $f$  取为其一阶截断形式<sup>[44]</sup>

$$f = f^{eq} - \tau Df^{eq} + O(\tau^2) \quad (9)$$

将式(9)代入式(6), 可得

$$\partial_i \langle \psi f^{eq} \rangle + \nabla \cdot \langle \xi \psi f^{eq} \rangle = \nabla \cdot \langle \tau \xi \psi Df^{eq} \rangle + O(\tau^2) \quad (10)$$

将平衡态分布函数式(3)代入上述积分, 即可得到如下形式的 Navier-Stokes 方程

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = O(\tau^2) \quad (11)$$

$$\partial_t (\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u} + p \mathbf{I}) = \nabla \cdot \mathbf{\Pi} + O(\tau^2) \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \partial_t (\rho E) + \nabla \cdot [(\rho E + p) \mathbf{u}] &= \nabla \cdot (\kappa \nabla T) + \\ \nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \mathbf{\Pi}) + O(\tau^2) & \end{aligned} \quad (13)$$

式中

$$\mathbf{\Pi} = \mu \left[ \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right] - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I} + \mu_b (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I}$$

$$\mu = \tau p, \quad \mu_b = \left( \frac{5}{3} - \gamma \right) \mu$$

$$\kappa = \tau p (c_v + R) = \mu c_p, \quad Pr = \frac{\mu c_p}{\kappa} = 1$$

并且:  $\mu_b$  为体积黏性系数;  $c_v$  为等容比热容;  $c_p$  为等压比热容;  $\kappa$  为热传导系数;  $Pr$  为普朗特数。上述推导表明, 采用 Boltzmann-BGK 模型方程渐进展开解的一阶截断即可还原得到可压缩 Navier-Stokes 方程, 并且截断误差为  $O(\tau^2)$ 。实际上分布函数  $f$  的一阶截断相当于引入了连续性假设, 即克努森数远小于 1 的情形, 因此  $O(\tau^2)$  属于高阶小量, 可以忽略。另外, 由于采用了 BGK 碰撞模型, 还原得到的 Navier-Stokes 方程的普朗特数恒为 1。

值得指出, 在还原上述可压缩 Navier-Stokes 方程的过程中, 仅需要用到平衡态分布函数满足的 7 个矩关系, 分别对应质量、动量、能量、动量方程的无黏和黏性通量、能量方程的无黏和黏性通量。换言之, 采用其他平衡态分布函数也可还原宏观 Navier-Stokes 方程, 其要求仅为满足所需的矩关系。另外, 通过该推导过程可知, 将分布函数取为 Boltzmann-BGK 模型方程渐进展开解的一阶截断即可还原 Navier-Stokes 方程。故可以将该渐进展

开解的一阶截断直接代入式(8)来设计 Navier-Stokes 方程的通量计算格式。

## 2 格子玻尔兹曼通量算法

### 2.1 算法设计

建立 Boltzmann-BGK 模型方程与 Navier-Stokes 方程之间的联系之后, 即可采用该关系来设计 Navier-Stokes 方程的通量计算格式。本小节采用离散的格子 Boltzmann 模型来替代 Maxwell 平衡态分布函数, 发展基于离散模型的格子 Boltzmann 通量算法。以常用的不可压缩 D2Q9 模型为例(图 1(a)), 平衡态分布函数可以写为

$$f_a^{eq} = \omega_a \rho \left( 1 + \frac{\xi_a \cdot \mathbf{u}}{c_s^2} + \frac{(\xi_a \cdot \mathbf{u})^2}{2c_s^4} - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}{2c_s^2} \right) \quad (14)$$

$$\xi_a = \begin{cases} 0 & \alpha = 0 \\ \left( \cos[(\alpha-1)\pi/2], \right. & \alpha = 1, 2, 3, 4 \\ \left. \sin[(\alpha-1)\pi/2] \right) \\ \sqrt{2} \left[ \cos \left[ \frac{(\alpha-5)\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right], \right. & \alpha = 5, 6, 7, 8 \\ \left. \sin \left[ \frac{(\alpha-5)\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right] \right] \end{cases} \quad (15)$$

式中: 权系数  $\omega_0 = 4/9$ 、 $\omega_{1-4} = 1/9$ 、 $\omega_{5-8} = 1/36$ ; 格子声速  $c_s = \sqrt{3}/3$ 。采用与上一节一致的推导过程, 当分布函数取为 Boltzmann-BGK 模型方程渐进展开解的一阶截断时, 可以得到如下弱可压缩 Navier-Stokes 方程

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F} = 0 \quad (16)$$

$$\begin{cases} \mathbf{W} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho \mathbf{u} \end{bmatrix} \\ \mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_\rho \\ F_{\rho u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho \mathbf{u} \\ \rho \mathbf{u} \mathbf{u} + p \mathbf{I} - \mu (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (17)$$

式中:  $p = \rho c_s^2$ ;  $\mu = \tau \rho c_s^2$ 。采用有限体积法对式(16)在空间网格  $V_i$  进行离散可得

$$\frac{\partial \mathbf{W}_i}{\partial t} = -\frac{1}{V_i} \sum_{j \in N(i)} \mathbf{n}_{ij} \cdot \mathbf{F}_{ij} S_{ij} \quad (18)$$

式中:  $V_i$  为控制体  $i$  的体积;  $N(i)$  为控制体  $i$  所包含邻近单元的集合;  $\mathbf{n}_{ij}$  为控制体  $i$  和控制体  $j$  交界面上的单位外法向矢量;  $S_{ij}$  为该面的面积。依据 Boltzmann-BGK 模型方程与上述弱可压缩 Navier-Stokes 方程之间的联系, 式(18)中的通量  $\mathbf{F}_{ij}$  为

$$F_{ij} = (F_\rho, F_{\rho u})^T = \langle \xi \psi f \rangle_\alpha = \langle \xi \psi (f^{\text{eq}} - \tau Df^{\text{eq}}) \rangle_\alpha \quad (19)$$

式中:  $\psi = (1, \xi)^T$  为对应于弱可压缩 Navier-Stokes 方程的微观守恒矩矢量; 符号  $\langle \cdot \rangle_\alpha$  表示在分子速度空间的求和, 即  $\langle f \rangle_\alpha = \sum_\alpha f_\alpha$ 。

假定单元界面位置为  $x_{ij}$ ,  $f(x_{ij}, \xi_\alpha, t^n + \delta t)$  为单元界面上  $t^n + \delta t$  时刻的离散分布函数, 其中  $t^n$  为当前时刻,  $\delta t$  为迁移时间步长, 则其一阶截断可以表示为

$$f(x_{ij}, \xi_\alpha, t^n + \delta t) = f^{\text{eq}}(x_{ij}, \xi_\alpha, t^n + \delta t) - \frac{\tau}{\delta t} (f^{\text{eq}}(x_{ij}, \xi_\alpha, t^n + \delta t) - f^{\text{eq}}(x_{ij} - \xi_\alpha \delta t, \xi_\alpha, t^n)) \quad (20)$$

式(20)中包含了  $t^n$  时刻单元界面周围的平衡态分布函数  $f^{\text{eq}}(x_{ij} - \xi_\alpha \delta t, \xi_\alpha, t^n)$  和  $t^n + \delta t$  界面上的平衡态分布函数  $f^{\text{eq}}(x_{ij}, \xi_\alpha, t^n + \delta t)$ 。其中,  $f^{\text{eq}}(x_{ij} - \xi_\alpha \delta t, \xi_\alpha, t^n)$  可由相应位置的宏观量来确定, 而这些宏观量可通过解点上的值插值得到, 如图 1(b) 所示。值得注意的是, 单元界面周围点 (1~8) 的位置可通过局部坐标系来确定, 该方式适用于任意网格。

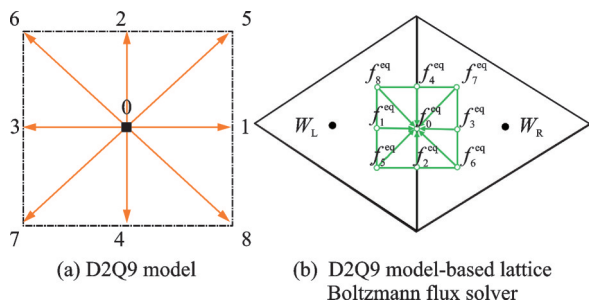


图 1 D2Q9 模型和基于该模型的格子玻尔兹曼通量算法示意图

Fig.1 D2Q9 model and schematic diagram of D2Q9 model-based lattice Boltzmann flux solver

利用式(21)计算出  $(x_{ij} - \xi_\alpha \delta t, t^n)$  位置处的  $\rho$  和  $u$ , 即可通过式(14)获得对应位置的平衡态分布函数。

$$\phi(x_{ij} - \xi_\alpha \delta t, t^n) = \begin{cases} \phi(x_i) + (x_{ij} - \xi_\alpha \delta t - x_i) \cdot \nabla \phi(x_i) & x_{ij} - \xi_\alpha \delta t \in V_i \\ \phi(x_j) + (x_{ij} - \xi_\alpha \delta t - x_j) \cdot \nabla \phi(x_j) & x_{ij} - \xi_\alpha \delta t \in V_j \end{cases} \quad (21)$$

式中  $\phi$  为任意宏观量。

为了计算  $f^{\text{eq}}(x_{ij}, \xi_\alpha, t^n + \delta t)$ , 需要先计算  $t^n +$

$\delta t$  时刻界面上的宏观量  $W(x_{ij}, t^n + \delta t)$ 。对式(20)应用相容性条件有

$$W(x_{ij}, t^n + \delta t) = \langle \psi f^{\text{eq}}(x_{ij}, \xi_\alpha, t^n + \delta t) \rangle_\alpha = \langle \psi f^{\text{eq}}(x_{ij} - \xi_\alpha \delta t, \xi_\alpha, t^n) \rangle_\alpha \quad (22)$$

式(22)表明,  $W(x_{ij}, t^n + \delta t)$  可由  $t^n$  时刻界面周围平衡态分布函数  $f^{\text{eq}}(x_{ij} - \xi_\alpha \delta t, \xi_\alpha, t^n)$  求得。将  $W(x_{ij}, t^n + \delta t)$  代入式(14)即可获得  $f^{\text{eq}}(x_{ij}, \xi_\alpha, t^n + \delta t)$ 。由此, 单元界面上的一阶截断分布函数  $f(x_{ij}, \xi_\alpha, t^n + \delta t)$  可完全确定, 将其代入式(19)即可获得宏观方程通量  $F_{ij}$ 。在 LBFS 中,  $\delta t$  与宏观式(18)的推进时间步长  $\Delta t$  无关, 只要  $x_{ij} - \xi_\alpha \delta t$  满足无外插即可。一种可选的方案为  $\delta t = \delta x = 0.4 \times \min\{\Delta r_L, \Delta r_R, 0.5l_{\min}\}$ , 式中  $\Delta r_L$ 、 $\Delta r_R$  和  $l_{\min}$  分别为左侧单元中心到界面的距离、右侧单元中心到界面的距离和左右两侧单元的最小边长。

式(18)中的通量确定之后, 便可应用 Runge-Kutta 方法或者 LU-SGS 方法沿时间方向推进求解。整体而言, LBFS 仍然求解的是宏观控制方程, 只是在计算单元界面通量时采用了 Boltzmann-BGK 模型方程渐进展开解的一阶截断。该一阶截断正好对应于所求解的宏观 Navier-Stokes 方程, 所以利用 LBFS 所构造的通量在单元界面处也满足所求解的控制方程, 而且无粘和粘性通量可以采用一致的方式计算。相比于传统 CFD 方法, 由于仅通量计算格式发生了变化, 传统方法中的各种加速收敛技巧均可直接应用于当前格式。

## 2.2 不可压缩流应用

上述基于离散模型的 LBFS 已被广泛应用于不可压等温流动<sup>[45]</sup>、不可压传热流动<sup>[46]</sup>、多相流<sup>[47-49]</sup>、不可压共轭传热问题<sup>[50]</sup>以及不可压动边界问题<sup>[51]</sup>等。相比于传统的不可压算法, 当前方法避免了迭代求解压力泊松方程; 相比于人工压缩方法, 当前方法的无黏和黏性通量可以统一计算; 相比于通过求解 Boltzmann 方程来获得连续流解的格子 Boltzmann 方法, 当前方法更易于非结构和非均匀网格, 并且稳定性更好。

(1) 该方法在大密度比多相流问题中的应用<sup>[47-49]</sup>。由于相界面附近包含密度、黏性和速度在内的多个物理量在几个网格内急剧变化, 传统基于格子 Boltzmann 算法模拟大密度比和高雷诺数多相流问题一直是重要的挑战, 并对方法的数值稳定性提出了苛刻的要求。与传统多相流格子 Boltzmann 算法不同, 多相流 LBFS 采用有限体积法直接求解宏观控制方程, 界面上的通量由标准

的格子 Boltzmann 解进行重构。另外,相界面的捕捉利用 WENO 格式求解 Cahn-Hilliard 方程来实现。该方法成功模拟了多个具有挑战性的大密度比多相流问题,如 Rayleigh-Taylor 不稳定性、液滴撞击固壁以及液滴对撞和液滴撞击液膜等,验证了算法的正确性。图 2 展示了雷诺数 ( $Re$ ) 为

2 000, 韦伯数 ( $We$ ) 为 800, 密度比 ( $\rho_H/\rho_L$ ) 为 1 000, 直径为 55  $\mu\text{m}$  的液滴以 32 m/s 的速度撞击液膜的界面演化过程<sup>[48]</sup> ( $T$  为无量纲时间)。该计算采用了  $501 \times 501 \times 261$  的网格来精确捕捉液滴撞击过程中“皇冠”的形成、及其上部边缘由于不稳定而逐渐析出多个微小液滴的状态。

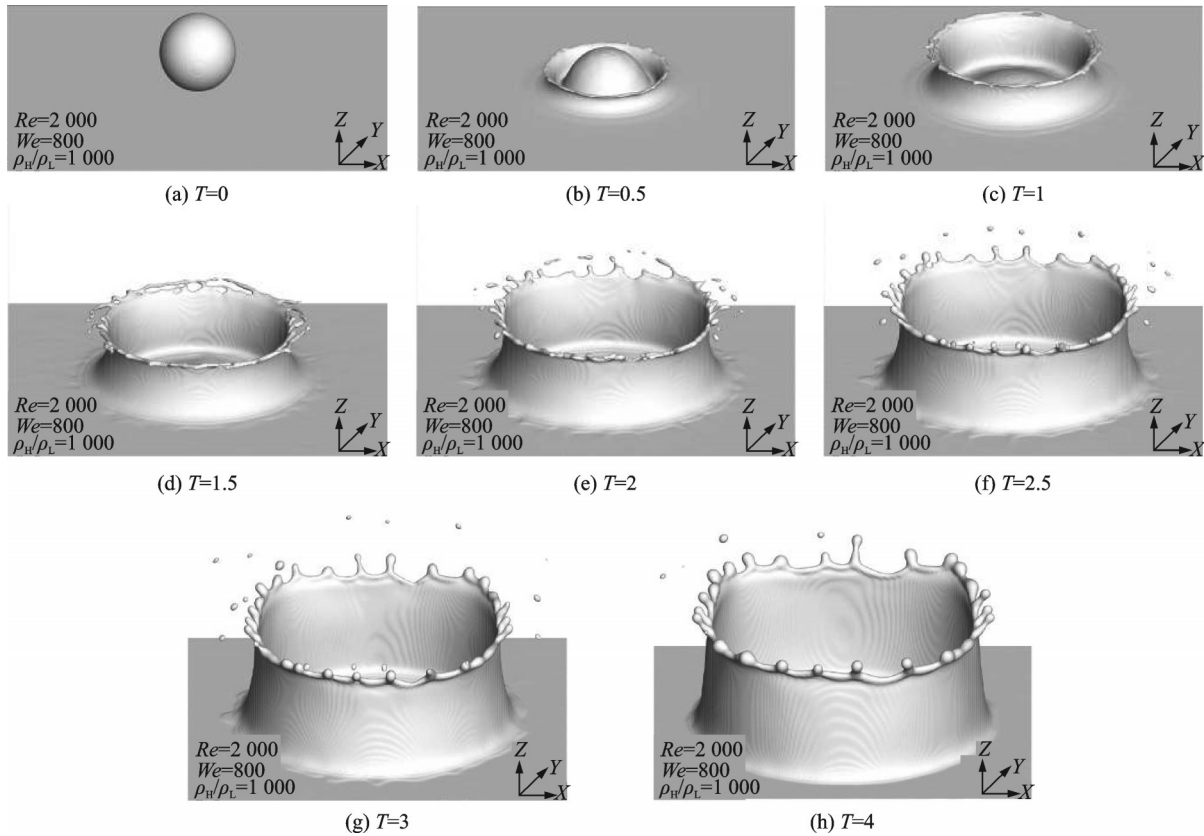


图 2  $Re=2\ 000$  时液滴撞击液膜界面演化过程<sup>[48]</sup>  
 Fig.2 Evolution of interface morphology for droplet splashing on a thin film at  $Re=2\ 000$ <sup>[48]</sup>

(2)该方法在不可压共轭传热问题中的应用。共轭传热问题相比于不可压等温流动问题,增加了用于流场和结构的传热方程,同时动量方程中增加了浮力项。因此,需要引入额外的温度分布函数来计算传热方程的通量。具体细节参见文献[52]。应用该方法,模拟了带肋板的三维圆环自然对流问题,如图 3 所示。图 4 展示了该问题在瑞利数  $Ra = 10^5$  时的温度云图和速度剖面图,该方法的计算结果与 CFD 商业软件 FLUENT 的计算结果吻合良好。计算效率方面,该方法耗时 5.325 h,而 FLUENT 耗时 5.332 h,表明其效率与成熟商业软件相当。

(3)该方法在不可压动边界问题中的应用。为了便于应用于动边界流动问题,本文引入了浸入边界算法 (Immersed boundary method, IBM) 来实施物面边界条件<sup>[53]</sup>。采用 IBM,便可将浸入物体对流场的作用转化为动量方程的恢复力项,然后利用预估步和修正步进行求解。在预估步中,采用基于离散模型的 LBFS 在包含浸入物体内部和外部的整个

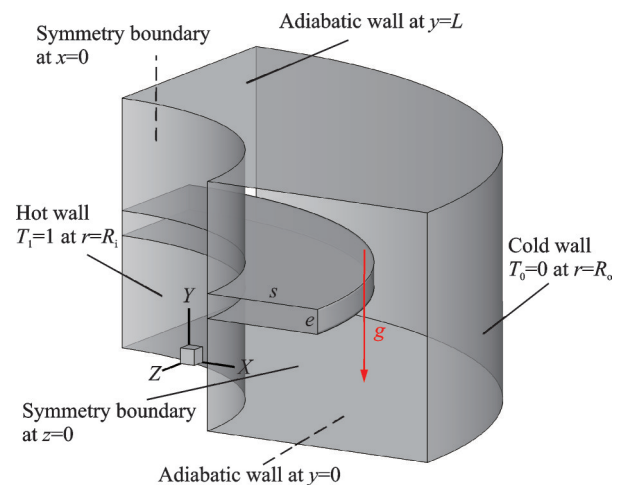


图 3 带肋板的三维圆环自然对流问题示意图<sup>[52]</sup>  
 Fig.3 Schematic diagram of natural convection in a finned 3D annulus<sup>[52]</sup>

计算域中求解不含恢复力项的宏观控制方程。在修正步中,采用强制满足边界条件的 IBM 对浸入物体周围流场进行修正。应用该方法,对于动边界流

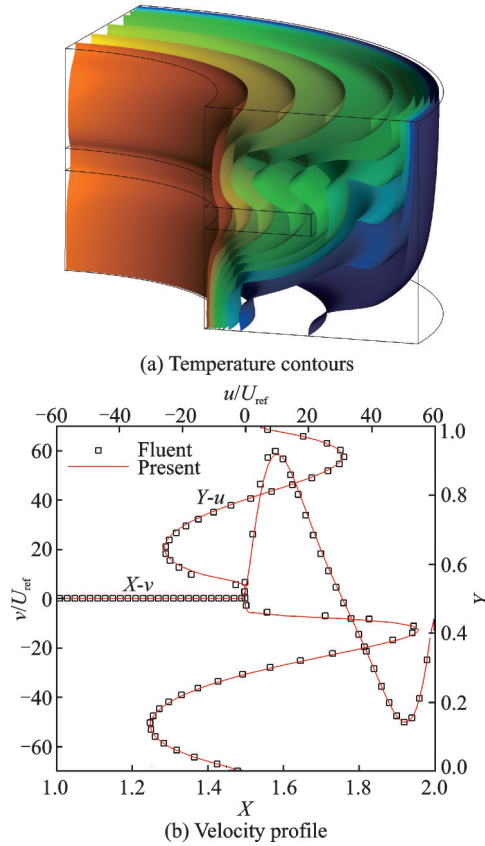


图 4 带肋板的三维圆环自然对流问题在  $Ra = 10^5$  时的温度云图和速度剖面图<sup>[52]</sup>  
 Fig.4 Temperature contours and velocity profile for natural convection in a finned 3D annulus at  $Ra = 10^5$ <sup>[52]</sup>

动问题的求解仍然可以在固定的笛卡尔网格中进行,从而有效避免了网格生成和动网格导致的困难。此外,为了克服自由落体运动等大运动区域问题的极大网格量需求,本文还引入了任意拉格朗日-欧拉方法使笛卡尔网格随物体平动。应用该方法,模拟了无限薄圆盘的自由下落问题<sup>[53]</sup>。该问题的流场形态由质量比  $m^* = m/(\rho_f D^3)$  和伽利略数  $G = \sqrt{|m^* - 1|}gD^3/\nu$  两个无量纲参数表征,式中  $m$  为圆盘质量,  $\rho_f$  为流体密度,  $D$  为圆盘直径,  $g$  为重力加速度,  $\nu$  为运动学黏性系数。图 5 展示了  $G = 100$  和  $m^* = 0.1$  的瞬时涡系结构,此情况下表现为圆盘的摆动模式;图 6 为  $G = 200$  和  $m^* = 0.75$  的瞬时涡系结构,此情况下表现为圆盘的翻腾模式。

### 3 气体动力学通量算法

#### 3.1 算法设计

除了离散的平衡态分布函数,连续的平衡态分布函数也可用于构造 Navier-Stokes 方程的通量计算格式,即气体动力学通量算法。正如 1.2 小节中的介绍,采用 Boltzmann-BGK 模型方程渐进展开解的一阶截断结合 Maxwell 分布函数可以还原可

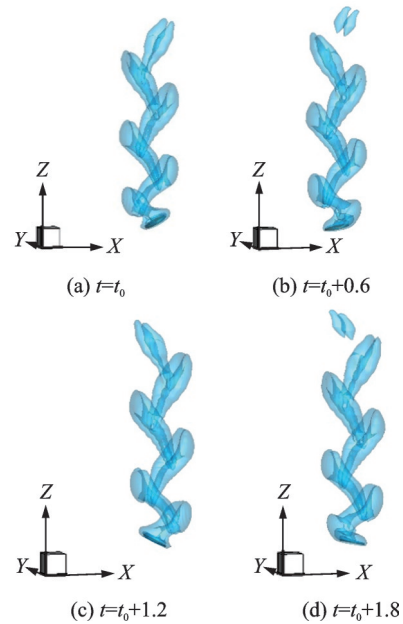


图 5 圆盘在  $G = 100$  和  $m^* = 0.1$  时的摆动模式瞬时涡系结构<sup>[53]</sup>  
 Fig.5 Instantaneous vortical structures for the fluttering disk at  $G = 100$  and  $m^* = 0.1$ <sup>[53]</sup>

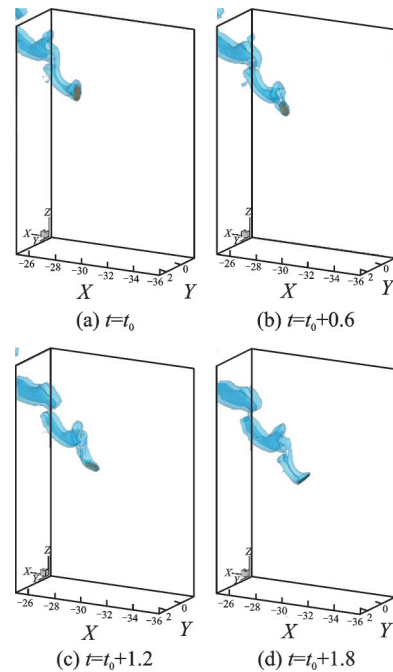


图 6 圆盘在  $G = 200$  和  $m^* = 0.75$  时的翻腾模式瞬时涡系结构<sup>[53]</sup>  
 Fig.6 Instantaneous vortical structures for the tumbling disk at  $G = 200$  and  $m^* = 0.75$ <sup>[53]</sup>

压缩 Navier-Stokes 方程。实际上,推导过程中仅使用了满足 Navier-Stokes 方程的 7 个矩关系,因此 Maxwell 分布函数也可以替换为其他的平衡态分布函数。基于此,作者还发展了圆函数和球函数等简化平衡态分布函数,并据此构造了相应的 GKFS<sup>[54-55]</sup>。不失一般性,该小节采用 Boltzmann-BGK 模型方程渐进展开解的一阶截断

结合 Maxwell 分布函数来构造可压缩 Navier-Stokes 方程的通量计算格式。首先,将式(11~13)改写为

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F} = 0 \quad (23)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{W} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho \mathbf{u} \\ \rho E \end{bmatrix} \\ \mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_\rho \\ F_{\rho u} \\ F_{\rho E} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho \mathbf{u} \\ \rho \mathbf{u} \mathbf{u} + p \mathbf{I} - \nabla \cdot \mathbf{\Pi} \\ (\rho E + p) \mathbf{u} - \kappa \nabla T - \mathbf{u} \cdot \mathbf{\Pi} \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (24)$$

与基于离散模型的 LBFS 类似,采用有限体积法对式(23)在空间网格  $V_i$  进行离散可得

$$\frac{\partial \mathbf{W}_i}{\partial t} = -\frac{1}{V_i} \sum_{j \in N(i)} \mathbf{n}_{ij} \cdot \mathbf{F}_{ij} S_{ij} \quad (25)$$

求解式(25)的关键为计算单元界面通量  $F_{ij}$ 。依据 Boltzmann-BGK 模型方程与上述可压缩 Navier-Stokes 方程之间的联系,  $F_{ij}$  可为

$$\mathbf{F}_{ij} = (F_\rho, F_{\rho u}, F_{\rho E})^T = \langle \xi \psi f \rangle = \langle \xi \psi (f^{\text{eq}} - \tau D f^{\text{eq}}) \rangle \quad (26)$$

其关键在于计算单元界面的一阶截断分布函数。

在推导具体的通量表达式时,由于需要在速度空间积分,可以在单元界面处引入局部坐标系以方便推导和应用。以三维问题为例,可将局部坐标系的 1 方向定义为单元界面的法向,2 方向和 3 方向均为界面的切向,并且 3 个坐标方向构成正交右手坐标系。局部坐标系和全局坐标系中的通量满足如下变换关系

$$\mathbf{n}_{ij} \cdot \mathbf{F}_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_{1x} & n_{2x} & n_{3x} & 0 \\ 0 & n_{1y} & n_{2y} & n_{3y} & 0 \\ 0 & n_{1z} & n_{2z} & n_{3z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{F}}_{ij} \quad (27)$$

式中:  $\mathbf{n}_1 = (n_{1x}, n_{1y}, n_{1z})$ 、 $\mathbf{n}_2 = (n_{2x}, n_{2y}, n_{2z})$  和  $\mathbf{n}_3 = (n_{3x}, n_{3y}, n_{3z})$  分别为 1 方向、2 方向和 3 方向的单位向量。 $\bar{\mathbf{F}}_{ij}$  为局部坐标系下的通量

$$\bar{\mathbf{F}}_{ij} = \langle \xi_1 \bar{\psi} f \rangle = \langle \xi_1 \bar{\psi} (f^{\text{eq}} - \tau D f^{\text{eq}}) \rangle \quad (28)$$

式中:  $\bar{\psi} = (1, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi^2/2)^T$  为局部坐标系下的微观守恒矩矢量;  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  为局部坐标系下的分子速度分量。

与基于离散模型的 LBFS 类似,可将单元界面分布函数的一阶截断表示为

$$f(x_{ij}, \xi, t^n + \delta t) = f^{\text{eq}}(x_{ij}, \xi, t^n + \delta t) - \frac{\tau}{\delta t} (f^{\text{eq}}(x_{ij}, \xi, t^n + \delta t) - f^{\text{eq}}(x_{ij}, \xi, t^n)) \quad (29)$$

其中界面周围的平衡态分布函数  $f^{\text{eq}}(x_{ij} - \xi \delta t, \xi, t^n)$  可采用泰勒级数展开为

$$f^{\text{eq}}(x_{ij} - \xi \delta t, \xi, t^n) = \begin{cases} f_L^{\text{eq}} [1 - a_L \xi_1 \delta t - b_L \xi_2 \delta t - c_L \xi_3 \delta t] & \xi_1 \geq 0 \\ f_R^{\text{eq}} [1 - a_R \xi_1 \delta t - b_R \xi_2 \delta t - c_R \xi_3 \delta t] & \xi_1 < 0 \end{cases} \quad (30)$$

式中:  $f_L^{\text{eq}}$  和  $f_R^{\text{eq}}$  分别为界面左右两侧的平衡态分布函数,其值由相应位置的守恒量计算。系数  $a_{L/R}$ 、 $b_{L/R}$ 、 $c_{L/R}$  为界面左右两侧单元平衡态分布函数的空间导数,可统一表示为

$$\phi = \phi_0 + \phi_1 \xi_1 + \phi_2 \xi_2 + \phi_3 \xi_3 + \phi_4 \xi^2/2 = \phi_a \bar{\psi}_a \quad (31)$$

这些系数可由如下微观-宏观关系确定

$$\begin{cases} \langle a_{L/R} \bar{\psi} f_{L/R}^{\text{eq}} \rangle = \frac{\partial \bar{\mathbf{W}}_{L/R}}{\partial x_1} \\ \langle b_{L/R} \bar{\psi} f_{L/R}^{\text{eq}} \rangle = \frac{\partial \bar{\mathbf{W}}_{L/R}}{\partial x_2} \\ \langle c_{L/R} \bar{\psi} f_{L/R}^{\text{eq}} \rangle = \frac{\partial \bar{\mathbf{W}}_{L/R}}{\partial x_3} \end{cases} \quad (32)$$

式(32)方程右端项为左右两侧单元中心守恒量在局部坐标系下的导数。由此,式(29)可以改写为

$$f(x_{ij}, \xi, t^n + \delta t) = f^{\text{eq}}(x_{ij}, \xi, t^n + \delta t) + \frac{\tau}{\delta t} [f_L^{\text{eq}} H(\xi_1) + f_R^{\text{eq}} (1 - H(\xi_1)) - f^{\text{eq}}(x_{ij}, \xi, t^n + \delta t)] - \frac{\tau}{\delta t} [f_L^{\text{eq}} (a_L \xi_1 \delta t + b_L \xi_2 \delta t + c_L \xi_3 \delta t) H(\xi_1) + f_R^{\text{eq}} (a_R \xi_1 \delta t + b_R \xi_2 \delta t + c_R \xi_3 \delta t) (1 - H(\xi_1))] \quad (33)$$

式中  $H(\xi_1)$  为台阶函数。式(33)中唯一未确定的物理量为  $t^n + \delta t$  时刻界面上的平衡态分布函数  $f^{\text{eq}}(x_{ij}, \xi, t^n + \delta t)$ , 其可由相容性条件来计算

$$\mathbf{W}(x_{ij}, t^n + \delta t) = \langle \bar{\psi} f^{\text{eq}}(x_{ij}, \xi, t^n + \delta t) \rangle = \langle \bar{\psi} f^{\text{eq}}(x_{ij} - \xi \delta t, \xi, t^n) \rangle = \langle \bar{\psi} f_L^{\text{eq}} (1 - a_L \xi_1 \delta t - b_L \xi_2 \delta t - c_L \xi_3 \delta t) \rangle_{\geq 0} + \langle \bar{\psi} f_R^{\text{eq}} (1 - a_R \xi_1 \delta t - b_R \xi_2 \delta t - c_R \xi_3 \delta t) \rangle_{< 0} \quad (34)$$

式中  $\langle \cdot \rangle_{\geq 0}$  和  $\langle \cdot \rangle_{< 0}$  分别表示在速度空间中  $\xi_1 \geq 0$  和  $\xi_1 < 0$  的半空间积分。通过式(34)计算得到单元界面守恒量  $\mathbf{W}(x_{ij}, t^n + \delta t)$ , 并由此计算界面上的平衡态分布函数  $f^{\text{eq}}(x_{ij}, \xi, t^n + \delta t)$ , 则界面上的一阶截断分布函数  $f(x_{ij}, \xi, t^n + \delta t)$  可以完全确定。将  $f(x_{ij}, \xi, t^n + \delta t)$  代入式(28)便可求得局部



坐标系下的 Navier-Stokes 方程通量,应用方程 (27)可变换得到全局坐标系下的通量。在该过程中可以同时计算无黏和黏性通量。

由于采用 Boltzmann-BGK 模型方程渐进展开解的一阶截断结合 Maxwell 分布函数还原得到的 Navier-Stokes 方程普朗特数恒为 1,需要对能量方程的通量进行修正

$$\bar{F}_{ij,\rho E}^{\text{correct}} = \bar{F}_{ij,\rho E} + \left(\frac{1}{Pr} - 1\right)q \quad (35)$$

式中: $\bar{F}_{ij,\rho E}$  为修正前的能量方程通量; $q$  为由  $f(x_{ij}, \xi, t^n + \delta t)$  计算得到的单元界面热通量。另外,为了增强当前格式在强间断附件的稳定性,可在计算碰撞时间时引入人工黏性

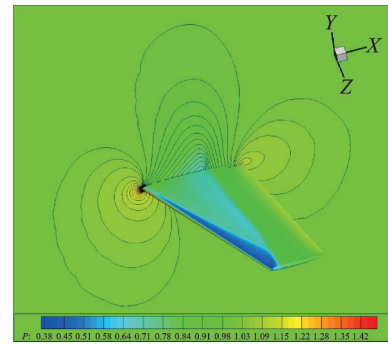
$$\tau = \frac{\mu}{\rho} + \frac{|\rho_L - \rho_R|}{|\rho_L + \rho_R|} \Delta t \quad (36)$$

式中: $\rho_L$  和  $\rho_R$  分别为单元界面左右两侧的压力; $\Delta t$  为式(25)显示推进的最大时间步长。

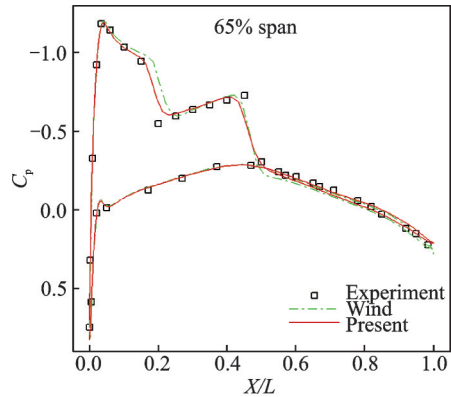
### 3.2 可压缩流应用

由于 Boltzmann-BGK 模型方程渐进展开解的一阶截断结合 Maxwell 分布函数可以还原回 Navier-Stokes 方程,所以采用该渐进展开解来计算 Navier-Stokes 方程的通量等效于在单元界面也求解了等价的流动控制方程。该格式已被成功应用于低速<sup>[56]</sup>、跨声速<sup>[57]</sup>、超/高超声速<sup>[58]</sup>、可压缩流固耦合传热<sup>[59]</sup>、可压缩多组分流<sup>[60]</sup>以及化学反应流<sup>[61]</sup>等流动问题的求解。数值结果表明,该格式具有较好的稳定性,不会出现“红宝石”等非物理解。

(1)该算法在航空气动力计算方面的应用。算例 1 为 M6 机翼跨声速绕流问题<sup>[62]</sup>,马赫数为 0.839 5,来流迎角为  $3.06^\circ$ ,侧滑角为  $0^\circ$ 。采用 NASA 网站上提供的标准网格,网格单元数为 294 912。图 7 给出了机翼的压力云图和截面压力系数  $C_p$  分布。图中可以清晰观察到机翼上表面“λ 形状”的激波,而且截面压力系数分布与实验值也吻合较好。算例 2 为 DLR-F6 翼身组合体含有和不含 FX2B 导流罩两种情形的跨声速绕流问题<sup>[63]</sup>。马赫数为 0.75,雷诺数为  $3 \times 10^6$ ,来流迎角为  $0.49^\circ$ ,侧滑角为  $0^\circ$ 。采用 NASA 网站上提供的标准网格,包含 26 个块和 2 298 880 个网格节点。图 8 展示了 DLR-F6 翼身组合体的压力云图和截面压力系数分布。同样,当前方法的计算结果与实验值以及参考数值解均吻合较好。计算效率方面,当前算法与采用 Roe 格式计算无黏通量结合中心格式计算黏性通量基本相当。



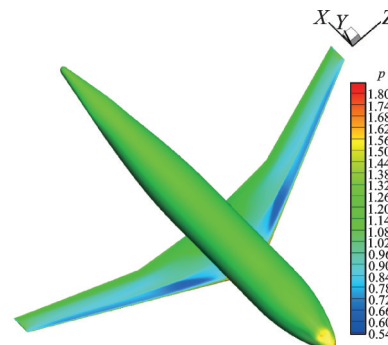
(a) Pressure contours



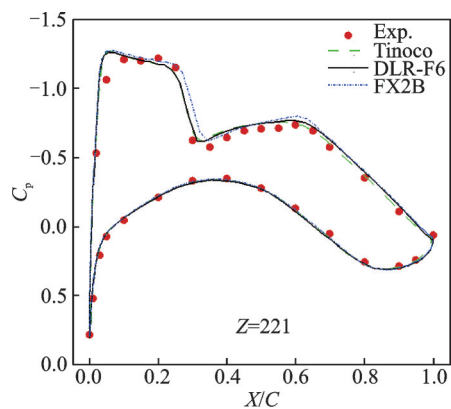
(b) Pressure coefficient distribution

图 7 M6 机翼的压力云图和截面压力系数分布<sup>[62]</sup>

Fig.7 Pressure contours and pressure coefficient distribution at a selected position for M6 wing<sup>[62]</sup>



(a) Pressure contours



(b) Pressure coefficient distribution

图 8 DLR-F6 翼身组合体的压力云图和截面压力系数分布<sup>[63]</sup>

Fig.8 Pressure contours and pressure coefficient distribution at a selected position for DLR-F6 wing-body<sup>[63]</sup>

(2)该方法在考虑化学反应的导弹喷流方面的应用。喷流控制在航空航天领域有重要的应用。高速飞行器在需要进行快速机动时,通过气动控制舵面控制可能会需要一个较长的响应时间,而喷流控制技术可以得到快速响应的直接力,能够满足高机动性的要求。由于喷流与主流之间相互干扰的流场结构十分复杂,研究多化学反应效应下的侧向喷流场对高速飞行器直接力控制手段的工程应用有很大的参考价值。为了考虑化学反应中的不同组分,当前算法需要增加组分控制方程,具体细节可以参见文献[64]。图9给出了应用该方法计算得到的锥-筒-裙结构的普通导弹外形侧喷流场压力云图和使用不同化学反应模型时物面第1层网格的切向速度。图9(b)包含了无化学反应(Nochem)、空气化学反应(Air)、燃烧化学反应(Combustion)和混合化学反应(Mix)4种情形的计算结果。可以看到,不同化学反应模型作用下的物面流场拓扑结构基本一致,在喷口上游,燃烧化学反应模型算例的分离最靠前,而在喷口下游,燃烧化学反应模型算例的分离最靠后。图10给出了导弹外形侧喷流混合化学反应模型反应焓变功率密度及最大焓变反应分布。对于混合化学反应模型,由于该算例喷口附近的燃烧反应的化学反应焓变功率密度比空气化学反应高出约4个数量级,因此其化学反应热量变化与燃烧化学反应模型算例基本一致。

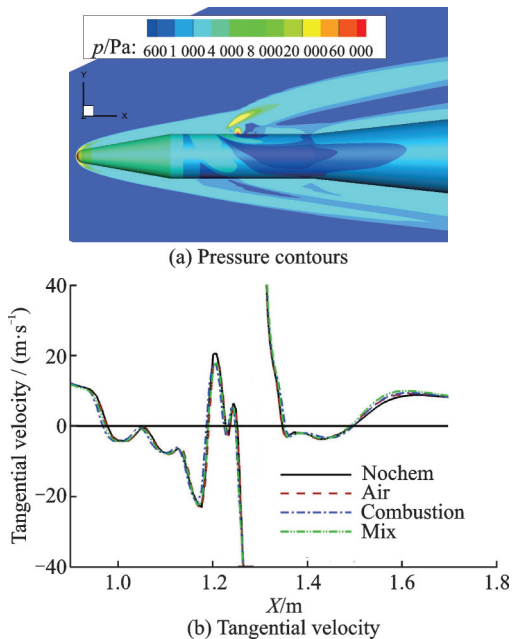


图9 导弹外形侧喷流压力云图和使用不同化学反应模型时物面第一层网格的切向速度<sup>[64]</sup>

Fig.9 Pressure contours and tangential velocity at the first layer grid of wall using different chemical reaction models for missile jet flow<sup>[64]</sup>

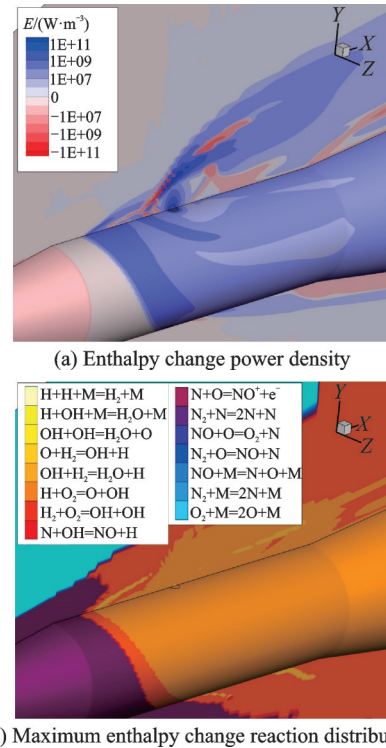


图10 导弹外形侧喷流混合化学反应模型反应焓变功率密度及最大焓变反应分布<sup>[64]</sup>

Fig.10 Enthalpy change power density and maximum enthalpy change reaction distribution for missile jet flow using the mixed chemical reaction model<sup>[64]</sup>

## 4 基于 Grad 分布函数的气体动力学通量算法

### 4.1 算法设计

由于引入了连续性假设,Navier-Stokes 方程仅适合于连续流动问题求解。相比于 Navier-Stokes 方程,Boltzmann 方程不受连续性假设的限制,因而理论上适用于连续到稀薄整个流域范围。但是,采用确定性方法求解 Boltzmann 方程时不仅需要在物理空间离散,还需要在分子速度空间离散,因而三维复杂流动问题求解时会导致维度灾难。实际上 Boltzmann 方程存在对应的宏观守恒律方程,只是宏观控制方程的通量依赖于分布函数的具体形式。显然,对于稀薄程度非常高的流动问题,分布函数的具体形式只能通过求解 Boltzmann 方程来获得。但对于稀薄程度不太高的流动问题,借助于矩方法的思想,可以采用某些具有显式表达式的非平衡分布函数来计算宏观控制方程的通量。基于该策略,本文发展了基于 Grad 分布函数的 GKFS 用于适度稀薄流动问题的求解。该方法仅求解宏观方程式(6),采用有限体积法对方程在空间网格  $V_i$  进行离散可得

$$\frac{\partial W_i}{\partial t} = -\frac{1}{V_i} \sum_{j \in N(i)} n_{ij} \cdot F_{ij} S_{ij} \quad (37)$$

求解式(37)的关键为计算单元界面通量  $F_{ij}$ 。由于  $F_{ij}$  依赖于分布函数,需要通过式(8)进行计算。因此,需要先确定单元界面的分布函数  $f(x_{ij}, \xi, t^n + \delta t)$ 。

为了适用于稀薄流动问题,  $f(x_{ij}, \xi, t^n + \delta t)$  可以由 Boltzmann-BGK 模型方程的特征解来计算。对式(1)沿特征线积分有

$$f(x_{ij}, \xi, t^n + \delta t) - f(x_{ij} - \xi \delta t, \xi, t^n) = \frac{f^{eq}(x_{ij}, \xi, t^n + \delta t) - f(x_{ij}, \xi, t^n + \delta t)}{\tau / \delta t} \quad (38)$$

上述方程可以改写为

$$f(x_{ij}, \xi, t^n + \delta t) = \frac{\tau}{\tau + \delta t} f(x_{ij} - \xi \delta t, \xi, t^n) + \frac{\delta t}{\tau + \delta t} f^{eq}(x_{ij}, \xi, t^n + \delta t) \quad (39)$$

为了计算  $f(x_{ij}, \xi, t^n + \delta t)$ , 需要先获得单元界面周围的初始分布函数  $f(x_{ij} - \xi \delta t, \xi, t^n)$  和界面上的平衡态分布函数  $f^{eq}(x_{ij}, \xi, t^n + \delta t)$ 。  $f^{eq}(x_{ij}, \xi, t^n + \delta t)$  可由相容性条件确定

$$W(x_{ij}, t^n + \delta t) = \langle \psi f^{eq}(x_{ij}, \xi, t^n + \delta t) \rangle = \langle \psi f(x_{ij} - \xi \delta t, \xi, t^n) \rangle \quad (40)$$

由此可见,  $f^{eq}(x_{ij}, \xi, t^n + \delta t)$  也取决于  $f(x_{ij} - \xi \delta t, \xi, t^n)$ 。故  $f(x_{ij} - \xi \delta t, \xi, t^n)$  是计算宏观守恒律式(37)通量的关键。

为了避免在分子速度空间离散, GKFS 采用 Grad 分布函数来近似单元界面周围的初始分布函数  $f(x_{ij} - \xi \delta t, \xi, t^n)$ 。 Grad 13 分布函数可以表示为

$$f_{G13} = f^{eq} \left[ 1 + \frac{\sigma_{ij}}{2pRT} c_i c_j - \frac{q_i c_i}{pRT} \left( 1 - \frac{c^2}{5RT} \right) \right] \quad (41)$$

式中:  $\sigma_{ij}$  为应力张量分量;  $c_i$  为分子最可几热运动速度分量;  $q_i$  为热流分量。由式(41)可知,  $f_{G13}$  可以显式表示为宏观量的函数。通过插值可以求得界面周围的宏观量,进而应用 Grad 分布函数计算  $f(x_{ij} - \xi \delta t, \xi, t^n)$ , 然后计算单元界面守恒量  $W(x_{ij}, t^n + \delta t)$  和平衡态分布函数  $f^{eq}(x_{ij}, \xi, t^n + \delta t)$ , 由此便可获得界面分布函数  $f(x_{ij}, \xi, t^n + \delta t)$ 。最后,式(37)的通量可通过将  $f(x_{ij}, \xi, t^n + \delta t)$  代入式(8)求得。具体细节可以参见文献[65-66]。

通过沿时间方向推进求解宏观守恒律式(37),

可以实现单元中心守恒量的更新。但是在基于 Grad 分布函数的 GKFS 中,还需要更新单元中心的应力和热流,以便计算下一时刻的 Grad 分布函数。受离散速度方法(Discrete velocity method, DVM)的启发,应力和热流也可借助于  $f(x_{ij}, \xi, t^n + \delta t)$  来更新。具体地,单元界面上的应力和热流可以表示为

$$\sigma_{ij} = \langle c_i c_j f(x_{ij}, \xi, t^n + \delta t) \rangle \quad (42)$$

$$q_i = \left\langle \frac{1}{2} c_i c^2 f(x_{ij}, \xi, t^n + \delta t) \right\rangle \quad (43)$$

式中角括号中的指标表示张量的对称和无迹部分。由此,单元中心的应力和热流便可取为单元界面的平均值。应用该方法可以避免直接求解高阶非守恒量的控制方程。

基于 Grad 分布函数的 GKFS 所能求解稀薄流动的克努森数范围依赖于所采用的近似分布函数。为了提高该方法适用的克努森数上限,作者团队还发展了基于 Grad 45 分布函数的 GKFS<sup>[67]</sup>。相比于离散速度方法,基于 Grad 分布函数的 GKFS 无需在分子速度空间离散,因而计算量和内存开销更小,基本上与 Navier-Stokes 方程求解算法保持同一数量级。另外相比于矩方法,由于当前方法仅求解基于守恒律的控制方程,因而避免了复杂高阶非守恒量控制方程的求解,也不需要实施高阶非守恒量的边界条件。但是,由于引入了 Grad 分布函数来近似真实的分布函数,当前方法适用的克努森数范围与基于 Grad 分布函数的矩方法基本一致,不能直接用于全流域流动问题的求解。

## 4.2 稀薄流应用

本节通过两个算例来验证基于 Grad 分布函数的 GKFS 在求解稀薄流问题中的性能。首先考虑不同克努森数下的三维顶盖驱动流问题<sup>[66]</sup>。该问题中,方腔顶盖以  $u_w = 0.15 \sqrt{2RT_0}$  的速度沿  $x$  方向运动,其余物面静止不动,  $T_0$  为参考温度。所有物面采用等温边界条件,物面温度取为  $T_0$ 。图 11 给出了采用当前方法和 DVM 计算得到的不同克努森数时的速度剖面。采用 DVM 计算时,需要在分子速度空间进行离散,离散网格选为  $18 \times 18 \times 18$ , 并使用 Gauss-Hermite 求积来计算宏观量。结果表明克努森数在 0.025~0.1 范围内,当前方法的计算结果均与直接求解 Boltzmann-BGK 模型方程的 DVM 结果一致。由于无需在分子速度空间离散,当前方法的计算效率比 DVM 高近两个数量级,结果如表 1 所示。

算例 2 为热流逸问题,即流动由温度梯度驱

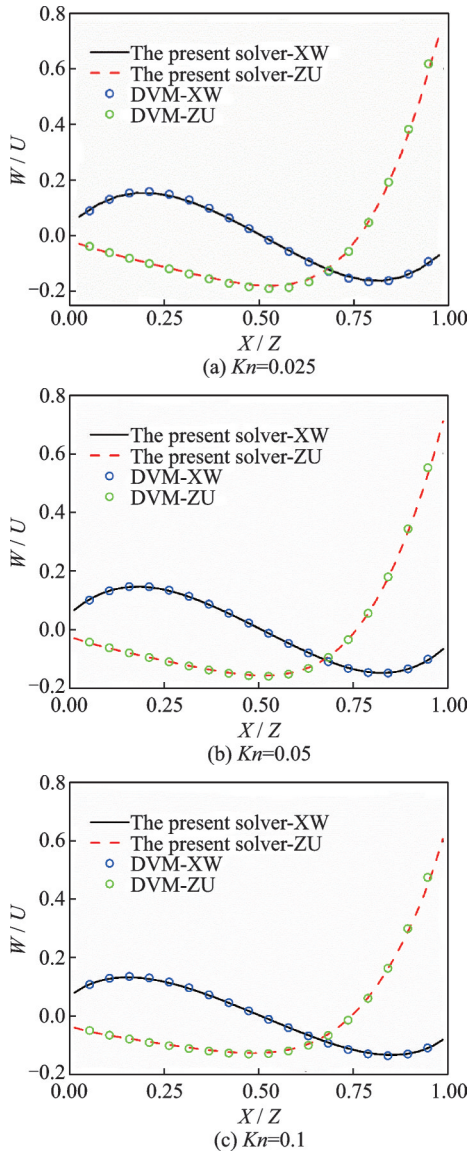


图11 不同克努森数下三维顶盖驱动流的速度剖面图<sup>[66]</sup>  
 Fig.11 Velocity profiles for 3D lid-driven cavity flow at different Knudsen numbers<sup>[66]</sup>

表1 计算时间比较<sup>[66]</sup>

Table 1 Comparison of computational time <sup>[66]</sup> s			
$Kn$	0.025	0.05	0.1
DVM	49 233.39	37 891.40	32 216.01
Present solver	504.06	308.47	360.61

动<sup>[67]</sup>。如图12所示,封闭方腔左右壁面的温度固定为263 K,而上下壁面温度呈先升后降的折线段

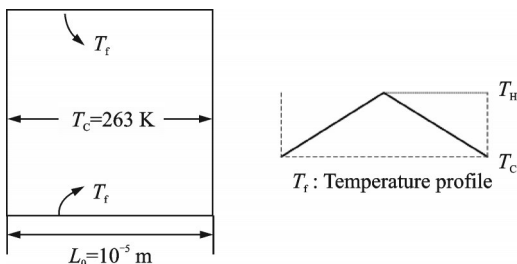
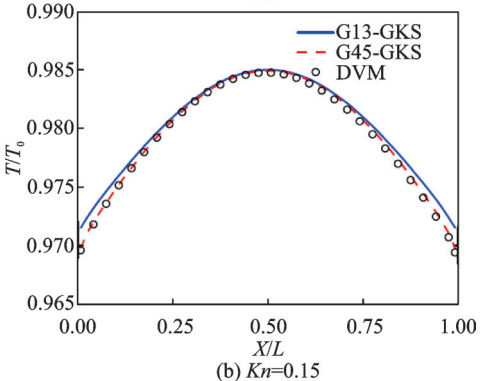
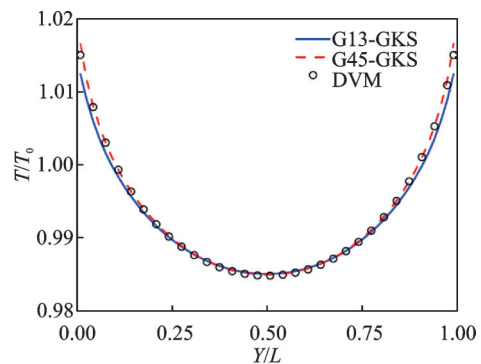
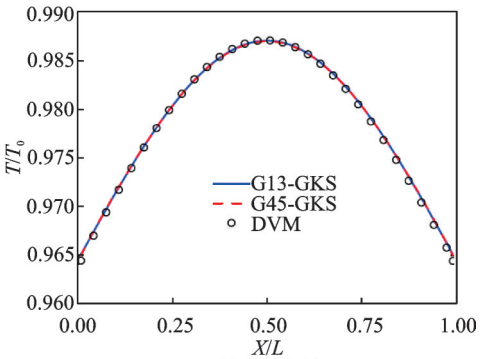
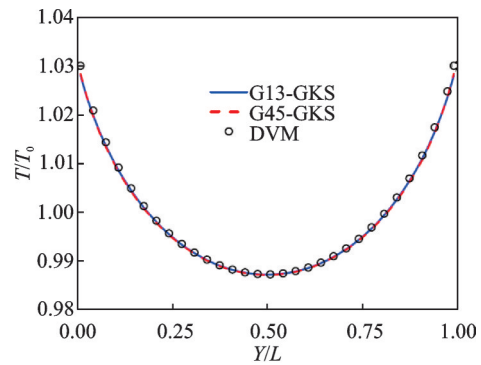


图12 热驱动方腔流示意图<sup>[67]</sup>

Fig.12 Schematic diagram of thermally driven cavity flow<sup>[67]</sup>

分布,中点处最高温为283 K。图13给出了采用当前方法和DVM计算得到的不同克努森数时的温度剖面。采用DVM计算时,需要在分子速度空间进行离散,离散网格选为 $28 \times 28$ ,并使用 Gauss-Hermite 求积来计算宏观量。其他设置方面,当前方法和DVM保持一致。结果表明,在较低克努森数时( $Kn = 0.01$ ),无论是采用 Grad 13 分布函数还是 Grad 45 分布函数,当前方法的结果均与DVM吻合较好。但当克努森数逐渐增大时,



(b)  $Kn=0.15$

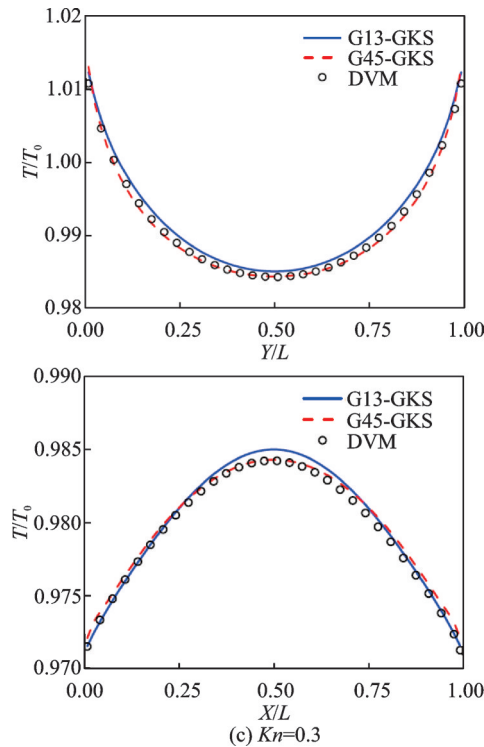


图 13 不同克努森数时热驱动方腔流的垂直中心线(上)和水平中心线(下)温度分布图<sup>[67]</sup>

Fig.13 Temperature profiles along the vertical (upper) and horizontal (lower) center lines for thermally driven cavity flow at different Knudsen numbers<sup>[67]</sup>

Grad 13 分布函数的结果偏离 DVM 结果,但 Grad 45 分布函数的结果仍与 DVM 结果基本吻合。由此表明,随着克努森数的增加,稀薄效应变强,需要选用能合理描述更强非平衡效应的分布函数才能获得准确的计算结果。

## 5 结 论

本文首先简单回顾了传统 CFD 中的几种典型的通量重构算法,它们在单元界面采用数学重构或部分物理重构的方式来计算宏观方程的通量。因而在单元界面处并不能保证完全满足所求解的宏观控制方程,而且无粘和粘性通量通常需要分开计算。随后,本文重点介绍了 LBFS 和 GKFS 及其应用,展示了该算法在连续流以及适度稀薄流动问题中的应用。

(1) Boltzmann-BGK 模型方程渐进展开解的一阶截断正好对应于 Navier-Stokes 方程,这给重构 Navier-Stokes 方程通量提供了另一种思路。在连续流动问题求解时,LBFS/GKFS 正是采用了该渐进展开解的一阶截断来计算 Navier-Stokes 方程通量,因而单元界面也等效于求解了相应的宏观控制方程。应用该方法,可以同时考虑法向和切向速度对通量的贡献,无需采用被动标量的方式来计算切

向通量,并且也可以采用一致的方式计算无粘和粘性通量。无论是离散平衡态分布函数或连续平衡态分布函数,只要它们满足还原 Navier-Stokes 方程所需的矩关系,均可用于构造相应的通量计算格式。目前该类算法在低速到高超声速流动、多相流、动边界等方面均已获得了成功的应用,并且展现出良好的稳定性。但是,该方法基本上还局限于二阶精度,如何将其推广到具有紧致属性的高精度格式值得进一步研究。

(2) 采用 Boltzmann-BGK 模型方程离散特征解结合 Grad 分布函数来计算宏观守恒律方程的通量,可以将 GKFS 推广应用于适度稀薄流动问题的求解。该方法相比于 DVM,可以避免在分子速度空间离散,其计算量和存储量与 Navier-Stokes 方程算法基本上保持在同一量级。另外相比于矩方法,由于当前方法无需求解高阶非守恒量的控制方程,因而更为简单。但是,该方法适用的克努森数上限与所采用的非平衡分布函数相关,为了将其推广到更高的克努森数范围,需要发展适用于更强非平衡效应的分布函数。借助于机器学习手段,从大量 DVM 模拟结果中训练出适用于更强非平衡效应的分布函数是一个非常值得探索的方向。另外,将当前算法与 DVM 搭接,在低克努森数流场区域采用 GKFS 求解,而其他区域采用 DVM 求解,以实现全流域范围的高效计算,具有极大的实用价值。

## 参考文献:

- [1] 吴子牛. 计算流体力学基本原理[M]. 北京:科学出版社, 2001.  
WU Ziniu. Basic principles of computational fluid dynamics[M]. Beijing: Science Press, 2001.
- [2] BLAZEK J. Computational fluid dynamics: Principles and applications[M]. [S.l.]: Butterworth-Heinemann, 2015.
- [3] 邓小刚, 宗文刚, 张来平, 等. 计算流体力学中的验证与确认[J]. 力学进展, 2007, 37(2): 279-288.  
DENG Xiaogang, ZONG Wengang, ZHANG Laiping, et al. Verification and validation in computational fluid dynamics[J]. Advances in Mechanics, 2007, 37(2): 279-288.
- [4] 阎超. 航空 CFD 四十年的成就与困境[J]. 航空学报, 2022, 43(10): 526490.  
YAN Chao. On the achievements and predicaments of CFD in aeronautics for the past forty years[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2022, 43(10): 526490.
- [5] ANDERSON J D, WENDT J. Computational fluid dynamics[M]. New York: McGraw-Hill, 1995.

- [6] 任玉新, 陈海昕. 计算流体力学基础[M]. 北京: 清华大学出版社, 2006.  
REN Yuxin, CHEN Haixin. Fundamentals of computational fluid dynamics[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2006.
- [7] VERSTEEG H K, MALALASEKERA W. An introduction to computational fluid dynamics: The finite volume method[M]. [S.l.]: Pearson Education, 2007.
- [8] 阎超. 计算流体力学方法及应用[M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 2006.  
YAN Chao. Computational fluid dynamics: Methods and applications[M]. Beijing: Beihang University Press, 2006.
- [9] REDDY J N. Introduction to the finite element method [M]. [S.l.]: McGraw-Hill Education, 2019.
- [10] LÖHNER R. Applied computational fluid dynamics techniques: An introduction based on finite element methods[M]. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2008.
- [11] JAMESON A, SCHMIDT W, TURKEL E. Numerical solution of the Euler equations by finite volume methods using Runge Kutta time stepping schemes [C]//Proceedings of the 14th Fluid and Plasma Dynamics Conference. [S.l.]: National Aeronautics and Space Administration, 1981.
- [12] JAMESON A. Origins and further development of the Jameson-Schmidt-Turkel scheme[J]. AIAA Journal, 2017, 55(5): 1487-1510.
- [13] VAN LEER B. Towards the ultimate conservative difference scheme II. Monotonicity and conservation combined in a second-order scheme [J]. Journal of Computational Physics, 1974, 14(4): 361-370.
- [14] VAN LEER B. Towards the ultimate conservative difference scheme IV. A new approach to numerical convection[J]. Journal of Computational Physics, 1977, 23(3): 276-299.
- [15] LIOU M S, STEFFEN J C J. A new flux splitting scheme[J]. Journal of Computational Physics, 1993, 107(1): 23-39.
- [16] LIOU M S. A sequel to AUSM, Part II: AUSM+ up for all speeds[J]. Journal of Computational Physics, 2006, 214(1): 137-170.
- [17] GODUNOV S K. A difference method for numerical calculation of discontinuous solutions of the equation of hydrodynamics[J]. Matematcheskii Sbornik, 1959, 47(3): 271-306.
- [18] TANG H Z, ZHAO N. An estimate of the rate of entropy dissipation of high resolution MUSCL type Godunov schemes[J]. Journal of Computational Mathematics, 1999, 17: 369-378.
- [19] HARTEN A, LAX P D, VAN L B. On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws[J]. SIAM Review, 1983, 25(1): 35-61.
- [20] EINFELDT B. On Godunov-type methods for gas dynamics[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1988, 25(2): 294-318.
- [21] TORO E F, SPRUCE M, SPEARES W. Restoration of the contact surface in the HLL-Riemann solver [J]. Shock Waves, 1994, 4(1): 25-34.
- [22] TORO E F. Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics: A practical introduction[M]. Germany: Springer Science & Business Media, 2013.
- [23] ROE P L. Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes[J]. Journal of Computational Physics, 1981, 43(2): 357-372.
- [24] 樊孝峰, 王江峰, 赵法明. Roe格式在多组元燃烧流场数值模拟中的应用[J]. 南京航空航天大学学报, 2016, 48(3): 347-351.  
FAN Xiaofeng, WANG Jiangfeng, ZHAO Faming. Numerical simulation of multi-component reacting flow using Roe scheme[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Aeronautics, 2016, 48(3): 347-351.
- [25] XU K. A gas-kinetic BGK scheme for the Navier - Stokes equations and its connection with artificial dissipation and Godunov method[J]. Journal of Computational Physics, 2001, 171(1): 289-335.
- [26] KUMAR G, GIRIMAJI S S, KERIMO J. WENO-enhanced gas-kinetic scheme for direct simulations of compressible transition and turbulence[J]. Journal of Computational Physics, 2013, 234: 499-523.
- [27] LI J, ZHONG C W, PAN D X, et al. A gas-kinetic scheme coupled with SST model for turbulent flows [J]. Computers & Mathematics with Applications, 2019, 78(4): 1227-1242.
- [28] ZHAO F, JI X, SHYY W, et al. A compact high-order gas-kinetic scheme on unstructured mesh for acoustic and shock wave computations[J]. Journal of Computational Physics, 2022, 449: 110812.
- [29] 李启兵, 徐昆. 气体动理学格式研究进展[J]. 力学进展, 2012, 42(5): 522-537.  
LI Qibing, XU Kun. Progress in gas-kinetic scheme [J]. Advances in Mechanics, 2012, 42(5): 522-537.
- [30] 徐昆, 陈松泽. 高超声速计算中的气体动理学格式 [J]. 航空学报, 2015, 36(1): 135-146.  
XU Kun, CHEN Songze. Gas kinetic scheme in hypersonic flow simulation[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2015, 36(1): 135-146.
- [31] SHU C, WANG Y, TEO C J, et al. Development of lattice Boltzmann flux solver for simulation of incompressible flows[J]. Advances in Applied Mathematics

- and Mechanics, 2014, 6(4): 436-460.
- [32] SHU C, WANG Y, YANG L M, et al. Lattice Boltzmann flux solver: An efficient approach for numerical simulation of fluid flows[J]. Transactions of Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2014, 30(1): 1-15.
- [33] SHI Y, TANG G H, WANG Y. Simulation of three-component fluid flows using the multiphase lattice Boltzmann flux solver[J]. Journal of Computational Physics, 2016, 314: 228-243.
- [34] YANG L M, SHU C, WU J, et al. Circular function-based gas-kinetic scheme for simulation of inviscid compressible flows[J]. Journal of Computational Physics, 2013, 255: 540-557.
- [35] ZHOU D, LU Z L, GUO T Q. Improvement of computational efficiency of circular function-based gas kinetic scheme by using Jacobian-free Newton-Krylov method[J]. Computers & Fluids, 2018, 161: 121-135.
- [36] LIU Z J, SHU C, CHEN S Y, et al. A novel solver for simulation of flows from continuum regime to rarefied regime at moderate Knudsen number[J]. Journal of Computational Physics, 2020, 415: 109548.
- [37] YUAN Z Y, SHU C, LIU Z J, et al. Variant of gas kinetic flux solver for flows beyond Navier-Stokes level[J]. Physical Review E, 2021, 104(5): 055305.
- [38] LIU W, LIU Y Y, YANG L M, et al. Coupling improved discrete velocity method and G13-based gas kinetic flux solver: A hybrid method and its application for non-equilibrium flows[J]. Physics of Fluids, 2021, 33(9): 092007.
- [39] 吴晓笛, 刘华坪, 陈浮. 基于浸入边界-多松弛时间格子玻尔兹曼通量求解法的流固耦合算法研究[J]. 物理学报, 2017, 66(22): 252-265.  
WU Xiaodi, LIU Huaping, CHEN Fu. A method combined immersed boundary with multi-relaxation-time lattice Boltzmann flux solver for fluid-structure interaction[J]. Acta Physica Sinica, 2017, 66(22): 252-265.
- [40] ZHAN N Y, CHEN R Q, YOU Y C. Discrete gas-kinetic scheme-based arbitrary Lagrangian-Eulerian method for moving boundary problems[J]. Physics of Fluids, 2021, 33(6): 067101.
- [41] BHATNAGAR P L, GROSS E P, KROOK M. A model for collision processes in gases I. Small amplitude processes in charged and neutral one-component systems[J]. Physical Review, 1954, 94(3): 511.
- [42] HOLWAY J L H. New statistical models for kinetic theory: methods of construction[J]. The Physics of Fluids, 1966, 9(9): 1658-1673.
- [43] SHAKHOV E M. Generalization of the Krook kinetic relaxation equation[J]. Fluid Dynamics, 1972, 3(5): 95-96.
- [44] YANG L M, WANG Y, CHEN Z, et al. Lattice Boltzmann and gas kinetic flux solvers: Theory and applications[M]. Singapore: World Scientific, 2020.
- [45] WANG Y, YANG L M, SHU C. From lattice Boltzmann method to lattice Boltzmann flux solver[J]. Entropy, 2015, 17(11): 7713-7735.
- [46] WANG Y, SHU C, TEO C J. Thermal lattice Boltzmann flux solver and its application for simulation of incompressible thermal flows[J]. Computers & Fluids, 2014, 94: 98-111.
- [47] WANG Y, SHU C, HUANG H B, et al. Multiphase lattice Boltzmann flux solver for incompressible multiphase flows with large density ratio[J]. Journal of Computational Physics, 2015, 280: 404-423.
- [48] WANG Y, SHU C, YANG L M. An improved multiphase lattice Boltzmann flux solver for three-dimensional flows with large density ratio and high Reynolds number[J]. Journal of Computational Physics, 2015, 302: 41-58.
- [49] YANG L M, SHU C, CHEN Z, et al. An improved multiphase lattice Boltzmann flux solver for the simulation of incompressible flow with large density ratio and complex interface[J]. Physics of Fluids, 2021, 33(3): 033306.
- [50] YANG L M, SHU C, YANG W M, et al. Simulation of conjugate heat transfer problems by lattice Boltzmann flux solver[J]. International Journal of Heat and Mass Transfer, 2019, 137: 895-907.
- [51] 刘钊, 刘刚, 江雄, 等. 基于浸润边界-格子玻尔兹曼通量求解器的柔性结构流固耦合数值模拟[J]. 空气动力学学报, 2019, 37(5): 705-714.  
LIU Fan, LIU Gang, JIANG Xiong, et al. Fluid-structure interaction simulation for elastic structures based on immersed boundary-lattice Boltzmann flux solver[J]. Acta Aerodynamica Sinica, 2019, 37(5): 705-714.
- [52] YANG L M, SHU C, CHEN Z, et al. Three-dimensional lattice Boltzmann flux solver for simulation of fluid-solid conjugate heat transfer problems with curved boundary[J]. Physical Review E, 2020, 101(5): 053309.
- [53] WANG Y, SHU C, YANG L M, et al. An immersed boundary-lattice Boltzmann flux solver in a moving frame to study three-dimensional freely falling rigid bodies[J]. Journal of Fluids and Structures, 2017, 68: 444-465.
- [54] ZHOU D, LU Z L, GUO T Q, et al. Development of circular function-based gas-kinetic scheme (CGKS) on moving grids for unsteady flows through oscillating cascades[J]. International Journal for Numerical Meth-

- ods in Fluids, 2017, 84(12): 715-736.
- [55] YANG L M, SHU C, YANG W M, et al. A simplified circular function-based gas kinetic scheme for simulation of incompressible flows[J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 2017, 85(10): 583-598.
- [56] YANG L M, SHU C, YANG W M, et al. An immersed boundary-simplified sphere function-based gas kinetic scheme for simulation of 3D incompressible flows[J]. Physics of Fluids, 2017, 29(8): 083605.
- [57] YANG L M, SHU C, WANG Y, et al. Development of discrete gas kinetic scheme for simulation of 3D viscous incompressible and compressible flows[J]. Journal of Computational Physics, 2016, 319: 129-144.
- [58] SUN Y, SHU C, TEO C J, et al. Explicit formulations of gas-kinetic flux solver for simulation of incompressible and compressible viscous flows[J]. Journal of Computational Physics, 2015, 300: 492-519.
- [59] LI J W, WANG J F, YANG L M, et al. A hybrid lattice Boltzmann flux solver for integrated hypersonic fluid-thermal-structural analysis[J]. Chinese Journal of Aeronautics, 2020, 33(9): 2295-2312.
- [60] YANG L M, SHU C, YANG W M, et al. Extension of lattice Boltzmann flux solver for simulation of compressible multi-component flows[J]. Modern Physics Letters B, 2018, 32(12/13): 1840001.
- [61] YANG T P, WANG J F, YANG L M, et al. Development of multi-component generalized sphere function based gas-kinetic flux solver for simulation of compressible viscous reacting flows[J]. Computers & Fluids, 2020, 197: 104382.
- [62] SUN Y, YANG L M, SHU C, et al. A three-dimensional gas-kinetic flux solver for simulation of viscous flows with explicit formulations of conservative variables and numerical flux[J]. Advances in Aerodynamics, 2020, 2(1): 1-28.
- [63] YANG L M, SHU C, WU J. Extension of lattice Boltzmann flux solver for simulation of 3D viscous compressible flows[J]. Computers & Mathematics with Applications, 2016, 71(10): 2069-2081.
- [64] 杨天鹏. 基于格子和连续 Boltzmann 模型的混合反应流场数值模拟方法研究[D]. 南京: 南京航空航天大学, 2020.
- YANG Tianpeng. Research on lattice and continuous Boltzmann models-based flux solvers and their applications for the mixed reacting flowfield[D]. Nanjing: Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2020.
- [65] LIU Z J, YANG L M, SHU C, et al. Explicit formulations of G13-based gas kinetic flux solver (G13-GKFS) for simulation of continuum and rarefied flows[J]. Physics of Fluids, 2021, 33(3): 037133.
- [66] LIU Z J. Development of a novel solver for simulation of flows from the continuum regime to the rarefied regime[D]. Singapore: National University of Singapore, 2021.
- [67] LIU Z J, SHU C, CHEN S Y, et al. Development of explicit formulations of G45-based gas kinetic scheme for simulation of continuum and rarefied flows[J]. Physical Review E, 2022, 105(4): 045302.

(编辑:刘彦东)