第 54 卷第 3 期
2022 年 6 月

南 京 航 空 航 天 大 学 学 报
Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics

Vol. 54 No. 3
Jun. 2022

DOI:10.16356/j.1005-2615.2022.03.016

复合干扰下永磁球形电机的全阶滑模控制

王 松[1], 王群京[1,2], 李国丽[1,3], 文 彦[4,5]

(1.安徽大学电气工程与自动化学院,合肥 230601; 2.安徽大学高节能电机及其控制技术国家地方联合实验室, 合肥 230601; 3.安徽大学工业节电与用电安全安徽省重点实验室, 合肥 230601; 4.安徽大学工业节电与电能质量控制安徽省级协同创新中心, 合肥 230601; 5.安徽大学互联网学院, 合肥 230601)

摘要: 针对受外部干扰和模型不确定性影响的永磁球形电机运动系统,提出一种基于有限时间干扰观测器的全阶滑模控制方法。首先,在复合干扰下建立永磁球形电机的动力学模型,其不确定性包括建模误差和外界干扰。其次,设计有限时间干扰观测器以快速、准确地估计出系统的复合干扰。然后,为永磁球形电机设计了全阶滑模面,理想滑模运动时反映其全阶动态特性,而不是传统滑模控制系统中的降阶动态特性。最后,通过李雅普诺夫定理证明了所提控制方法的闭环系统的稳定性。仿真和实验结果表明所提控制器在复合干扰情况下具有良好的动态特性和抗干扰能力。

关键词: 永磁球形电机;全阶滑模控制;有限时间干扰观测器;轨迹跟踪

中图分类号: TM351　　**文献标志码:** A　　**文章编号:** 1005-2615(2022)03-0489-10

Full-Order Sliding Mode Control of Permanent Magnet Spherical Actuator Under Lumped Disturbances

WANG Song[1], *WANG Qunjing*[1,2], *LI Guoli*[1,3], *WEN Yan*[4,5]

(1. School of Electrical Engineering and Automation, Anhui University, Hefei 230601, China; 2. National Engineering Laboratory of Energy-Saving Motor & Control Technology, Anhui University, Hefei 230601, China; 3. Anhui Key Laboratory of Power Quality, Ministry of Education, Anhui University, Hefei 230601, China; 4. Anhui Collaborative Innovation Center of Industrial Energy-Saving and Power Quality Control, Anhui University, Hefei 230601, China; 5. School of Internet, Anhui University, Hefei 230601, China)

Abstract: A finite-time disturbance observer based full-order sliding-mode control (FTDO-FOSMC) method is proposed for the permanent magnet spherical actuator (PMSA) motion system affected by external disturbances and model uncertaintys, First, the dynamic model of the PMSA is established. The uncertainty includes modeling errors and external disturbances. Second, a finite time disturbance observer is designed to quickly and accurately estimate the system's lumped disturbances. Third, a full-order sliding mode surface is designed for the permanent magnet spherical actuator, which reflects its full-order dynamic characteristics when the ideal sliding mode moves, instead of the reduced-order dynamic characteristics in the traditional sliding mode control system. Finally, the stability of the closed-loop system of the proposed control method is proved by Lyapunov's theorem. The simulation and experiment results show that the proposed controller has good dynamic characteristics and anti-disturbance ability under lumped disturbances.

基金项目: 国家自然科学基金重点项目(51637001);国家重点研发计划(2018YFB0104900)。

收稿日期: 2020-09-18;**修订日期:** 2021-05-14

通信作者: 王群京,男,教授,博士生导师,E-mail:wangqunjing@ahu.edu.cn。

引用格式: 王松,王群京,李国丽,等. 复合干扰下永磁球形电机的全阶滑模控制[J]. 南京航空航天大学学报,2022,54(3):489-498. WANG Song, WANG Qunjing, LI Guoli, et al. Full-order sliding mode control of permanent magnet spherical actuator under lumped disturbances[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics,2022, 54(3):489-498.

Key words: permanent magnet spherical actuator (PMSA); full order sliding mode control; finite time disturbance observer; trajectory tracking

近年来，随着工业技术的快速发展，多自由度球形电机的设计和研究引起了全世界的广泛关注。传统的多自由度伺服装置是通过控制多台单轴电机并结合复杂的齿轮结构来实现的，这不可避免地会导致系统机械结构复杂、体积庞大，造成动态响应慢、精确度降低和缺乏灵活性等问题。为了克服这些缺点，研究人员提出了能在单台电机上实现三自由度运动的球形电机。与传统的多自由度伺服装置相比，球形电机具有结构紧凑、直接驱动和良好的动态性能等优点。

为实现球形电机的多自由度运动，有必要设计具有良好动态性能的控制算法。文献[1]将比例微分(Proportional derivative, PD)控制应用于球形电机中，由于球形电机动力学模型中含有复杂的非线性项，PD控制的有效性难以保证。文献[2]提出了一种计算转矩控制法，用于解耦和线性化球形电机的动力学模型，但其忽略了建模误差和外部干扰，影响了其控制性能。为了避免依赖精确的动力学模型，文献[3-5]提出神经网络识别和模糊控制器的动态解耦算法，但模糊控制计算量较大，限制了其工业应用。除了智能控制和经典控制外，文献[6]提出了自适应反演滑模控制策略，结合新颖趋近率抑制抖振问题，但传统的反演方法将引起“导数项爆炸”，增加微处理器的计算负担。文献[7]提出了一种动态解耦控制策略，通常动态解耦控制依赖高精度的物理模型，不可避免的建模误差很可能导致令人不满的性能。文献[8]提出了基于动态表面法的鲁棒自适应滑模控制，避免了传统反推方法引起的状态导数项爆炸问题，但自适应在线估计存在较大的估计误差和较长的估计过程，应用于强耦合运动系统通常会导致较差的响应。

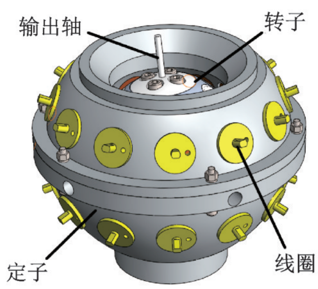
滑模控制是一种鲁棒控制方法，具有对建模误差和不确定性干扰不敏感的优点，已广泛应用于非线性系统中[9-11]。传统的滑模控制由于阶数减少，其理想滑动模态不能完整地表达系统的动态特性，因此提出了全阶滑模控制[12]。近年来，提出了一种利用干扰观测器处理干扰和建模不确定性的方法，随着干扰观测器的发展，滑模控制技术与干扰观测器的结合应用得到了研究人员的广泛关注[13-14]。文献[15]提出了一种有限时间干扰观测器，能够在有限时间内快速、准确地提供跟踪干扰能力。

本文针对一种永磁球形电机运动系统，提出了一种基于有限时间干扰观测器的全阶滑模控制方法。有限时间干扰观测器用来估计复合干扰；设计全阶滑模面，使永磁球形电机的理想滑模运动表达其全阶动态特性；设计连续滑模控制律，在控制输入端补偿其复合干扰，获得良好的跟踪性能和动态特性。最后，通过与PD控制和传统滑模控制仿真对比，验证了所提控制算法的优越性。

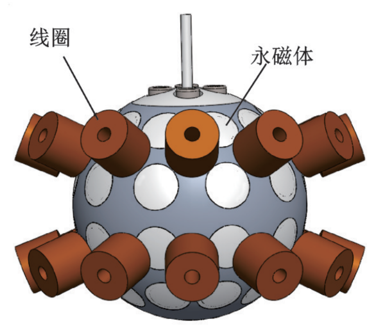
1　永磁球形电机结构及动力学建模

1.1　永磁球形电机结构

文献[16]提出的新型永磁球形电机整体结构如图1(a)所示，转子的内部结构如图1(b)所示。该电机主要由一个球形转子、一个由两个半球壳组成的定子以及固定在转子上的输出轴组成。在转子上沿赤道对称均匀分布了4层永磁体，每层分别有10个钕铁硼材料的永磁体。这些圆柱型的永磁体镶嵌在转子上，N级和S级交错排列。定子上沿赤道均匀镶嵌两层空心线圈，每层共有12个圆柱型线圈。



(a) Overall structure of PMSA with rotor and stator



(b) Structure of a rotor with coils

图1　PMSA的机械结构

Fig.1　Mechanical structure of PMSA

永磁球形电机由转子中的永磁体和定子通电线圈相互作用产生的电磁转矩驱动。在期望的线圈通电驱动控制下，转子能够产生相应的转矩实现其倾斜、俯仰和自旋三自由度运动。实验样机如图2所示。

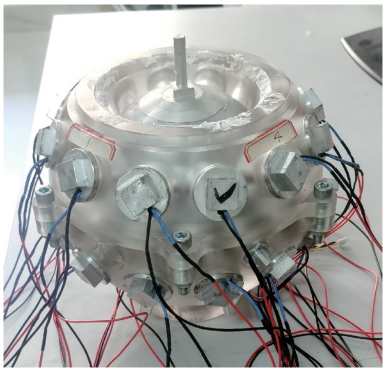


图 2　永磁球形电机实验样机

Fig.2　Experimental prototype of PMSA

1.2　动力学建模

为建立永磁球形电机的动力学模型,引入定子坐标系 XYZ 和转子坐标系 uvw。坐标系 XYZ 位于定子球壳上,坐标系 uvw 固定在转子球体上。转子球所确定的位置变化可以用广义欧拉角(α,β,γ)表示。图 3 描述了转子坐标系 uvw 可由定子坐标系 XYZ 经过 3 次旋转得到。两坐标系之间的旋转变换矩阵 $\boldsymbol{R}_{\mathrm{rs}}$ 如式(1)所示。

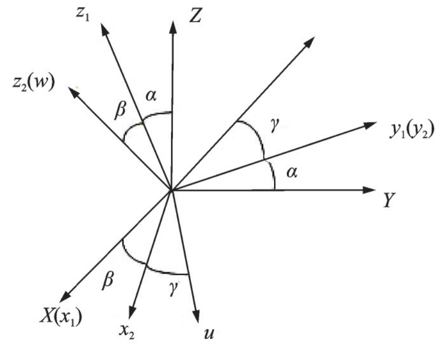


图 3　坐标变换

Fig.3　Coordinate transformation

$$\boldsymbol{R}_{\mathrm{rs}}=\begin{pmatrix} \cos\beta\cos\gamma & \sin\beta\sin\alpha\cos\gamma+\sin\alpha\cos\gamma & -\sin\beta\cos\alpha\cos\gamma+\sin\alpha\cos\gamma \\ -\cos\beta\cos\gamma & -\sin\beta\cos\alpha\cos\gamma+\sin\alpha\cos\gamma & \sin\beta\sin\gamma\cos\alpha+\sin\alpha\cos\gamma \\ \sin\beta & -\sin\alpha\cos\beta & \cos\alpha\cos\beta \end{pmatrix} \tag{1}$$

结合拉格朗日第 2 方程,永磁球形电机的动力学模型为

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}}=\boldsymbol{\tau}-\boldsymbol{\tau}_u-\boldsymbol{\tau}_l \tag{2}$$

式中:$\boldsymbol{q}=[\alpha,\beta,\gamma]^{\mathrm{T}}$ 表示转子位置,其一阶和二阶导数 $\dot{\boldsymbol{q}}$ 和 $\ddot{\boldsymbol{q}}$ 分别对应着角速度和角加速度;$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{q})$ 为惯性矩阵;$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 为哥氏力及离心力矩阵;$\boldsymbol{\tau}=[\tau_\alpha,\tau_\beta,\tau_\gamma]^{\mathrm{T}}$ 为控制转矩力矩;$\boldsymbol{\tau}_u$ 为外界干扰力矩;$\boldsymbol{\tau}_l$ 为外加负载力矩;$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{q})$、$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 为

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{q})=\begin{bmatrix} I_{uv}\cos^2\beta+I_w\sin^2\beta & 0 & I_w\sin\beta \\ 0 & I_{uv} & 0 \\ I_w\sin\beta & 0 & I_w \end{bmatrix} \tag{3}$$

$$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \tag{4}$$

式中

$$\begin{cases} C_{11}=\left(I_w-I_{uv}\right)\dot{\beta}\cos\beta\sin\beta \\ C_{12}=\left(I_w-I_{uv}\right)\dot{\alpha}\cos\beta\sin\beta \\ C_{13}=I_w\dot{\beta}\cos\beta \\ C_{21}=-\left(I_w-I_{uv}\right)\dot{\alpha}\cos\beta\sin\beta \\ C_{22}=0 \\ C_{23}=I_w\dot{\alpha}\cos\beta \\ C_{31}=0 \\ C_{32}=-I_w\dot{\alpha}\cos\beta \\ C_{33}=0 \end{cases} \tag{5}$$

式中:I_u、I_v 和 I_w 分别表示绕 u 轴、v 轴和 w 轴旋转的转动惯量。从永磁球形电机的机械结构容易得出,转子沿输出轴方向上是严格对称的,故 $I_u=I_v\neq I_w$,设 $I_u=I_v=I_{uv}$。

永磁球形电机建模过程中,不可避免地会存在建模误差。为了量化建模误差,实际惯性矩阵和实际哥氏力及离心力矩阵分别定义为

$$\hat{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{q})=\boldsymbol{M}(\boldsymbol{q})+r_1\boldsymbol{M}(\boldsymbol{q}) \tag{6}$$

$$\hat{\boldsymbol{C}}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})+r_2\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) \tag{7}$$

式中:r_1 和 r_2 分别为线性建模误差系数。在实际系统中,这两个系数的范围为 $-1<r_1,r_2<1$。

考虑上述因素,将永磁球形电机动力学模型(2)改写为

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}}=\boldsymbol{\tau}+\boldsymbol{d} \tag{8}$$

式中 $\boldsymbol{d}$ 表示永磁球形电机运动系统中复合干扰力矩

$$\boldsymbol{d}=-\boldsymbol{\tau}_d-\boldsymbol{\tau}_l-r_1\boldsymbol{M}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}}-r_2\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}} \tag{9}$$

其包括外界干扰,负载力矩和模型不确定性。

式(8)中所定义的数学模型,具有以下性质:

性质 1　惯性矩阵 $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{q})$ 是对称,有界和正定的。

性质 2　矩阵 $\dot{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{q})-2\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 是倾斜对称的,且有

$$\dot{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{q})=\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})+\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) \tag{10}$$

2　控制器设计及稳定性分析

永磁球形电机在操作过程中存在包括外界干扰、未知有效载荷和建模误差等复合干扰,这些不

利干扰将会在很大程度上降低永磁球形电机的动态特性。为此，提出一种有限时间干扰观测器，能够使复合干扰的观测值在有限时间内收敛到其实际值。控制器结构如图4所示。

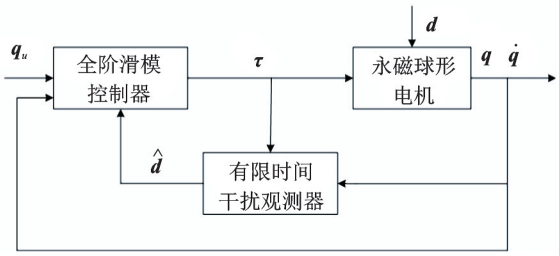


图4　所提控制器流程图

Fig.4　Schematic of the proposed controller

2.1　有限时间干扰观测器

为了设计有限时间干扰观测器，首先，定义永磁球形电机的广义动量为$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{M}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}$，则

$$\dot{\boldsymbol{p}}=\dot{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{M}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} \tag{11}$$

将式(8,10)代入式(11)，可得

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{p}}=&\dot{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{M}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}}=\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}}+\\&\boldsymbol{\tau}+\boldsymbol{d}-\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}}=\boldsymbol{\tau}+\boldsymbol{d}+\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}}\end{aligned} \tag{12}$$

设计如下有限时间干扰观测器[15]来估计复合干扰$\boldsymbol{d}$

$$\begin{cases}\dot{\hat{\boldsymbol{p}}}=\hat{\boldsymbol{d}}+\boldsymbol{\tau}+\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{\Gamma}_1\operatorname{sgn}(\boldsymbol{e}_p)|\boldsymbol{e}_p|^{\alpha_1}\\ \dot{\hat{\boldsymbol{d}}}=\boldsymbol{\Gamma}_2\operatorname{sgn}(\boldsymbol{e}_p)|\boldsymbol{e}_p|^{\alpha_2}\end{cases} \tag{13}$$

式中：$\hat{\boldsymbol{p}}$为$\boldsymbol{p}$的估计值，$\hat{\boldsymbol{d}}$为$\boldsymbol{d}$的估计值，$\boldsymbol{e}_p=\boldsymbol{p}-\hat{\boldsymbol{p}}$，$a_1=2a_2-1$，$1/2<a_2<1$，$\boldsymbol{\Gamma}_1,\boldsymbol{\Gamma}_2\in\mathrm{R}^{3\times3}$的对角正定矩阵。

根据有限时间干扰观测器(13)，使用收敛分析法检测该干扰观测器的稳定性和收敛性。观测误差定义为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{e}}_p=\boldsymbol{e}_d-\boldsymbol{\Gamma}_1\operatorname{sgn}(\boldsymbol{e}_p)\left|\boldsymbol{e}_p\right|^{a_1}\\ \dot{\boldsymbol{e}}_d=\boldsymbol{\Gamma}_2\operatorname{sgn}(\boldsymbol{e}_p)\left|\boldsymbol{e}_p\right|^{a_2}\end{cases} \tag{14}$$

式中$\boldsymbol{e}_d=\boldsymbol{d}-\hat{\boldsymbol{d}}$。根据文献[15]可知，$\boldsymbol{e}_p(t)$、$\boldsymbol{e}_d(t)$会在有限时间内收敛到零，这意味着存在一个时间$t_1>0$，当$t>t_1$时，$\boldsymbol{e}_p(t)=0$，$\boldsymbol{e}_d(t)=0$。

2.2　基于有限时间干扰观测器的全阶滑模控制

基于所提的有限时间干扰观测器，设计基于有限时间干扰观测的全阶滑模控制方法处理复合干扰。首先，定义永磁球形电机系统的跟踪误差为

$$\begin{cases}\boldsymbol{e}=\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}_d\\ \dot{\boldsymbol{e}}=\dot{\boldsymbol{q}}-\dot{\boldsymbol{q}}_d\end{cases} \tag{15}$$

式中$\boldsymbol{q}_d$、$\dot{\boldsymbol{q}}_d$分别为期望的轨迹及其角速度。

设计全阶滑模面如下

$$\boldsymbol{s}=\dot{\boldsymbol{e}}+\int_0^t\left(\boldsymbol{\Lambda}_2\operatorname{sgn}(\dot{\boldsymbol{e}})\left|\dot{\boldsymbol{e}}\right|^{\alpha_2}+\boldsymbol{\Lambda}_1\operatorname{sgn}(\boldsymbol{e})\left|\boldsymbol{e}\right|^{\alpha_1}\right)\mathrm{d}t \tag{16}$$

式中：$\boldsymbol{\Lambda}_1=\operatorname{diag}\{\lambda_{11},\lambda_{12},\lambda_{13}\}$，$\boldsymbol{\Lambda}_2=\operatorname{diag}\{\lambda_{21},\lambda_{22},\lambda_{23}\}$且$\lambda_{ij}>0(i=1,2;j=1,2,3)$满足多项式$p^2+\lambda_{2j}p+\lambda_{1j}(j=1,2,3)$为赫维兹稳定，即多项式的特征值都在复平面的左半边。参数α_1、α_2满足等式：$\alpha_1=\alpha_2/(2-\alpha_2)$，$\alpha_2\in(0,1)$。

设计滑模控制律

$$\begin{cases}\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{M}(\boldsymbol{q})(\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{eq}}+\boldsymbol{\tau}_n)\\ \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{eq}}=\boldsymbol{M}^{-1}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}}-\boldsymbol{M}^{-1}(\boldsymbol{q})\hat{\boldsymbol{d}}+\ddot{\boldsymbol{q}}_d-\\ \qquad\boldsymbol{\Lambda}_2\operatorname{sgn}(\dot{\boldsymbol{e}})\left|\dot{\boldsymbol{e}}\right|^{\alpha_2}-\boldsymbol{\Lambda}_1\operatorname{sgn}(\boldsymbol{e})\left|\boldsymbol{e}\right|^{\alpha_1}\\ \boldsymbol{\tau}_n=-\eta_1\boldsymbol{s}-\eta_2\left|\boldsymbol{s}\right|^{\frac{1}{2}}\operatorname{sgn}(\boldsymbol{s})\end{cases} \tag{17}$$

式中η_1、η_2为正常数。

2.3　稳定性分析

定理1　对于在滑模控制率(17)下具有全阶滑模面(16)的永磁球形电机系统(8)，永磁球形电机的轨迹跟踪误差$\boldsymbol{e}$将在有限时间内收敛到原点。

证明　根据永磁球形电机系统(8)和全阶滑模面(16)获得闭环全阶滑模动态特性。

取全阶滑模面(16)对时间的导数，可得

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{s}}=&\ddot{\boldsymbol{e}}+\boldsymbol{\Lambda}_2\operatorname{sgn}(\dot{\boldsymbol{e}})\left|\dot{\boldsymbol{e}}\right|^{\alpha_2}+\boldsymbol{\Lambda}_1\operatorname{sgn}(\boldsymbol{e})\left|\boldsymbol{e}\right|^{\alpha_1}=\\&\boldsymbol{M}^{-1}(\boldsymbol{q})(\boldsymbol{\tau}+\boldsymbol{d}-\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}})-\ddot{\boldsymbol{q}}_d+\\&\boldsymbol{\Lambda}_2\operatorname{sgn}(\dot{\boldsymbol{e}})\left|\dot{\boldsymbol{e}}\right|^{\alpha_2}+\boldsymbol{\Lambda}_1\operatorname{sgn}(\boldsymbol{e})\left|\boldsymbol{e}\right|^{\alpha_1}\end{aligned} \tag{18}$$

将控制率(17)代入式(18)，得

$$\dot{\boldsymbol{s}}=-\eta_1\boldsymbol{s}-\eta_2\left|\boldsymbol{s}\right|^{\frac{1}{2}}\operatorname{sgn}(\boldsymbol{s})+\boldsymbol{e}_1 \tag{19}$$

式中$\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{M}^{-1}(\boldsymbol{q})(\boldsymbol{d}-\hat{\boldsymbol{d}})=\boldsymbol{M}^{-1}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{e}_d$。根据2.1节可知，观测误差$\boldsymbol{e}_d$将在有限时间内收敛到原点，因此$\boldsymbol{e}_1$将在有限时间内收敛到原点。

(1)证明在有限时间内，$t<t_1$，误差$\boldsymbol{e}_1$不会将滑动变量s推动到无穷大。

为式(19)定义一个函数

$$V_1=\frac{1}{2}\boldsymbol{s}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s} \tag{20}$$

下面，证明式(20)在有限时间内有界。对式(20)求导，得

$$\begin{aligned}\dot{V}_1=&\boldsymbol{s}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{s}}=\\&\boldsymbol{s}^{\mathrm{T}}\left(-\eta_1\boldsymbol{s}-\eta_2\left|\boldsymbol{s}\right|^{\frac{1}{2}}\operatorname{sgn}(\boldsymbol{s})+\boldsymbol{e}_1\right)=\\&-\eta_1\left\|\boldsymbol{s}\right\|^2-\eta_2\left|\boldsymbol{s}^{\mathrm{T}}\right|\left|\boldsymbol{s}\right|^{\frac{1}{2}}+\boldsymbol{s}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_1\leqslant\\&\boldsymbol{s}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_1\leqslant\frac{1}{2}\left(\left\|\boldsymbol{s}\right\|^2+\left\|\boldsymbol{e}_1\right\|^2\right)=\\&K_1V_1+L_1\end{aligned} \tag{21}$$

式中：$K_1=1$，$L_1=\dfrac{1}{2}\left\|\boldsymbol{e}_1\right\|^2$。

式(21)表明：V_1和$\boldsymbol{s}$不会在有限时间内发散到

无穷大。

(2)证明滑动变量s将在有限时间内收敛到$s=0$。

因为滑动变量s不会在有限时间内发散到无穷大,又有e_1将在有限时间内收敛到原点,当$t>t_1$时,可将式(19)简化为

$$\dot{s}=-\eta_1 s-\eta_2|s|^{\frac{1}{2}}\operatorname{sgn}(s) \tag{22}$$

根据文献[17]可知,滑动变量s及其导数$\dot{s}$将在有限时间内收敛到原点。

(3)证明滑动变量s在任意有限时间内不会将误差$\boldsymbol{e}$,$\dot{\boldsymbol{e}}$驱动到无穷大。

根据全阶滑模面(16),可以得到永磁球形电机系统的误差动态特性

$$\ddot{\boldsymbol{e}}=-\boldsymbol{\Lambda}_2\operatorname{sgn}(\dot{\boldsymbol{e}})|\dot{\boldsymbol{e}}|^{\alpha_2}-\boldsymbol{\Lambda}_1\operatorname{sgn}(\boldsymbol{e})|\boldsymbol{e}|^{\alpha_1}+\dot{s} \tag{23}$$

为式(23)定义一个方程

$$V_2=\frac{1}{2}\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}+\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{e}} \tag{24}$$

下面,证明V_2在有限时间内有界,对式(24)求导,得

$$\begin{aligned}\dot{V}_2=&\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{e}}+\dot{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{T}}\ddot{\boldsymbol{e}}=\\&\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{e}}+\dot{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{T}}(-\boldsymbol{\Lambda}_2\operatorname{sgn}(\dot{\boldsymbol{e}})|\dot{\boldsymbol{e}}|^{\alpha_2}-\boldsymbol{\Lambda}_1\operatorname{sgn}(\boldsymbol{e})|\boldsymbol{e}|^{\alpha_1}+\dot{s})\leqslant\\&\|\boldsymbol{e}\|\|\dot{\boldsymbol{e}}\|+\|\dot{\boldsymbol{e}}\|\left(\lambda_2\|\dot{\boldsymbol{e}}\|^{\alpha_2}+\lambda_1\|\boldsymbol{e}\|^{\alpha_1}+\|\dot{s}\|\right)\end{aligned} \tag{25}$$

又有,当$0<\alpha<1$时,不等式$\|x\|^{\alpha}<1+\|x\|$成立,式(25)得

$$\begin{aligned}\dot{V}_2\leqslant&\|\boldsymbol{e}\|\|\dot{\boldsymbol{e}}\|+\lambda_2\|\dot{\boldsymbol{e}}\|(1+\|\dot{\boldsymbol{e}}\|)+\lambda_1\|\dot{\boldsymbol{e}}\|(1+\|\boldsymbol{e}\|)+\|\dot{\boldsymbol{e}}\|\|\dot{s}\|\leqslant\\&\frac{\|\boldsymbol{e}\|^2+\|\dot{\boldsymbol{e}}\|^2}{2}+\frac{\|\dot{\boldsymbol{e}}\|^2+(\lambda_1+\lambda_2)^2}{2}+\lambda_2\|\dot{\boldsymbol{e}}\|^2\lambda_1\frac{\|\boldsymbol{e}\|^2+\|\dot{\boldsymbol{e}}\|^2}{2}+\\&\frac{\|\dot{\boldsymbol{e}}\|^2+\|\dot{s}\|^2}{2}\leqslant\frac{3+\lambda_1+2\lambda_2}{2}(\|\boldsymbol{e}\|^2+\|\dot{\boldsymbol{e}}\|^2)+\\&\frac{1}{2}\left((\lambda_1+\lambda_2)^2+\|\dot{s}\|^2\right)=K_2V_2+L_2\end{aligned} \tag{26}$$

式中:$K_2=3+\lambda_1+2\lambda_2$,$L_2=\frac{1}{2}\left((\lambda_1+\lambda_2)^2+\|\dot{s}\|^2\right)$。$\lambda_1$、$\lambda_2$分别为矩阵$\boldsymbol{\Lambda}_1$和$\boldsymbol{\Lambda}_2$中最大的元素。因此,可知$V_2$有界,这就表明误差$\boldsymbol{e}$、$\dot{\boldsymbol{e}}$不会在有限时间内发散到无穷大。

(4)证明永磁球形电机的轨迹跟踪误差$\boldsymbol{e}$将在有限时间内收敛到原点。

一旦满足理想滑模面$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{0}$,永磁球形电机的误差动态方程为

$$\dot{\boldsymbol{e}}+\int_0^t(\boldsymbol{\Lambda}_2\operatorname{sgn}(\dot{\boldsymbol{e}})|\dot{\boldsymbol{e}}|^{\alpha_2}+\boldsymbol{\Lambda}_1\operatorname{sgn}(\boldsymbol{e})|\boldsymbol{e}|^{\alpha_1})\mathrm{d}t=0 \tag{27}$$

或者为

$$\ddot{\boldsymbol{e}}=-\boldsymbol{\Lambda}_2\operatorname{sgn}(\dot{\boldsymbol{e}})|\dot{\boldsymbol{e}}|^{\alpha_2}-\boldsymbol{\Lambda}_1\operatorname{sgn}(\boldsymbol{e})|\boldsymbol{e}|^{\alpha_1} \tag{28}$$

此时,式(28)是永磁球形电机的全阶动态特性,可以反映出永磁球形电机的全部动力学特征。

如果选择参数α_1、α_2满足不等式$\alpha_1=\alpha_2/(2-\alpha_2)$,$\alpha_2\in(0,1)$,$\boldsymbol{\Lambda}_1$、$\boldsymbol{\Lambda}_2$中的元素确保多项式$p^2+\lambda_{2i}p+\lambda_{1i}(i=1,2,3)$为赫维兹稳定。则系统(28)可以在有限时间内从任何初始条件沿着全阶滑模面收敛到平衡点[12]。

至此,完成了定理1的证明。

3　仿真分析

影响永磁球形电机轨迹跟踪性能的两个重要因素:建模误差和干扰。本节主要通过对这两方面进行仿真以评估所提控制器的性能。

根据第1节中永磁球形电机的实际尺寸和结构参数,仿真计算出其转动惯量

$$I_{uv}=1.548\times10^{-3} \tag{29}$$

$$I_w=1.571\times10^{-3} \tag{30}$$

设期望轨迹为

$$\boldsymbol{q}_d=\begin{bmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sin(\pi t)\\\cos(\pi t)\\0.5\pi t\end{bmatrix}\quad t\in[0,5] \tag{31}$$

系统的初始条件设置为

$$\begin{cases}\boldsymbol{q}_d(0)=[-0.5,0.5,0.5]^{\mathrm{T}}\\\dot{\boldsymbol{q}}_d(0)=[0,0,0]^{\mathrm{T}}\end{cases} \tag{32}$$

根据式(9),将建模误差设置为

$$\Delta\boldsymbol{M}(\boldsymbol{q})+\Delta\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=r\left(\boldsymbol{M}(\boldsymbol{q})+\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\right) \tag{33}$$

外界干扰设置为

$$\boldsymbol{\tau}_d=m\times[\cos(\pi t)\ \sin(\pi t)\ \exp(0.5\pi t)]^{\mathrm{T}} \tag{34}$$

式中m为$(-0.03,0.03)$之间的随机数。

负载力矩设置为

$$\boldsymbol{\tau}_l=L\times[0.3\ 0.3\ 0.3]^{\mathrm{T}} \tag{35}$$

式中，L 为负载力矩的系数。

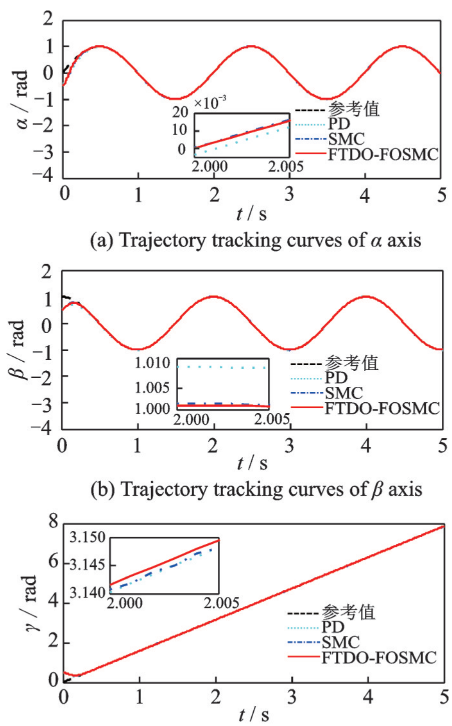
所提控制器参数如下。有限时间干扰观测器增益矩阵选择为 $\boldsymbol{\Gamma}_1=\mathrm{diag}\{200,200,200\}$、$\boldsymbol{\Gamma}_2=\mathrm{diag}\{10\,000,10\,000,10\,000\}$，功率系数选择为 $a_1=0.8$，$a_2=0.9$。全阶滑模面增益矩阵选择 $\boldsymbol{\Lambda}_1=\mathrm{diag}\{56,56,56\}$，$\boldsymbol{\Lambda}_2=\mathrm{diag}\{15,15,15\}$，功率系数选择为 $\alpha_1=11/13$，$\alpha_2=11/12$，$\eta_1=5$，$\eta_2=15$。

在相同的期望轨迹和外界干扰下，3.1节和3.2节分别设计为在相同负载力矩情况下改变模型不确定性和在相同模型不确定下改变负载力矩的仿真实验。为了比较分析，设计了3种控制方案：(1)所提的基于干扰观测器的全阶滑模控制(Finite-time disturbance observer based full-order sliding-mode control FTDO-FOSMC)；(2)PD控制；(3)传统的滑模控制(Sliding mode control，SMC)。

3.1 不同模型不确定性下仿真结果分析

本节将负载力矩系数 L 设置为0，改变建模不确定性系数 r 从0.1～0.5。

图5、6分别显示了3种控制器在永磁球形电30%建模不确定下的轨迹跟踪响应和跟踪误差响应。从图5、6可知，存在模型不确定的情况下，PD控制和传统SMC与本文所提FTDO-FSCM方法相比，实际轨迹与期望轨迹之间存在较大的误差，在2 s时，3种控制方法的欧拉角的稳态误差绝对值分别为0.004，0.008，0.003 1；0.002，0.003，0.001 3和1.2e−5，1.4e−5，1.1e−4。由此可知，本文所提



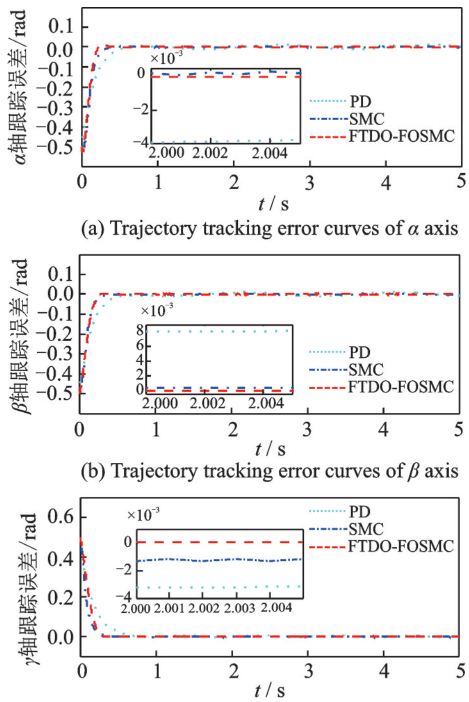
(a) Trajectory tracking curves of α axis

(b) Trajectory tracking curves of β axis

(c) Trajectory tracking curves of γ axis

图5 位置响应($L=0$，$r=0.3$)

Fig.5 Response curves of position ($L=0$, $r=0.3$)



(a) Trajectory tracking error curves of α axis

(b) Trajectory tracking error curves of β axis

(c) Trajectory tracking error curves of γ axis

图6 轨迹跟踪误差响应($L=0$，$r=0.3$)

Fig.6 Response curves of tracking error ($L=0$, $r=0.3$)

控制方法具有更好的跟踪性能，实际轨迹非常接近期望轨迹。

为了更直观地比较3个控制器的性能，图7给出了永磁球形电机在3种控制器作用下稳态误差的均方根误差(Root mean square error，RMSE)，其中，负载系数 $L=0$，建模不确定性系数 r 从0.1～0.5。从图7可知，当建模不确定系数 $r=0.3$ 时，在本文设计的FTDO-FOSMC控制，PD控制和传统SMC的控制下，其欧拉角的稳态误差的均方根误差分别为6.3e−6，6.5e−6，1.0e−5；7.2e−3，7.0e−3，4.5e−3和1.5e−3，2.9e−4，1.e−3。由此可知，在FTDO-FOSMC控制策略下，永磁球形电机的跟踪误差收敛精度远大于PD控制方法和传统SMC方法；且随着 r 的增大，使用FTDO-FOSMC的系统的稳态误差的RMSE变化要小于使用PD控制方法和传统SMC方法。表明在建模不确定下本文设计的FTDO-FOSMC具有很强的适应性和鲁棒性。

3.2 不同负载力矩下仿真结果分析

本节中，将建模不确定性系数 r 设置为0.2，负载力矩系数 L 从1～5变化。

图8、9分别显示了3种控制器在永磁球形电机负载力矩系数 $L=3$ 时，轨迹跟踪响应和跟踪误差响应。结果表明在PD控制和传统SMC的控制下，存在较大稳态误差，其欧拉角 α、β、γ 的最大稳态误差绝对值分别为0.015 8、0.014 7、0.030 2和0.006、0.001 4、0.006 3。而在相同条件下，使用

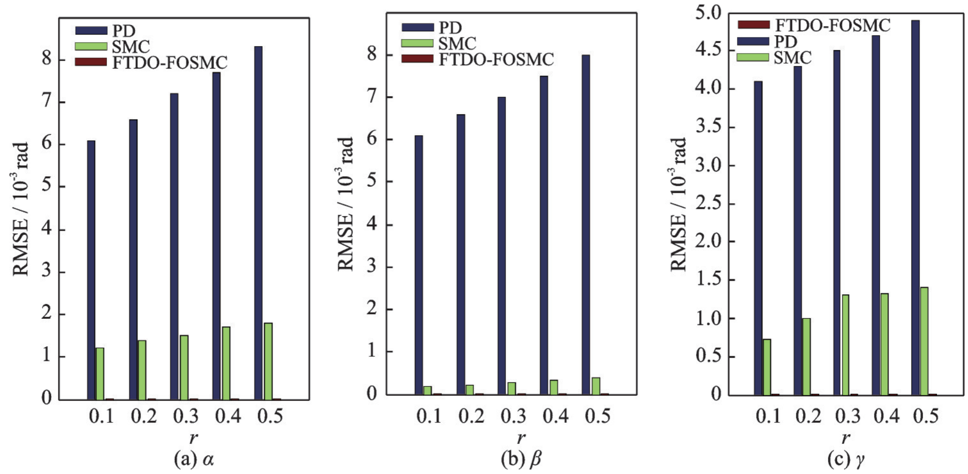


图 7　3 种控制器下轨迹跟踪误差的均方根误差($L=0$)

Fig.7　RMSE of trajectory tracking error under three controllers ($L=0$)

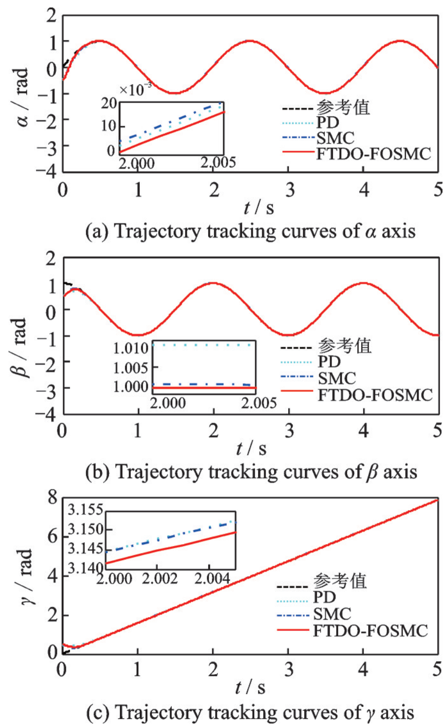


图 8　位置响应($L=3$, $r=0.2$)

Fig.8　Response curves of position ($L=3$, $r=0.2$)

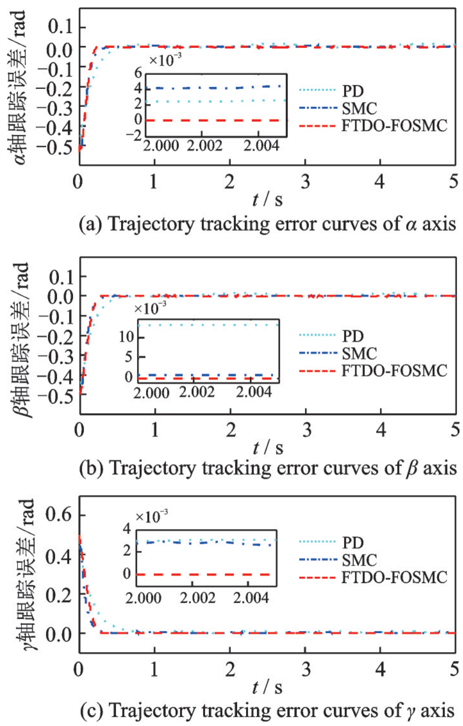


图 9　轨迹跟踪误差响应($L=3$, $r=0.2$)

Fig.9　Response curves of tracking error ($L=3$, $r=0.2$)

FTDO-FOSMC,其欧拉角稳态误差绝对值不大于 5.3e−5,1.3e−4,1.8e−4。

图 10 给出了负载转矩系数 L 从 1~5 时,3 种控制器下稳态误差的均方根误差。显然,FTDO-FOSMC 的收敛精度在 3 种控制器中最高。例如,当 $L=3$ 时,在 FTDO-FOSMC 控制下,欧拉角 α、β、γ 的稳态误差的 RMSE 为 6.2e−6、6.6e−6、1.0e−5。而使用 PD 控制和传统 SMC 的控制下,其稳态误差的 RMSE 分别为 9.0e−3、8.2e−3、7.8e−3 和 3.0e−3、9.5e−4、2.9e−3。仿真结果验证了所提控制器在外部载荷下轨迹跟踪的准确性和鲁棒性。

更进一步,图 11 为在所提控制器、PD 控制和传统 SMC 下控制力矩输入量。显而易见,采用 FTDO-FOSMC 控制时,系统在 3 个方向上输入的控制力矩曲线均较为平滑,能够有效抑制抖振。而采用传统 SMC 控制时,输出的控制力矩则存在较大程度的抖振现象。PD 控制的初始转矩为所提控制器的 3 倍以上,抖振情况严重时,必然会对电机本体造成损害,同时会降低系统的轨迹跟踪精度,增大控制难度。较大的初始转矩将增大控制硬件负担。

3.3　实验

图 12 显示的实验平台用于验证所提控制策略的有效性,其主要由永磁球形电机样机、上位机、位

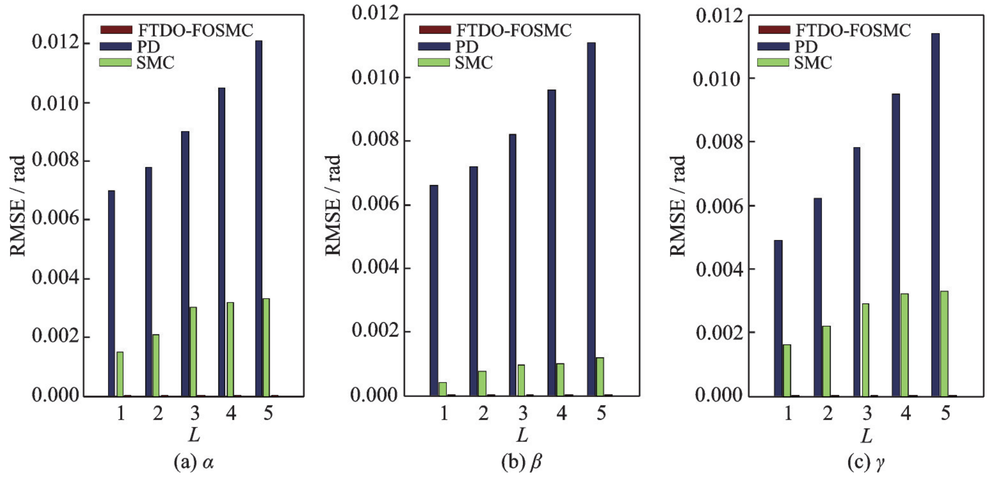


图 10 3种控制器下轨迹跟踪误差的均方根误差(r=0.2)

Fig.10 RMSE of trajectory tracking error under three controllers (r=0.2)

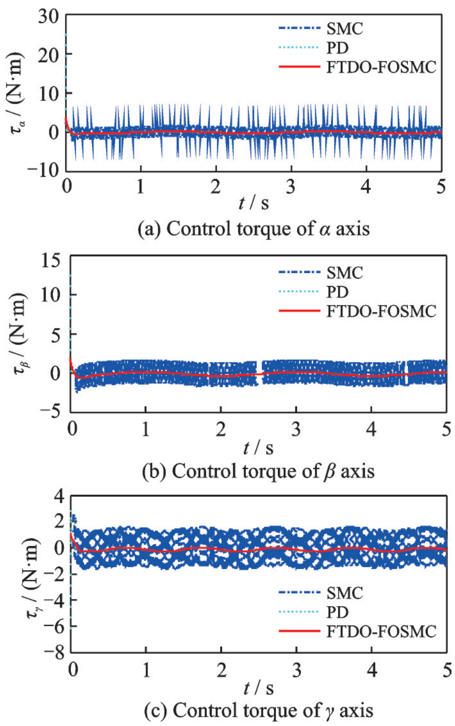


图 11 控制力矩输入 (L=3, r=0.2)

Fig.11 Control torque input (L=3, r=0.2)

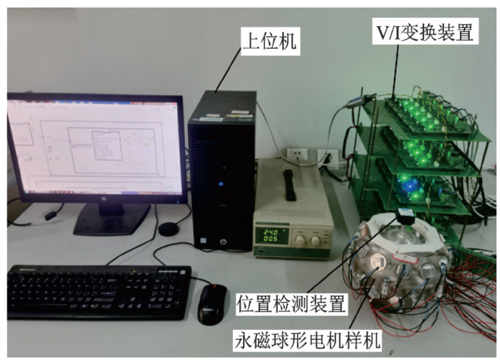


图 12 实验平台

Fig12 Experimental platform

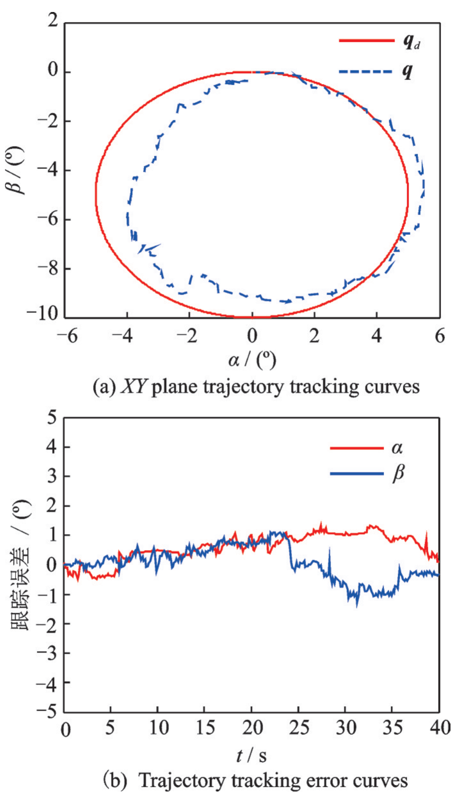


图 13 PD控制下轨迹跟踪响应

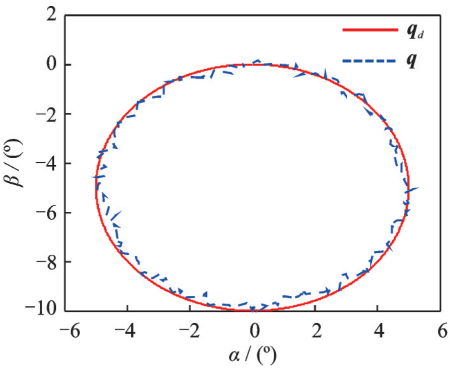
Fig.13 Trajectory tracking response under PD control

置检测装置和电流驱动装置组成。在实验中,为了易于观察控制性能,选择在XY平面中执行圆形轨迹,其轨迹为

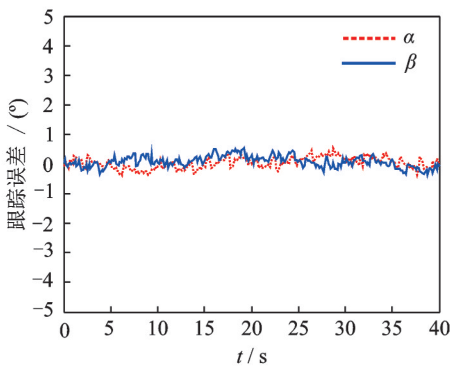
$$q_d=\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\sin(0.05\pi t)\\ 5\cos(0.05\pi t)-5\\ 0\end{bmatrix}\quad t\in[0,40] \tag{36}$$

实验中,将FTDO-FOSMC控制与PD控制相比较研究。图13(a,b)分别显示了PD控制的轨迹跟踪和相应的跟踪误差。显然欧拉角α,β的轨迹跟踪误差最大值均大于1.1°,跟踪性能较差。图14(a)显示了FTDO-FOSMC控制的轨迹跟踪性能,

图14(b)显示了其轨迹跟踪误差,由图14可知,实际轨迹较符合期望轨迹,并且欧拉角α、β的最大轨迹跟踪误差均小于0.63°。实验结果表明,所提控制器对复合干扰进行了有效的补偿,具有良好的鲁棒性和轨迹跟踪性能。



(a) *XY* plane trajectory tracking curves



(b) Trajectory tracking error curves

图14　FTDO-FOSMC控制下轨迹跟踪响应

Fig.14　Trajectory tracking response under FTDO-FOSMC control

4　结　　论

本文主要研究受复合干扰影响下的永磁球形电机轨迹跟踪控制。针对复合干扰,提出了一种基于有限时间干扰观测器的全阶滑模控制算法。有限时间干扰观测器对复合干扰进行了实时估计,全阶滑模控制算法使永磁球形电机的理想滑模运动具有完整的动态特性。仿真结果表明,在不同的复合干扰下,所提出的控制算法能够以较小的误差实现轨迹跟踪,具有良好的鲁棒性和抗干扰能力,并能够有效抑制控制输入的抖振现象。实验结果表明,使用所提控制算法稳态轨迹跟踪误差小于0.63°,比常规的PD控制算法减少约50%。因此,所提控制算法能够实现永磁球形电机良好的跟踪性能,为永磁球形电机未来在工程中的应用奠定基础。

参考文献:

[1]　SON H, LEE K. Control system design and input shape for orientation of spherical wheel motor[J]. Control Engineering Practice, 2014, 24: 120-128.

[2]　WANG W, WANG J, JEWELL G W, et al. Design and control of a novel scpherical permanent magnet actuator with three degrees of freedom[J]. IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, 2003, 8(4): 457-468.

[3]　过希文,王群京,李国丽,等.基于摩擦补偿的永磁球形电机自适应模糊控制[J].中国电机工程学报,2011,31(15):75-81.
GUO Xiwen, WANG Qunjing, LI Guoli, et al. Adaptive fuzzy control for permanent magnet spherical motor based on friction compensation[J]. Proceedings of the CSEE, 2011, 31(15): 75-81.

[4]　XIA Changliang, CHEN Guo, SHI Tingna. A neural-network-identifier and fuzzy-controller-based algorithm for dynamic decoupling control of permanent-magnet spherical motor[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2010, 57(8): 2868-2878.

[5]　YAN L, ZHANG L, ZHU B, et al. Single neural adaptive controller and neural network identifier based on PSO algorithm for spherical actuators with 3D magnet array[J]. Rev Sci Instrum, 2017,88(10): 1-12.

[6]　过希文,王群京,李国丽,等.永磁球形电机的自适应反演滑模控制[J].南京航空航天大学学报,2014,46(1):59-64.
GUO Xiwen, WANG Qunjing, LI Guoli, et al. Adaptive backstepping sliding mode control in permanent magnet spherical motor[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2014, 46(1): 59-64.

[7]　LIU Jingmeng, DENG Huiyang, CHEN Weihai, et al. Robust dynamic decoupling control for permanent magnet spherical actuators based on extended state observer[J]. IET Control Theory & Applications, 2017, 11(5): 619-631.

[8]　WEN Yan, LI Guoli, WANG Qunjing, et al. Robust adaptive sliding-mode control for permanent magnet spherical actuator with uncertainty using dynamic surface approach[J]. Journal of Electrical Engineering & Technology, 2019, 14(6): 2341-2353.

[9]　LIU Jingmeng, DENG Huiyang, HU Cungang, et al. Adaptive backstepping sliding mode control for 3-DOF permanent magnet spherical actuator[J]. Aerospace Science and Technology, 2017, 67: 62-71.

[10]　李洪凤,柳文俊.永磁球形电机的少保守性滑模控制[J].控制理论与应用,2018,35(2):137-145.
LI Hongfeng, LIU Wenjun. Less conservative sliding mode control of permanent magnet spherical motor [J]. Control Theory & Applications, 2018,35(2):137-145.

[11]　彭麒麟,宗群,王丹丹,等.基于连续螺旋滑模的无人机分布式编队控制[J].南京航空航天大学学报,

2019,51(6): 778-784.
PENG Qilin, ZONG Qun, WANG Dandan, et al. Distributed formation control of uavs based on continuous spiral sliding mode[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2019,51(6):778-784.

[12] FENG Yong, HAN Fengling, YU Xinghuo. Chattering free full-order sliding-mode control[J]. Automatica, 2014, 50(4): 1310-1314.

[13] FANG Xing, LIU Fei. A finite-time disturbance observer based full-order terminal sliding-mode controller for manned submersible with disturbances[J]. Mathematical Problems in Engineering, 2018,2018:1-11.

[14] 都延丽,尹佳杰,孟亦真,等.高超声速飞行器自适应抗饱和再入控制[J].南京航空航天大学学报,2015,47(6): 833-841.
DU Yanli, YIN Jiajie, MENG Yizhen, et al. Adaptive reentry control for hypersonic vehicles with saturation[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2015,47(6): 833-841.

[15] CAO Pengfei, GAN Yahui, DAI Xianzhong. Finite-time disturbance observer for robotic manipulators[J]. Sensors, 2019, 19(8): 1943-1954.

[16] QIAN Zhe, WANG Qunjing, JU Lufeng, et al. Torque modeling and control algorithm of a permanent magnetic spherical motor[C]//Proceedings of the 12th International Conference on Electrical Machines and Systems. Tokyo, Japan: IEEJ Industry Applications Society,2009:944-949.

[17] BHAT S P, BERNSTEIN D S. Geometric homogeneity with applications to finite-time stability[J]. Mathematics of Control, Signals and Systems, 2005, 17(2): 101-127.

(编辑:陈珺)