

DOI:10.16356/j.1005-2615.2021.03.017

## 具有指数衰减振荡型概率密度变化规律的产品寿命分布模型

刘永明<sup>1</sup>, 赵帅帅<sup>1</sup>, 赵转哲<sup>1</sup>, 陈 玉<sup>1</sup>, 赵宏伟<sup>2</sup>

(1. 安徽工程大学机械与汽车工程学院, 芜湖 241000; 2. 安徽师范大学物理与电子信息学院, 芜湖 241000)

**摘要:** 传统的机械产品可靠性模型大多忽略了周期性故障引起的概率密度的振荡特征, 从而影响了模型的精度。在传统寿命模型的基础上, 构建指数衰减振荡分布的可靠性模型及相应的可靠度、失效率以及平均寿命计算模型, 并研究衰减系数、振荡幅值和振荡角频率等参数对概率分布特征的影响。运用建立的概率分布模型对某型叉车搭载的液力自动变速箱故障时间数据进行拟合, 并与指数分布模型、三参数威布尔模型和“浴盆曲线”模型拟合结果进行对比。对比结果表明, 建立的指数衰减振荡分布模型能够较好地描述该液力变速箱的无故障工作时间概率分布特征, 并且采用该模型可以获得较小的拟合均方根误差。

**关键词:** 可靠性; 寿命概率分布; 指数衰减振荡; 参数估计

中图分类号: TB114; TH122 文献标志码: A 文章编号: 1005-2615(2021)03-0449-06

## Life Distribution Model of Products with Variable Probability Density of Exponential Attenuation Oscillation

LIU Yongming<sup>1</sup>, ZHAO Shuaishuai<sup>1</sup>, ZHAO Zhuanzhe<sup>1</sup>, CHEN Yu<sup>1</sup>, ZHAO Hongwei<sup>2</sup>

(1. School of Mechanical and Automotive Engineering, Anhui Polytechnic University, Wuhu 241000, China; 2. School of Physics and Electronic Information, Anhui Normal University, Wuhu 241000, China)

**Abstract:** Most of traditional reliability models for traditional mechanical products ignore the oscillation characteristics of probability density caused by periodic faults, which affects the accuracy of the models. The reliability model of the exponential attenuation oscillation distribution and the corresponding reliability, failure rate, and average life calculation models are constructed on the basis of the traditional life model. Then, the effect of parameters including the attenuation coefficient, oscillation amplitude, oscillation angular frequency on the probability distribution characteristics is studied. As an example, the failure time data of automatic transmission of a forklift truck are fitted with the proposed probability distribution model. And the fitting results are compared with those of the exponential distribution model, the three-parameter Weibull model and the bathtub-shaped curve model. The results show that the probability model can better describe the probability distribution characteristics of the fault-free working time of automatic transmission, and the model can obtain a smaller root mean square error.

**基金项目:** 安徽工程大学引进人才科研启动基金(2019YQQ004)资助项目; 安徽省自然科学基金面上(1808085ME127)资助项目; 安徽省智能机器人信息融合与控制工程实验室开放课题(IFCIR2020001)资助项目; 工业装备质量大数据工业和信息化部重点实验室开放课题(2021-IEQBD-05)资助项目。

**收稿日期:** 2019-12-23; **修订日期:** 2020-04-22

**通信作者:** 赵转哲, 男, 博士, 副教授, E-mail: zhuanzhe727@ahpu.edu.cn。

**引用格式:** 刘永明, 赵帅帅, 赵转哲, 等. 具有指数衰减振荡型概率密度变化规律的产品寿命分布模型[J]. 南京航空航天大学学报, 2021, 53(3): 449-454. LIU Yongming, ZHAO Shuaishuai, ZHAO Zhuanzhe, et al. Life distribution model of products with variable probability density of exponential attenuation oscillation[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2021, 53(3): 449-454.

**Key words:** reliability; life probability distribution; exponential attenuation oscillation; parameter estimation

寿命分布是描述机械产品和电子产品失效数据的分布规律和可靠性的重要方法,在寿命数据分析、可靠性设计、疲劳可靠性分析、维修决策、保修策略制定等方面得到了广泛的应用<sup>[1-2]</sup>。寿命分布决策的准确性直接影响到产品可靠性分析、使用寿命评定、风险评估、维修决策制定等效果。

目前关于机械产品寿命分布的研究主要以 Weibull 等<sup>[3-4]</sup>开发的三参数威布尔分布模型为主,该模型可以描述早期故障、偶发故障和耗损性故障,适用于复杂设备故障分布,在可靠性领域得到广泛的应用。多年来,国内外学者从不同角度对三参数威布尔模型进行了研究<sup>[5-12]</sup>。Cordeiro 等<sup>[5]</sup>提出了一种新的指数威布尔分布模型,并研究了该模型的概率密度函数和失效率函数。Wang 等<sup>[6]</sup>提出了一种基于核主成分分析和威布尔比例风险模型的滚动轴承可靠性评估方法,减小了可靠性评估中同一类型轴承在制造、安装、工作条件等方面的差异。Freels 等<sup>[7]</sup>提出两参数威布尔分布的几种修改方式,用于分析“浴盆”型寿命分布。Baloui<sup>[8]</sup>基于模糊威布尔和组件寿命,建立了模糊可靠性函数。南东雷等<sup>[9]</sup>提出使用蒙特卡洛方法结合极大似然估计法对三参数威布尔分布模型进行参数点估计数值求解。位林营等<sup>[10]</sup>提出了基于指数威布尔分布的复杂电子系统使用可靠度建模方法,可动态描述系统可靠度变化。

然而,并不是所有的机械产品寿命分布曲线都具有威布尔分布的形状特征,工程实际中复杂产品的很多故障是具有周期性和振荡型的,其寿命分布因会呈现出衰减振荡的变化规律,即随着使用时间的增加产品的寿命分布概率密度总体呈指数衰减,局部振荡的变化趋势。而目前国内外对威布尔模型的研究大多是忽略了机械产品的周期性故障引起的概率密度的振荡问题,这往往与实际的工程数据存在一定的误差,影响了模型应用的精度。

本文在传统寿命分布模型的基础上,构建具有指数衰减振荡概率密度分布规律的寿命分布模型,给出相应的可靠度、失效率以及平均寿命计算模型。在此基础上,研究衰减系数、振荡幅值、振荡角频率等参数对概率分布特征的影响,最后以某型叉车搭载的液力自动变速箱故障时间数据为研究对象,运用建立的概率分布模型对该型液力自动变速箱故障时间数据进行拟合,并与指数分布模型、三参数威布尔模型和“浴盆曲线”模型拟合结果进行

对比,验证所建立的概率分布模型的有效性。

## 1 指数衰减振荡型概率密度分布模型构建

当产品失效率曲线具有振荡型特征的时候,其概率密度具有指数衰减振荡的特征。可以构建如式(1)所示的三参数产品寿命概率分布模型,其概率密度函数为

$$f(t) = \lambda [A\omega \sin(2\omega t) + 1] e^{-\lambda [A \sin^2(\omega t) + t]} \quad \lambda > 0; |A\omega| < 1; t \geq 0 \quad (1)$$

式中: $t$ 为寿命度量指标,且 $t \geq 0$ ;  $\lambda$ 为衰减系数; $A$ 为振荡幅值; $\omega$ 为振荡角频率。

由式(1)所示的寿命概率密度函数可以推导出产品的寿命累积分布函数为

$$F(t) = \int_{-\infty}^t f(t) dt = \int_0^t \lambda [A\omega \sin(2\omega t) + 1] e^{-\lambda [A \sin^2(\omega t) + t]} dt = 1 - e^{-\lambda [A \sin^2(\omega t) + t]} \quad t \geq 0 \quad (2)$$

显然式(1)满足如下条件,即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda [A\omega \sin(2\omega t) + 1] e^{-\lambda [A \sin^2(\omega t) + t]} dt = 1 \quad t \geq 0 \quad (3)$$

同时,式(2)能够满足以下完备性要求,即

$$\begin{cases} F(-\infty) = 0 \\ F(+\infty) = 1 \end{cases} \quad (4)$$

因此,式(1)可以作为寿命分布的概率密度函数,式(2)可以作为寿命分布的累积分布函数,式(1,2)可以作为指数衰减振荡型寿命分布模型。

进一步,根据可靠度与寿命累积分布函数之间的关系,可以推导出可靠度的表达式为

$$R(t) = 1 - F(t) = e^{-\lambda [A \sin^2(\omega t) + t]} \quad t \geq 0 \quad (5)$$

失效率函数的表达式为

$$h(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \lambda [A\omega \sin(2\omega t) + 1] \quad t \geq 0 \quad (6)$$

平均寿命计算模型的表达式为

$$T_{\text{MTBF}} = E(t) = \int_0^{+\infty} t f(t) dt = \int_0^{+\infty} \lambda t [A\omega \sin(2\omega t) + 1] e^{-\lambda [A \sin^2(\omega t) + t]} dt$$

$$t \geq 0 \tag{7}$$

## 2 不同参数对寿命概率分布特征的影响

针对式(1)所示的概率分布模型,分别研究衰减系数 $\lambda$ ,振荡幅值 $A$ ,振荡角频率 $\omega$ 等对寿命概率分布特征的影响规律。

### 2.1 衰减系数对寿命概率分布特征的影响

当 $A=100, \omega=0.001, \lambda$ 分别为 $0.000\ 2, 0.000\ 5, 0.000\ 8$ 时,所对应的概率密度曲线、可靠度变化曲线和失效率变化曲线分别如图1~3所示。

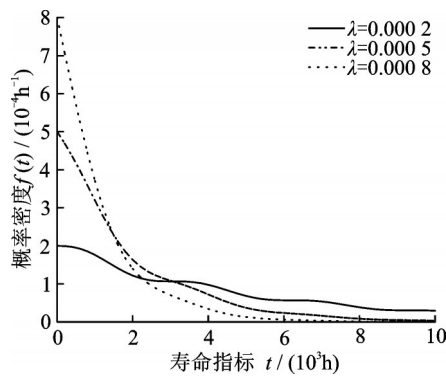


图1 衰减系数对概率密度的影响

Fig.1 Effect of attenuation coefficient on probability density

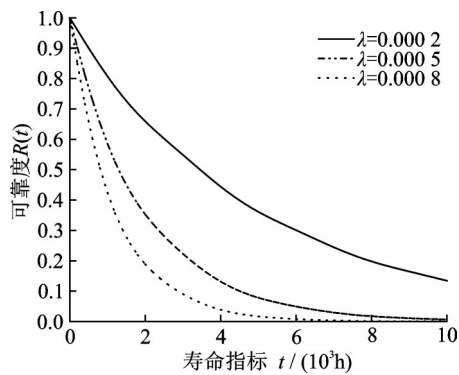


图2 衰减系数对可靠度的影响

Fig.2 Effect of attenuation coefficient on reliability

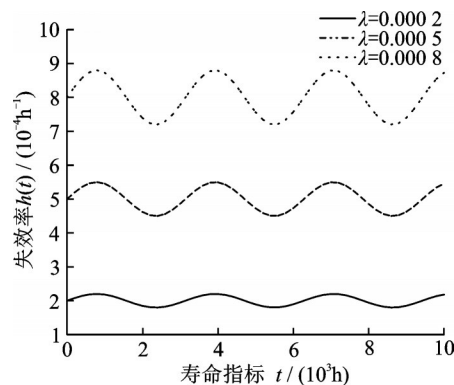


图3 衰减系数对失效率的影响

Fig.3 Effect of attenuation coefficient on failure rate

由图1~3可以看出,衰减系数 $\lambda$ 越小,失效率越低,可靠度越高,概率密度变化越平缓。同时,由图1可以看出,概率密度呈指数衰减振荡变化规律,由图3可以看出,失效率不是一恒定不变的常数,具有一定的周期性和波动性,且波动周期一样。

### 2.2 振荡幅值对寿命概率分布特征的影响

当 $\lambda=0.000\ 2, \omega=0.001, A$ 分别为 $200, 500, 800$ 时,所对应的概率密度曲线、可靠度变化曲线和失效率变化曲线分别如图4~6所示。

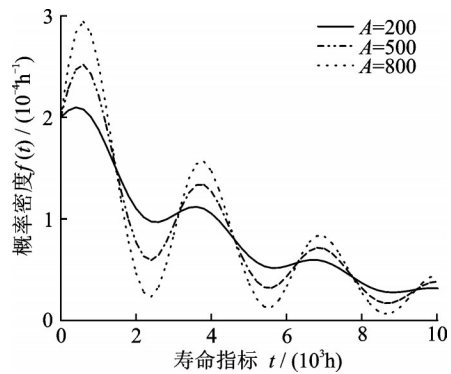


图4 振荡幅值对概率密度的影响

Fig.4 Effect of oscillation amplitude on probability density

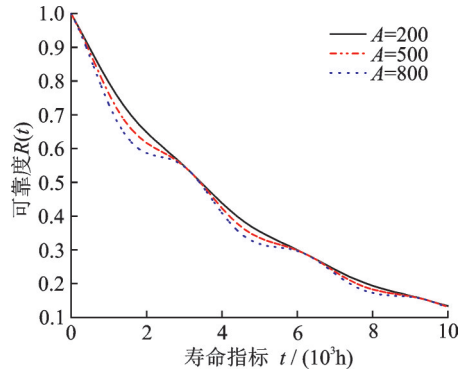


图5 振荡幅值对可靠度的影响

Fig.5 Effect of oscillation amplitude on reliability

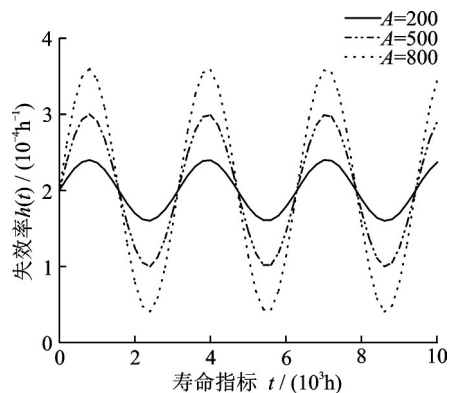


图6 振荡幅值对失效率的影响

Fig.6 Effect of oscillation amplitude on failure rate

由图4~6可以看出,振荡幅值 $A$ 越大,概率密度、可靠度及失效率振荡越剧烈。同时,由图4可以看出,概率密度呈指数衰减振荡变化规律,由图6可以看出,失效率不在是一恒定不变的常数,具有一定的周期性和波动性,且波动周期一样。

### 2.3 振荡角频率对寿命概率分布特征的影响

当 $\lambda = 0.0002$ ,  $A = 500$ ,  $\omega$  分别为  $0.0002$ 、 $0.0004$ 、 $0.0006$  时,所对应的概率密度曲线、可靠度变化曲线和失效率变化曲线分别如图7~9所示。

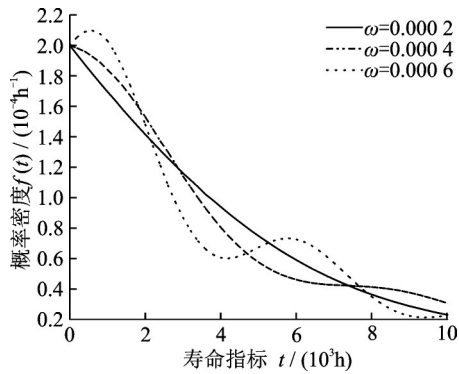


图7 振荡角频率对概率密度的影响

Fig.7 Effect of oscillation angular frequency on probability density

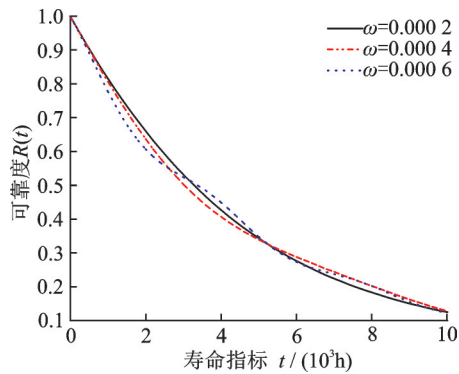


图8 振荡角频率对可靠度的影响

Fig.8 Effect of oscillating angular frequency on reliability

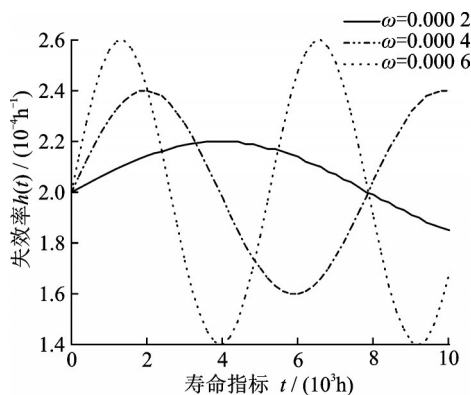


图9 振荡角频率对失效率的影响

Fig.9 Effect of oscillation angular frequency on failure rate

由图7~9可以看出,振荡角频率 $\omega$ 越大,概率密度、可靠度及失效率振荡越快。同时,由图7可以看出,概率密度呈指数衰减振荡变化规律,由图9可以看出,失效率不在是一恒定不变的常数,具有一定的周期性和波动性,且 $\omega$ 越大,波动周期越小。

### 3 指数衰减振荡型寿命分布模型的应用

为验证所建模型的实用性,以某型号叉车为例,该型号叉车2018年售出3万辆,跟踪一年售后维修记录,其搭载的液力自动变速箱117台发生故障,仪表盘记录的部分故障时间按升序排列如表1所示。

采用经验分布的方法,计算该液力变速箱故障

表1 液力自动变速箱部分故障时间

Table 1 Partial failure time of automatic transmission

序号	故障时间/h	序号	故障时间/h
1	0.7	31	247
2	5	32	250
3	10	33	259
4	15	34	260
5	18	35	281
6	23.8	36	285
7	30	37	300
8	35	38	320
9	39.3	39	326
10	48	40	330
11	56.8	41	338
12	60	42	350
13	62	43	360
14	90	44	360.8
15	95.3	45	370
16	107.2	46	390
17	110.7	47	413
18	112	48	430
19	116.5	49	468.1
20	131.8	50	477.1
21	134.7	51	484
22	135	52	500
23	147	53	510
24	156	54	512
25	166.9	55	520
26	213	56	523
27	218.1	57	560
28	227.1	58	570
29	234.3	59	576
30	240	60	577



时间的概率密度分布曲线、可靠度曲线及失效率曲线,如图 10~12 所示。

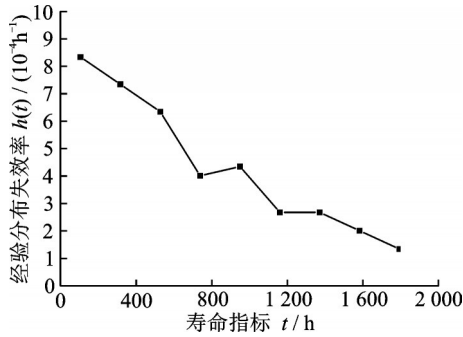


图 10 经验分布概率密度

Fig.10 Probability density of empirical distribution

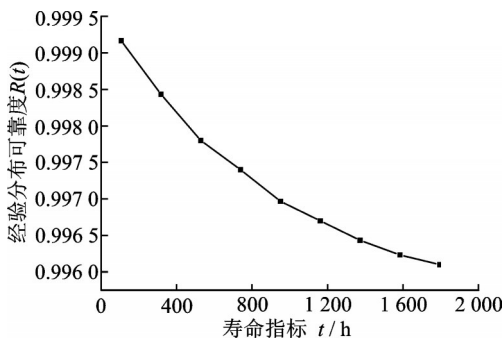


图 11 经验分布可靠度

Fig.11 Reliability of empirical distribution

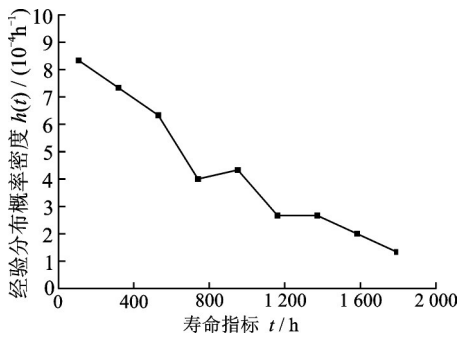


图 12 经验分布失效率

Fig.12 Failure rate of empirical distribution

从图 10~12 可以看出,该液力自动变速箱的寿命概率密度、可靠度及失效率随时间增加呈现出衰减振荡的变化特征。显然,该液力自动变速箱的概率密度分布特征不易采用传统的指数分布、正态分布、两参数威布尔分布和三参数威布尔分布等概率密度模型描述。基于该液力自动变速箱在若干时刻点的故障数据(表 1),计算寿命概率密度值,在此基础上利用式(1)对其寿命概率密度特征进行参数拟合,并与采用指数分布、三参数威布尔及文献[13]所提“浴盆曲线”模型拟合结果进行对比,结果如图 13 所示,4 种方法拟合结果的均方根误差如表 2 所示。

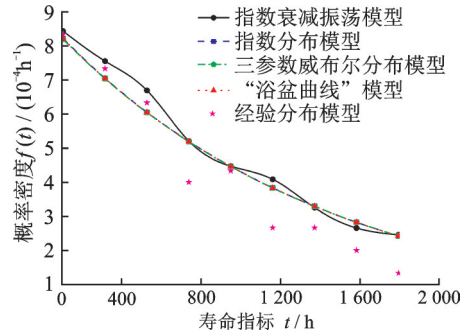


图 13 概率密度对比

Fig.13 Comparison of probability density

表 2 均方根误差对比

Table 2 Comparison of root mean square error

概率密度模型	拟合结果均方根误差
指数衰减振荡模型	3.677e-005
指数分布模型	5.318e-005
三参数威布尔分布模型	5.783e-005
“浴盆曲线”模型	7.052e-005

由图 13 及表 2 可以看出,与指数分布、三参数威布尔分布和文献[13]所提“浴盆曲线”模型相比,在拟合曲线形状上,所建立的指数衰减振荡模型能够较好地模拟该液力自动变速箱无故障工作时间概率密度在  $t$  为 528.28、739.32、950.35、1 161.38 和 1 372.42 h 的衰减振荡特征。这是因为,在衰减振荡模型中指数部分通过引入周期函数,更好地描述了数据的振荡特性,同时,从表 2 中可以看出,采用指数衰减振荡模型可以获得较小的拟合均方根误差。

采用式(1)所示的概率密度模型,计算得到该液力自动变速箱的无故障工作时间概率密度拟合模型为

$$f(t) = 9.818 \times 10^{-4} \times [5.534 \times 10^{-2} \sin(1.134 \times 10^{-2}t) + 1] \times e^{-9.818 \times 10^{-4} \times [-9.407 \sin^2(5.67 \times 10^{-3}t) + t]} \quad (8)$$

进一步可求得可靠度和失效率模型分别为

$$R(t) = e^{-9.818 \times 10^{-4} \times [-9.407 \sin^2(5.67 \times 10^{-3}t) + t]} \quad (9)$$

$$h(t) = 9.818 \times 10^{-4} \times [5.534 \times 10^{-2} \sin(1.134 \times 10^{-2}t) + 1] \quad (10)$$

## 4 结 论

(1)在指数累计失效分布模型的基础上,通过引入具有振荡特征的周期函数  $A \sin^2(\omega t)$ ,构建指数衰减振荡分布的可靠性模型,并推导了相应的概率密度、可靠度、失效率以及平均寿命计算模型。

(2)在此基础上,研究衰减系数、振荡幅值、振

荡角频率等参数对概率分布特征的影响。总体上, 概率密度呈指数衰减振荡变化规律, 失效率不再是一恒定不变的常数, 具有一定的周期性和波动性。其中衰减系数 $\lambda$ 越小, 失效率越小, 可靠度越高, 概率密度变化越平缓; 振荡幅值 $A$ 越大, 概率密度, 可靠度及失效率振荡越剧烈; 振荡角频率 $\omega$ 越大, 概率密度, 可靠度及失效率振荡越快。

(3)对某型叉车搭载的液力自动变速箱的故障时间数据进行其寿命密度和失效率分析, 其经验分布概率密度和失效率具有衰减振荡的特征, 运用建立的指数衰减振荡概率密度模型对其寿命概率密度特征进行参数拟合, 并与指数分布、三参数威布尔分布和文献[13]所建立的“浴盆曲线”模型拟合结果进行对比。对比结果显示, 所建立的指数衰减振荡模型能够较好的模拟该液力自动变速箱无故障工作时间概率密度的衰减振荡特征, 采用指数衰减振荡模型可以获得较小的拟合均方根误差, 其拟合均方根误差为 $3.677e-005$ 。

#### 参考文献:

- [1] 谢里阳. 机械可靠性理论、方法及模型中若干问题评述[J]. 机械工程学报, 2014, 50(14):27-35.  
XIE Liyang. Issues and commentary on mechanical reliability theories, methods and models[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2014, 50(14):27-35.
- [2] YANG G H, SUNG S, SOO K Y. Prediction of system reliability using failure types of components based on Weibull lifetime distribution[J]. Journal of Mechanical Science and Technology, 2018, 32(6):2463-2471
- [3] WEIBULL W. A statistical distribution function of wide applicability[J]. Journal of Applied Mechanics, 1951, 18:293-297.
- [4] ARTHUR J, HALLINAN J. A review of the Weibull distribution[J]. Journal of Quality Technology, 1993, 25(2):85-93.
- [5] CORDEIRO G M, ORTEGA E M M, LEMONTE A J. The exponential-Weibull lifetime distribution[J]. Journal of Statistical Computation and Simulation, 2014, 84(12):2592-2606.
- [6] WANG F, CHEN X, BOSEN D, et al. Rolling bearing reliability assessment via kernel principal component analysis and Weibull proportional hazard model[J]. Shock and Vibration, 2017, 2017:1-11.
- [7] FREELS J K, TIMME D A, PIGNATIELLO J J, et al. Maximum likelihood estimation for the poly-Weibull distribution[J]. Quality Engineering, 2019, 31(4):545-552.
- [8] BALOUI J E. Analyzing system reliability using fuzzy Weibull lifetime distribution[J]. International Journal of Applied Operational Research, 2014, 4(1):93-102.
- [9] 南东雷, 贾志新, 李威. 三参数威布尔分布的蒙特卡洛点估计方法[J]. 机械设计与制造, 2017(1):142-144.  
NAN Donglei, JIA Zhixin, LI Wei. Monte Carlo based parametric point estimation for three parameter Weibull distribution[J]. Machinery Design & Manufacture, 2017(1):142-144.
- [10] 位林营, 胡海涛, 吴微露, 等. 基于指数威布尔分布的复杂电子系统使用可靠度建模[J]. 探测与控制学报, 2019, 41(2):115-119.  
WEI Linying, HU Haitao, WU Weilu, et al. Operational reliability modeling of complex electronic systems based on exponential Weibull distribution[J]. Journal of Detection & Control, 2019, 41(2):115-119.
- [11] 董力, 陆中, 周伽. 基于遗传算法的混合威布尔分布参数最小二乘估计[J]. 南京航空航天大学学报, 2019, 51(5):711-718.  
DONG Li, LU Zhong, ZHOU Jia. Least square estimation for mixed Weibull distribution based on genetic algorithm[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2019, 51(5):711-718.
- [12] ZHANG Tieling, XIE Min. On the upper truncated Weibull distribution and its reliability implications[J]. Reliability Engineering & System Safety, 2011, 96(1):194-200.
- [13] 王正, 王增全, 谢里阳. 具有“浴盆”型失效率变化规律的产品寿命概率分布模型[J]. 机械工程学报, 2015, 51(24):193-200.  
WANG Zheng, WANG Zengquan, XIE Liyang. Life probability model of products with the bathtub-shaped failure rate changing rule[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2015, 51(24):193-200.

(编辑:张蓓)