

直升机载火控雷达抗干扰捷变波形优化算法

余唐旭¹, 张劲东², 何 涛³, 李 晨²

(1. 中国直升机设计研究所, 景德镇 333001; 2. 南京航空航天大学电子信息工程学院, 南京 211106;
3. 中航工业雷华电子技术研究所第六研究部, 无锡 214063)

摘要: 针对直升机载火控雷达面向抗干扰的捷变波形优化问题, 基于奇异值分解(Singular value decomposition, SVD)和循环算法提出了适用于多脉冲和短码长的捷变相位编码波形设计方法。本文首先通过构造具有目标区域低旁瓣模糊函数的带约束四次型优化问题, 然后根据SVD分解将四次型转化为二次型, 给出了迭代收敛的优化算法; 同时在循环算法基础上给了一种四次型的循环迭代收敛算法。最后仿真结果表明, 两种算法在设计捷变波形优化性能上接近, 但SVD分解算法收敛速度更快, 循环计算算法具有更高的运算速度。

关键词: 直升机火控雷达; 捷变波形设计; 相位调制; 奇异值分解; 循环算法

中图分类号: TN958.2

文献标志码: A

文章编号: 1005-2615(2021)02-0275-08

Optimization of Anti-jamming Agile Waveform for Helicopter Borne Fire Control Radar

YU Tangxu¹, ZHANG Jindong², HE Tao³, LI Chen²

(1. China Helicopter Design and Research Institute, Jingdezhen 333001, China; 2. College of Electronic and Information Engineering, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing 211106, China; 3. Sixth Research Department, AVIC Leihua Electronic Technology Research Institute, Wuxi 214063, China)

Abstract: For the optimization of anti-jamming agile waveform for helicopter borne fire control radar, an agile phase coding waveform suitable for multi-pulse and short code length is designed based on singular value decomposition (SVD) and cyclic algorithm. First, we construct the constrained quadric optimization problem with low sidelobe ambiguity function in the target region. Second, the quartic is transformed into the quadric according to SVD decomposition, and an iterative convergence algorithm is designed. Third, a quadric iterative convergence algorithm is deduced based on the cyclic algorithm. Finally, the simulation results show that the two algorithms are close to each other in the design of agile waveform optimization performance, but the SVD decomposition algorithm has faster convergence speed, and the cycle calculation algorithm has higher operation speed.

Key words: helicopter fire control radar; agile waveform design; phase modulation; singular value decomposition; cyclic algorithm

直升机载火控雷达能够实现对地对空目标监视、跟踪、定位和地形回避^[1], 且具有频段高、体积小和质量轻等特点, 是武装直升机适装的重要电子设备^[2]。随着新的电子干扰技术的迅速发展, 低空近

程防空武器系统以及直升机专用雷达综合对抗系统的出现, 导致直升机载雷达工作的电磁环境日趋复杂^[3]。发射固定波形的雷达一旦其信号被敌方干扰机截获和识别, 将非常容易被实施有针对性的

基金项目: 航空科学基金(2017052015, 20182007001)资助项目; 上海航天基金(SAST2018-077)资助项目。

收稿日期: 2020-08-17; **修订日期:** 2021-03-02

通信作者: 张劲东, 男, 副教授, 硕士生导师, E-mail: zjdjs@126.com。

引用格式: 余唐旭, 张劲东, 何涛, 等. 直升机载火控雷达抗干扰捷变波形优化算法[J]. 南京航空航天大学学报, 2021, 53(2): 275-282. YU Tangxu, ZHANG Jindong, HE Tao, et al. Optimization of anti-jamming agile waveform for helicopter borne fire control radar[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2021, 53(2): 275-282.

干扰。

捷变波形由于其发射波形的不确定性,会使敌方干扰机的分选识别变得非常困难,因此也难以对其实施有效干扰^[4]。随着数字波形发生器技术的不断发展,捷变波形逐渐成为雷达研究领域的新热点和直升机雷达波形的新选择。针对复杂波形设计问题,He等给出了用于设计模糊函数的 Multi-CAN算法^[5],Arlery等给出了基于梯度下降的模糊函数设计算法^[6]。Boyd等提出求解凸优化问题的交替方向乘子法(Alternating direction method of multipliers, ADMM)^[7]。随后Liang等使用ADMM方法求解带约束二次型最优化问题,给出了一种设计具有低自相关旁瓣的连续相位调制信号方法^[8]。在二次型优化问题中,ADMM更新公式可以给出闭式解,但在四次型优化问题中,闭式解难以获取。Hunter和Lange提出的Majorization-minimization(MM)算法是一种迭代求解最优化问题的算法,通过构造并求解形式更为简单的辅助函数,逐渐逼近原问题的最优解^[9]。Song等给出了一种基于MM算法的模糊函数设计方法,其中辅助函数为目标函数上界的二次型^[10]。Kerahroodi等^[11-12]将坐标下降(Coordinate descent, CD)算法运用到优化波形自相关函数。CD算法在整个迭代过程中使用不同的坐标方向进行线搜索以求得目标函数的最优解。以上优化方法主要用于单个波形优化。捷变波形的优化问题目前主要依赖启发类智能优化算法,例如模拟退火算法^[13]、遗传算法^[14]和粒子群算法^[15]等,但在面对超高维优化变量时,往往优化耗时太长,容易陷入局部收敛。

由于直升机载火控雷达作用距离相对较近,且普遍采用中高重复频率的窄脉冲,因此其相干处理间隔(Coherent processing interval, CPI)虽然脉冲个数较多,但单个脉冲码长较短,影响其探测性能。如何有针对性地开展高维变量下捷变波形优化设计,使其在低复杂算法下实现捷变优化的同时,保证多脉冲和短码长下的相干处理性能是本文的研究目标。目前针对短码和捷变波形优化的工作相对较少。本文基于捷变相位调制波形(Agiled phase coded waveform, APCW),以离散化的捷变波形距离-多普勒模糊函数为优化目标,将捷变波形设计问题建模为带约束四次型最优化问题,并给出基于SVD降维算法和循环算法的求解方法。

1 捷变波形模糊函数

设直升机载雷达系统在一个CPI内连续发射 N 个脉冲信号

$$s(t) = \sum_{n=0}^{N-1} s_n(t - nT_r) \quad (1)$$

式中: $s_n(t)$ 表示其中第 n 个脉冲, T_r 为脉冲重复周期。假设 $s_n(t)$ 的脉冲宽度 $T = Mt_p$,其中 t_p 是脉冲 $s_n(t)$ 中子脉冲宽度; M 是子脉冲个数。则有

$$s_n(t) = \begin{cases} \sum_{m=0}^{M-1} x(n, m) p_m(t) & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \forall t \notin [0, T] \end{cases} \quad (2)$$

式中:编码序列 $x(n, m)$, $n = 0, 1, \dots, N-1$; $m = 0, 1, \dots, M-1$ 是优化变量。并且每个脉冲的能量为一定值 M ,即 $\sum_{m=0}^{M-1} |x(n, m)|^2 = M$,则编码序列可表示为 $x(n, m) = e^{j\phi_{n,m}}$, $\{\phi_{n,m}\}$ 是序列 $x(n, m)$ 的相角。 $p_m(t)$ 表示宽度为 t_p 的理想矩形脉冲

$$p_m(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{t_p}} & (m-1)t_p \leq t \leq mt_p \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (3)$$

采用脉冲多普勒体制的直升机载火控雷达,在一个CPI内连续发射相同的脉冲信号,即 $s_n(t) = s_0(t)$, $\forall n$ 。每个脉冲 $s_n(t)$ 的能量为

$$E_n = \int_{nT_r}^{nT_r+T} |s_n(t)|^2 dt = M \quad (4)$$

脉冲多普勒体制雷达对回波信号首先进行滤波处理。对于反射的第 n 个脉冲,接收滤波器可写为

$$f_n(t) = \begin{cases} \sum_{m=0}^{M-1} x(n, m) p_m(t) & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \forall t \notin [0, T] \end{cases} \quad (5)$$

则滤波器的输出为

$$\begin{aligned} \chi_n(\tau, f) = & \int_0^T f_n(t) s_n(t - \tau) e^{j2\pi f(t - nT_r)} dt = \\ & e^{-j2\pi f n T_r} \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{M-1} x^*(n, k) \left(\int_0^T p_k(t) p_l(t - \tau) e^{-j2\pi f t} dt \right) x(n, l) \end{aligned} \quad (6)$$

式中: τ 和 f 分别为目标时间延迟和多普勒频移。

由于直升机载火控雷达的脉冲重复频率较高,因此在目标的相对径向运动速度满足 $|v| \leq \lambda/4T_r$ 的情况下,目标的多普勒移频能够满足 $-1/2T_r \leq f \leq 1/2T_r$,其中 λ 为波长。同时直升机载火控雷达为了满足最小作用距离和最大作用距离要求,往往采用窄脉冲和低于1/5的占空比。因此,对于其发射波形的持续时间足够小,满足 $|2\pi f T| < \pi/5$,即 $T \leq T_r/5$ 。由此,可以不考虑动目标(包括地面和低空飞行目标,以及在高重频下的弹目标)多普勒频率引起的回波脉内相位变化。

取 $\tau = pt_p$, $p = -M, \dots, 1, \dots, M$ 。由于 $T_r \gg t_p$, $\chi_n(\tau, f)$ 可转换为

$$\begin{aligned}\chi_n(pt_p, f) &= \\ e^{j\pi f t_p} e^{-j2\pi f n T_r} \frac{\sin(\pi f t_p)}{\pi f t_p} \sum_{m=0}^{M-1} x^*(n, m) x(n, m-p) &\approx \\ e^{-j2\pi f n T_r} \sum_{m=0}^{M-1} x^*(n, m) x(n, m-p) &= \chi_n(pt_p, 0)\end{aligned}\quad (7)$$

式(7)忽略了多普勒频率对脉内相位的调制。

回波信号经过滤波之后,滤波器输出可表示为一个 $2(M-1) \times N$ 的二维矩阵 $\xi(p, v)$, $2(M-1)$ 和 N 分别对应了时间延迟和脉冲数目。接着,对滤波结果进行一维 N 点逆离散傅里叶变换以实现固定延迟脉冲信号的相干处理。经过处理后的距离-多普勒二维函数为

$$\xi(p, v) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi v n T_r} \chi_n(pt_p, 0) \quad (8)$$

对式(8)的多普勒频率进行频率离散化 $v = q/NT_r$, 其中 $q = 0, 1, \dots, N-1$, 可得

$$\begin{aligned}\xi(p, q) &= \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N} v q} \chi_n(pt_p, 0) = \\ \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N} v q} e^{-j2\pi f n T_r} \sum_{m=0}^{M-1} x^*(n, m) x(n, m-p) &\quad (9)\end{aligned}$$

从优化模糊函数的角度来说,捷变波形的期望模糊函数除了主峰,在其余位置的副瓣接近零。由式(9)所示,目标的多普勒频率 f 仅影响距离-多普勒平面上目标所在位置的聚焦,不影响目标在距离-多普勒二维平面上的形状,即模糊函数形状。因此可以设置 $f=0$, 且定义捷变波形的离散距离-多普勒模糊函数为

$$\begin{aligned}\xi(p, q) &= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} e^{-j\frac{2\pi}{N} n q} x^*(n, m) x(n, m-p) = \\ \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N} n q} \rho_n(p) &\quad (10)\end{aligned}$$

式中 $\rho_n(p) = \sum_{m=0}^{M-1} x^*(n, m) x(n, m-p)$ 表示第 n 个编码序列经过滤波器的输出。

为抑制杂波和旁瓣,则需最小化目标函数 $\xi(p, q)$

$$\begin{aligned}\min_{\{x(n, m)\}} & \left(\sum_{(p, q) \in I_a} \left| \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N} n q} \rho_n(p) \right|^2 \right) \\ \text{s.t.} & \quad |x(n, m)| = 1 \\ & \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \\ & \quad m = 0, 1, \dots, M-1\end{aligned}\quad (11)$$

式中范围 I_a 是不包含主峰的副瓣位置。式(11)通过最小化目标函数使滤波器输出逼近理想模糊函数,即滤波器输出 $\chi_n(pt_p, f)$ 在零点处是一个尖峰,在 I_a 范围内的副瓣逼近于零。式(11)同时表明,对捷变波形的优化是对 N 个发射波形 $\{x(n, m)\}$, $n = 0, 1, \dots, N-1$; $m = 0, 1, \dots, M-1$ 的联合优

化,但同时优化 N 个脉冲形成了高维约束下的四次型优化问题,直接优化较为复杂。

本文对目标函数进行降维,即固定其他发射脉冲信号,优化第 n 个发射脉冲信号的编码序列 $\{x(n, m)\}_{m=0}^{M-1}$, 并利用交替迭代法对 N 个编码序列依次优化。其中,第 n 个子问题可表示为

$$\begin{aligned}P_n: & \min_{\{x(n, m)\}} \left(\sum_{(p, q) \in I_a} \left| \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N} n q} \rho_n(p) \right|^2 \right) \\ \text{s.t.} & \quad |x(n, m)| = 1 \\ & \quad m = 0, 1, \dots, M-1\end{aligned}\quad (12)$$

由于捷变波形的设计本质上是一个高维复杂变量的约束优化问题,对其进行直接求解优化难度极高,且维度高造成的计算复杂度也极高。因此,这里采用交替指向方法首先将上述优化分解为多个最小化问题。显然,降维后的优化问题在一次优化过程中的优化变量个数明显减少。

2 基于SVD分解的捷变波形优化算法

降维后的捷变波形优化问题简化为交替指向下各个波形的单个优化。但对单个波形的优化,问题(12)仍是一个四次型的优化问题。直接对四次型的优化是一个非常复杂且耗计算量的问题。因此,针对捷变波形优化设计,首先采用一种基于奇异值分解的优化设计方法。该方法构造自相关系数矩阵作为中间量,在优化过程中通过先优化自相关系数矩阵,再优化波形,最后通过反复迭代的方式实现收敛。与文献[7-8]等方法相比,是一种新的将四次型降为二次型的思路。

2.1 交替指向下的相关系数估计

可以采用自相关系数优化作为中间变量,而不是直接对序列编码 $\{x(n, m)\}_{m=0}^{M-1}$ 。式(11)相应的优化问题可转化为

$$\tilde{P}_n: \min_{\rho_n(p)} \left(\sum_{(p, q) \in I_a} |\xi(p, q)|^2 \right) \quad (13)$$

假设捷变波形距离-多普勒模糊函数的旁瓣在距离-多普勒平面上的某一个区域进行最小化,且有 $q(p) \in [q_{p, \min}, q_{p, \max}]$, 其中 $q_{p, \min}$ 和 $q_{p, \max}$ 分别表示第 p 个距离单元对应的多普勒单元的上下限。

经过交替指向降维后,其中第 p 个优化子问题可表示为

$$\tilde{P}_{1,n}: \min_{\rho_n(p)} \|a_p \rho_n(p) - b_p\|^2 \quad (14)$$

式中, $a_p = [e^{j2\pi n q_{p, \min}/N} \dots e^{j2\pi n q_{p, \max}/N}]^T$ 表示优化多普勒区域形成的多普勒导向矢量,自相关系数形

成的期望矢量由 $\mathbf{b}_p = - \left[\sum_{k=0, k \neq n}^{N-1} e^{j2\pi k q_{p, \min}/N} \rho_k(p) \right. \\ \left. \dots \sum_{k=0, k \neq n}^{N-1} e^{j2\pi k q_{p, \max}/N} \rho_k(p) \right]^T$ 表示, $\|\cdot\|^2$ 表示F范数。

对上述问题的最优解 $\tilde{\rho}_n(p)$ 可利用最小二乘估计的方法求解, 表示为

$$\tilde{\rho}_n(p) = (\mathbf{a}_p^H \mathbf{a}_p)^{-1} \mathbf{a}_p^H \mathbf{b}_p = \frac{1}{N_p} \mathbf{a}_p^H \mathbf{b}_p \quad (15)$$

式中: $(\cdot)^H$ 表示共轭转置, N_p 为第 p 个距离单元对应的多普勒单元个数。

2.2 SVD降幂次

在估计各个波形的相关系数后, 虽然解决了优化的高维数问题。但优化目标仍是一个四次型优化问题, 这里采用SVD分解进行降幂次。

令

$$\mathbf{X}_n = \begin{pmatrix} x(n, 0) & & & \\ \vdots & \ddots & & \\ x(n, M-1) & & x(n, 0) & \\ & \ddots & \vdots & \\ & & x(n, M-1) & \end{pmatrix} \quad (16)$$

根据估计值 $\tilde{\rho}_n(p)$, 可以构造一个矩阵, 表示为

$$\mathbf{G}_n = \begin{pmatrix} \tilde{\rho}_n(0) & \tilde{\rho}_n^*(1) & \dots & \tilde{\rho}_n^*(M-1) \\ \tilde{\rho}_n(1) & \tilde{\rho}_n(0) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \tilde{\rho}_n^*(1) \\ \tilde{\rho}_n(M-1) & \dots & \tilde{\rho}_n(1) & \tilde{\rho}_n(0) \end{pmatrix} \quad (17)$$

由于 $\mathbf{X}_n^H \mathbf{X}_n = \mathbf{G}_n$ 表示其对应的捷变波形是上述优化问题的优化解, 因此可以将 $\{x(n, m)\}_{m=0}^{M-1}$ 表示为

$$\|\mathbf{X}_n^H \mathbf{X}_n - \mathbf{G}_n\|^2 \quad (18)$$

上述优化问题隐含了恒模约束。该优化问题可以进一步简化为

$$\|\mathbf{X}_n - \mathbf{U} \mathbf{G}_n^{1/2}\|^2 \quad (19)$$

式中: \mathbf{U} 为一个 $(2M-1) \times M$ 的西矩阵, 且有 $\mathbf{U}^H \mathbf{U} = \mathbf{I}$ 。

上述设计优化问题可以进一步表示为

$$\tilde{\rho}_{2,n}: \min_{\{x(n, m)\}, \mathbf{U}} \|\mathbf{X}_n - \mathbf{U} \mathbf{G}_n^{1/2}\|^2 \\ \text{s.t.} \quad \mathbf{U}^H \mathbf{U} = \mathbf{I} \\ |x(n, m)| = 1 \\ m = 0, 1, \dots, M-1 \quad (20)$$

对式(20)进行最小化, 可以按照以下方法进行分解和优化。

令 \mathbf{X}_n 固定, 且有

$$\mathbf{X}_n \mathbf{G}_n^{-1/2} = \mathbf{U}_1 \mathbf{\Sigma} \mathbf{U}_2^H \quad (21)$$

式(21)表示 $\mathbf{X}_n \mathbf{G}_n^{-1/2}$ 的SVD分解。其中, \mathbf{U}_1 为 $(2M-1) \times M$ 的准酉矩阵, \mathbf{U}_2 为 $M \times M$ 的酉矩阵, $\mathbf{\Sigma}$ 为 $M \times M$ 的对角矩阵。对矩阵 \mathbf{U} 的估计可以表示为

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_1 \mathbf{U}_2^H \quad (22)$$

令 $\mathbf{V} = \mathbf{X}_n \mathbf{G}_n^{1/2}$, 且有矩阵 \mathbf{V} , 其中的矩阵元素 $\{v(n, m)\}_{m=0}^{M-1}$ 具有类似 \mathbf{X}_n 矩阵中 $\{x(n, m)\}_{m=0}^{M-1}$ 的位置, 根据上式, 对 $\{x(n, m)\}_{m=0}^{M-1}$ 的优化归结为如下最小问题

$$\min_{\{x(n, m)\}} \sum_{m=0}^{M-1} |x(n, m) - v_m|^2 \quad (23)$$

在恒模约束下, 上式的最小化求解可以表示为

$$x(n, m) = e^{j\phi_{n,m}}, \phi_{n,m} = \arg \left(\sum_{m=0}^{M-1} v_m \right) \quad (24)$$

2.3 基于SVD的捷变波形优化流程

根据上述过程, 对捷变波形的优化可以总结为如下所示。

步骤1 令 $k=0$, 初始化调制编码 $\{x(n, m)\}$, $n=0, 1, \dots, N-1$; $m=0, 1, \dots, M-1$, 使用随机生成的编码调制形式;

步骤2 令 $n=0$; $N-1$;

步骤2.1 求解 $\tilde{P}_{1,n}^{(p)}: \min_{\rho_n(p)} \|\mathbf{a}_p \rho_n(p) - \mathbf{b}_p\|^2$, 其

解的形式为 $\tilde{\rho}_n(p) = (\mathbf{a}_p^H \mathbf{a}_p)^{-1} \mathbf{a}_p^H \mathbf{b}_p = \frac{1}{N_p} \mathbf{a}_p^H \mathbf{b}_p$, 同时构造矩阵 \mathbf{G}_n ;

步骤2.2 求解

$$\tilde{P}_{2,n}: \min_{\{x(n, m)\}, \mathbf{U}} \|\mathbf{X}_n - \mathbf{U} \mathbf{G}_n^{1/2}\|^2 \\ \text{s.t.} \quad \mathbf{U}^H \mathbf{U} = \mathbf{I} \\ |x(n, m)| = 1; m = 0, 1, \dots, M-1$$

对固定的 \mathbf{X}_n , 计算SVD分解 $\mathbf{X}_n \mathbf{G}_n^{-1/2} = \mathbf{U}_1 \mathbf{\Sigma} \mathbf{U}_2^H$, 同时计算矩阵 $\mathbf{U} = \mathbf{U}_1 \mathbf{U}_2^H$ 和 $\mathbf{V} = \mathbf{X}_n \mathbf{G}_n^{1/2}$; 对固定的 \mathbf{V} , 计算脉冲串序列码

$$x(n, m) = e^{j\phi_{n,m}}, \phi_{n,m} = \arg \left(\sum_{m=0}^{M-1} v_m \right)$$

步骤3 令 $k=k+1$, 重复上述步骤2直到满

足 $\sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \|x(n, m)^{(k+1)} - x(n, m)^{(k)}\|^2 \leq \epsilon$ 。

3 基于循环算法的捷变波形优化算法

在第2节中, 对捷变波形的优化其核心在SVD分解的运用, 因此其计算复杂度略高。在针对短码的优化, SVD运算也相对较好。在某些不希望采用复杂运算形式的场合, SVD分解的适用性将下

降。为了简化运算形式,本节将采用一种循环算法的捷变波形优化算法,该算法最大的特点在于运算形式较为简单,不涉及矩阵分解等复杂运算。

3.1 优化模型的转化

捷变波形的优化目标函数为四次型,因此很难利用解析形式给出全局最优解或直接给出优化方法。这里给出一种局部最优的优化技术,这是一种计算效率较高的方法。

令 $U_{p,q}^{(n)} = e^{j2\pi nq/N} T_p$, 其中 T_p 为 $M \times M$ 的移位矩阵,其形式为

$$T_p(k, l) = \begin{cases} 1 & l = k + p \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (25)$$

目标函数可以表示为

$$\begin{aligned} \sum_{(p,q) \in I_n} |\xi(p, q)|^2 &= \sum_{(p,q) \in I_n} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x_n^H U_{p,q}^{(n)} x_n \right|^2 = \\ &= \sum_{(p,q) \in I_n} \left| x_n^H U_{p,q}^{(n)} x_n + \sum_{k=0, k \neq n}^{N-1} x_k^H U_{p,q}^{(k)} x_k \right|^2 = \\ &= x_n^H Q_n x_n \end{aligned} \quad (26)$$

式中

$$\begin{aligned} Q_n &= \sum_{(p,q) \in I_n} (U_{p,q}^{(n)} + \gamma_{p,q}^{(n)} I_M)^H x_n x_n^H (U_{p,q}^{(n)} + \gamma_{p,q}^{(n)} I_M) \\ \gamma_{p,q}^{(n)} &= \frac{1}{M} \sum_{k=0, k \neq n}^{N-1} x_k^H U_{p,q}^{(k)} x_k \end{aligned} \quad (27)$$

式(26)中的优化问题可以转化为

$$\begin{aligned} \tilde{P}_n: \min_{x_n} \sum_{(p,q) \in I_n} x_n^H Q_n x_n \\ \text{s.t. } |x(n, m)| = 1, m = 0, 1, \dots, M-1 \end{aligned} \quad (28)$$

式中: 矩阵 Q_n 为 $M \times M$ 的 Hermitian 矩阵为正定矩阵。

3.2 循环迭代的算法证明

令 $\tilde{Q}_n = Q_n - \lambda_c I_M$ 为负定矩阵, 且有 $\lambda_c > \lambda_{\max}(Q_n) + 1, \lambda_{\max}(\cdot)$ 的最大特征值, $\tilde{Q}_n < -I_M$ 。

定理1 以下不等式

$$\begin{aligned} x_n^{(t+1)H} \tilde{Q}_n^{(t)} x_n^{(t+1)} &< x_n^{(t)H} \tilde{Q}_n^{(t+1)} x_n^{(t)} \\ x_n^{(t+1)H} \tilde{Q}_n^{(t)} x_n^{(t+1)} &< x_n^{(t)H} \tilde{Q}_n^{(t)} x_n^{(t)} \end{aligned} \quad (29)$$

满足以下条件

$$\begin{aligned} \text{Re} [x_n^{(t+1)H} \tilde{Q}_n^{(t)} x_n^{(t+1)}] &< x_n^{(t)H} \tilde{Q}_n^{(t+1)} x_n^{(t)} \\ \text{Re} [x_n^{(t+1)H} \tilde{Q}_n^{(t)} x_n^{(t+1)}] &< x_n^{(t)H} \tilde{Q}_n^{(t)} x_n^{(t)} \end{aligned} \quad (30)$$

式中: $x_n^{(t)}$ 和 $Q_n^{(t)}$ 为迭代计算的序列和矩阵。

证明: 由于矩阵 $\tilde{Q}_n^{(t)}$ 和 $\tilde{Q}_n^{(t+1)}$ 的非负性, 可得

$$\begin{aligned} (x_n^{(t+1)} - x_n^{(t)})^H \tilde{Q}_n^{(t+1)} (x_n^{(t+1)} - x_n^{(t)}) &< 0 \\ (x_n^{(t+1)} - x_n^{(t)})^H \tilde{Q}_n^{(t)} (x_n^{(t+1)} - x_n^{(t)}) &< 0 \end{aligned} \quad (31)$$

在两个不等式的基础上, 可得

$$x_n^{(t+1)H} \tilde{Q}_n^{(t)} x_n^{(t+1)} < 2\text{Re} \{ x_n^{(t+1)H} \tilde{Q}_n^{(t)} x_n^{(t)} \} -$$

$$x_n^{(t)H} \tilde{Q}_n^{(t+1)} x_n^{(t)} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} x_n^{(t+1)H} \tilde{Q}_n^{(t)} x_n^{(t+1)} &< 2\text{Re} \{ x_n^{(t+1)H} \tilde{Q}_n^{(t)} x_n^{(t)} \} - \\ &= x_n^{(t)H} \tilde{Q}_n^{(t)} x_n^{(t)} \end{aligned} \quad (33)$$

如果 $\text{Re} \{ x_n^{(t+1)H} \tilde{Q}_n^{(t)} x_n^{(t)} \} < x_n^{(t)H} \tilde{Q}_n^{(t+1)} x_n^{(t)}$,
 $\text{Re} \{ x_n^{(t+1)H} \tilde{Q}_n^{(t)} x_n^{(t)} \} < x_n^{(t)H} \tilde{Q}_n^{(t)} x_n^{(t)}$
 则有

$$\begin{aligned} x_n^{(t+1)H} \tilde{Q}_n^{(t+1)} x_n^{(t+1)} &< x_n^{(t)H} \tilde{Q}_n^{(t+1)} x_n^{(t)} \\ x_n^{(t+1)H} \tilde{Q}_n^{(t)} x_n^{(t+1)} &< x_n^{(t)H} \tilde{Q}_n^{(t)} x_n^{(t)} \end{aligned} \quad (34)$$

注意到 $x_n^{(t)H} \tilde{Q}_n^{(t+1)} x_n^{(t)} < x_n^{(t+1)H} \tilde{Q}_n^{(t)} x_n^{(t+1)}$, 因此有

$$x_n^{(t+1)H} \tilde{Q}_n^{(t+1)} x_n^{(t+1)} < x_n^{(t)H} \tilde{Q}_n^{(t)} x_n^{(t)} \quad (35)$$

从上述证明过程可见, 如果两个不等式的约束能够满足, 就能够保证目标函数的收敛性。定理3将证明如何保证这两个不等式的成立。

定理2 两个不等式成立

$$\begin{aligned} x_n^{(t+1)H} \tilde{Q}_n^{(t)} x_n^{(t+1)} &< x_n^{(t)H} \tilde{Q}_n^{(t+1)} x_n^{(t)} \\ x_n^{(t+1)H} \tilde{Q}_n^{(t)} x_n^{(t+1)} &< x_n^{(t)H} \tilde{Q}_n^{(t)} x_n^{(t)} \end{aligned} \quad (36)$$

在序列求解过程中如果满足

$$\min_{x_n^{(t+1)}} \|x_n^{(t+1)} + Q_n^{(t)} x_n^{(t)}\|^2 \quad (37)$$

证明:

通过扩展目标函数, 可以很容易得到最小化的解

$$x_n^{(t+1)} = -Q_n^{(t)} x_n^{(t)} \quad (38)$$

考虑上述优化解, 可得

$$\begin{aligned} \text{Re} \{ x_n^{(t+1)H} \tilde{Q}_n^{(t)} x_n^{(t+1)} \} - x_n^{(t)H} \tilde{Q}_n^{(t+1)} x_n^{(t)} &= \\ -x_n^{(t)H} Q_n^{(t)H} \tilde{Q}_n^{(t)} x_n^{(t)} - x_n^{(t)H} \tilde{Q}_n^{(t)} x_n^{(t)} &= \\ x_n^{(t)H} (-Q_n^{(t)H} \tilde{Q}_n^{(t)} - \tilde{Q}_n^{(t)}) x_n^{(t)} &= \\ -x_n^{(t)H} (Q_n^{(t)H} + I) \tilde{Q}_n^{(t)} x_n^{(t)} &< 0 \end{aligned} \quad (39)$$

且有

$$\begin{aligned} \text{Re} \{ x_n^{(t+1)H} \tilde{Q}_n^{(t+1)} x_n^{(t+1)} \} - x_n^{(t)H} \tilde{Q}_n^{(t+1)} x_n^{(t)} &= \\ -x_n^{(t)H} \tilde{Q}_n^{(t)H} \tilde{Q}_n^{(t+1)} x_n^{(t)} - x_n^{(t)H} \tilde{Q}_n^{(t+1)} x_n^{(t)} &= \\ x_n^{(t)H} (-\tilde{Q}_n^{(t)H} \tilde{Q}_n^{(t+1)} - \tilde{Q}_n^{(t+1)}) x_n^{(t)} &= \\ -x_n^{(t)H} (\tilde{Q}_n^{(t)H} + I) \tilde{Q}_n^{(t+1)} x_n^{(t)} &< 0 \end{aligned} \quad (40)$$

由此可见, 上述过程满足了两个不等式的要求, 可以使得上述过程在迭代过程中保证计算的收敛性。

考虑到序列的恒模性约束, 近似解可以表示为

$$\tilde{x}_n^{(t+1)} = \exp(j \arg(x_n^{(t+1)})) \quad (41)$$

3.3 基于循环算法的捷变波形优化流程

循环算法步骤总结如下。

步骤1 令 $k=0$, 初始化调制编码 $\{x(n, m)\}$, $n=0, 1, \dots, N-1$; $m=0, 1, \dots, M-1$, 使用随机生成的编码调制形式;

步骤2 令 $n=0; N-1$;

步骤2.1 根据公式计算矩阵 Q_n ;

步骤2.2 $x_n^{(t+1)} = -Q_n^{(t)} x_n^{(t)}$;

步骤2.3 求解近似恒模解 $\tilde{x}_n^{(t+1)} = \exp(j \arg(x_n^{(t+1)}))$;

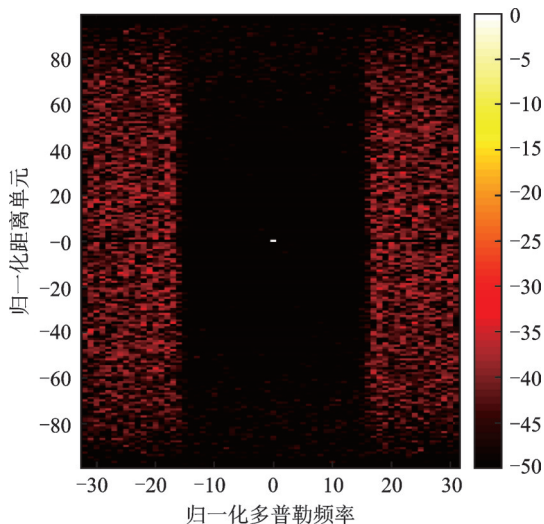
步骤3 令 $k=k+1$, 重复上述步骤2直到满足 $\sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \|x(n, m)^{(k+1)} - x(n, m)^{(k)}\|^2 \leq \epsilon$ 。

4 计算机仿真与性能分析

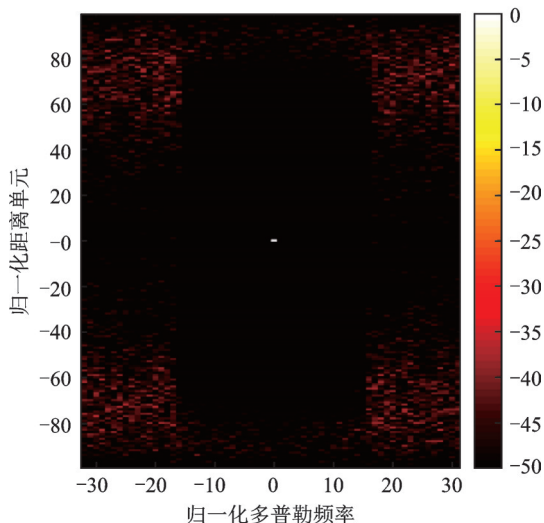
选取参数: 直升机载火控雷达载频 35 GHz, 重频 100 kHz, 带宽 10 MHz, 一个 CPI 内脉冲个数 100, 脉宽在 $0.8 \sim 2 \mu\text{s}$ 之间变化, 即对应的脉内编码码长 M 在 $8 \sim 20$ 之间变化。

目标区域 Φ 的参数为 $\Phi = \{(p, q) | -M/2 \leq p \leq M/2, -N/4 \leq q \leq N/4\}$ 。

图1给出了脉冲个数 100 和码长 20 下的基于



(a) Agile waveform optimization based on SVD



(b) Agile waveform optimization based on cyclic algorithm

图1 基于SVD分解和循环算法的优化后的模糊函数俯视图
Fig.1 Top view of optimized ambiguity function based on SVD and cyclic algorithm

SVD分解和循环计算的捷变波形优算法优化后的模糊函数俯视图。

图2给出了基于SVD分解和循环计算的捷变波形优算法的收敛。由图2可见, 基于SVD分解的方法收敛速度更快, 基于循环计算的方法收敛速度稍慢, 但在经过400次迭代计算后二者优化性能接近。

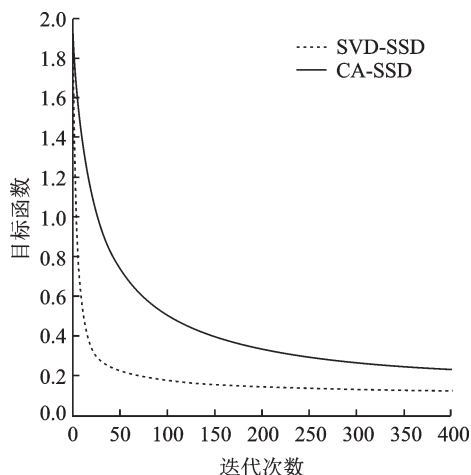


图2 捷变波形优化算法的收敛曲线

Fig.2 Convergence curve of agile waveform optimization algorithm

图3给出了在迭代100次后不同算法在不同 M 下的优化性能, 可见基于SVD的优化算法结果优于基于循环计算的算法。

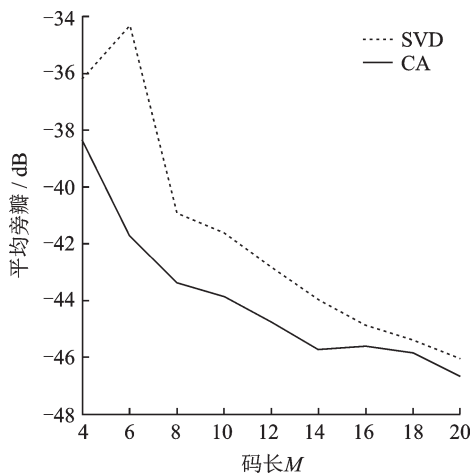
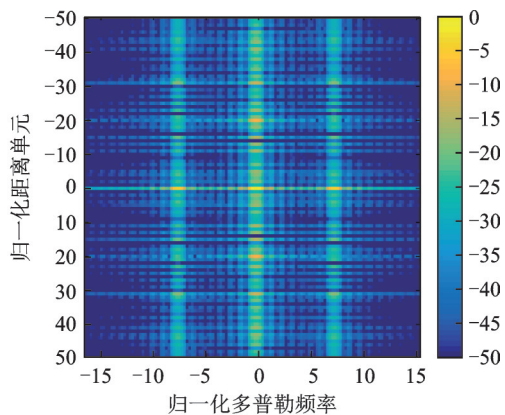


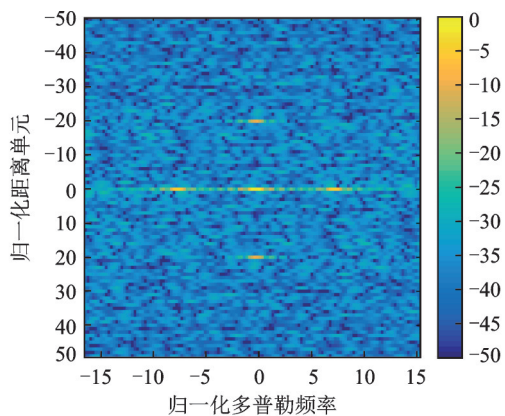
图3 在不同 M 下的捷变波形优化性能

Fig.3 Agile waveform optimization performance using different M

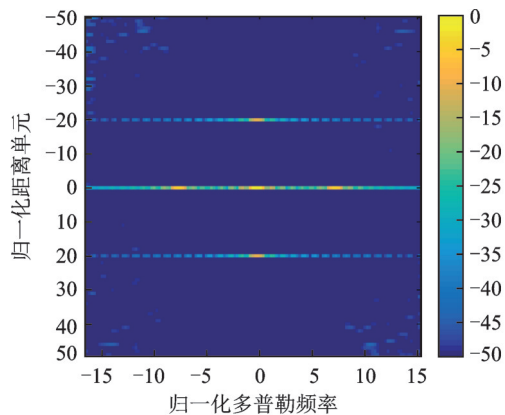
图4给出了脉冲个数 100 和码长 20 下捷变波形对多目标的处理结果。由图4可见, LFM 和随机捷变波形的副瓣整体较高, 其中随机捷变波形的副瓣分散, LFM 波形的副瓣呈现十字形。经过优化后的捷变波形副瓣整体较低。



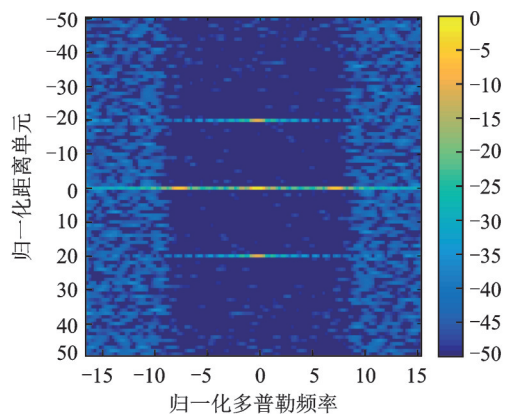
(a) Result of multi-target processing with LFM waveform



(b) Result of multi-target processing with random agile waveform



(c) Result of multi-target processing with agile waveform based on SVD



(d) Result of multi-target processing with agile waveform based on cyclic algorithm

图 4 捷变波形对多目标的处理结果

Fig.4 Results of multi-target processing with agile waveform

5 结 论

本文针对直升机载火控雷达在多脉冲和短码长下的捷变波形优化设计问题,提出了具有目标区域低旁瓣模糊函数的捷变相位编码波形优化设计算法。算法通过 SVD 分解和循环计算框架求解带约束的四次型优化问题。其中 SVD 分解的波形优化算法收敛性更好,循环计算的波形优化算法计算简单,不涉及复杂运算形式。仿真结果表明,两种算法在设计脉冲串性能上接近,但 SVD 分解算法收敛速度更快,循环计算算法具有更高的运算速度。

参考文献:

- [1] 喻光正. 直升机载雷达的发展 B[J]. 雷达科学与技术, 2003(2):65-68.
YU GuangZheng. Review for helicopter radar development[J]. Radar Science and Technology, 2003(2): 65-68.
- [2] 石智新. 国外直升机载雷达[J]. 四川兵工学报, 2012, 33(3):115-118.
SHI Zhixin. Foreign helicopter-borne radar[J]. Journal of Sichuan Ordnance, 2012, 33(3):115-118.
- [3] 李兵舰, 田德民. 直升机载毫米波雷达应用及其干扰方法探讨[J]. 舰船电子对抗, 2011, 34(6):19-22.
LI Binjian, TIAN Demin. Discussion on the application and jamming methods of helicopter-borne millimeter-wave radars[J]. Shipboard Electronic Countermeasure, 2011, 34(6):19-22.
- [4] 吴悦. 基于自适应捷变波形的认知雷达干扰对抗技术[D]. 南京: 南京航空航天大学, 2018.
WU Yue. Anti-jamming technology of cognitive radar based on adaptive agile waveform[D]. Nanjing: Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2018.
- [5] HE H, LI J, STOCIA P. Waveform design for active sensing systems: A computational approach[M]. Cambridge, U.K.: Cambridge University Press, 2012: 49-53.
- [6] ARLERY F, KASSAB R, TAN U. Efficient optimization of the ambiguity functions of multi-static radar waveforms[C]// Proceedings of 2016 17th International Radar Symposium (IRS). Krakow: IEEE, 2016: 1-6.
- [7] BOYD S, PARIKH N, CHU E, et al. Distributed optimization and statistical learning via the alternating direction method of multipliers[J]. Foundations & Trends in Machine Learning, 2010, 3(1):1-122.
- [8] LIANG J L, HING C S, LI J. Unimodular sequence design based on alternating direction method of multipliers[J]. IEEE Transactions on Signal Processing,

- 2016, 64(20): 5367-5381.
- [9] HUNTER D R, LANGE K. Quantile regression via an MM algorithm[J]. Journal of Computational & Graphical Statistics, 2000, 9(1):60-77.
- [10] SONG J X, BABU P, PALOMAR D P. Sequence design to minimize the weighted integrated and peak sidelobe levels[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2016, 64(8):2051-2064.
- [11] KERAHROODI A, AUBRY M, DE MAIO A, et al. A coordinate-descent framework to design low PSL/ISL sequences[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2017, 65(22): 5942-5956.
- [12] KERAHROODI M, SHANKAR M R B, MISHRA K V, et al. Meeting the lower bound on designing set of unimodular sequences with small aperiodic/periodic ISL[C]// Proceedings of 2019 20th International Radar Symposium (IRS). Ulm, Germany: IEEE, 2019: 1-13.
- [13] DENG Hai. Polyphase code design for orthogonal netted radar systems[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2004, 52(11): 3126-3135.
- [14] 吉根林. 遗传算法研究综述[J]. 计算机应用与软件, 2004, 21(2):69-73.
- JI Genlin. Survey on genetic algorithm[J]. Computer Applications and Software, 2004, 21(2):69-73.
- [15] 雷开友. 粒子群算法及其应用研究[D]. 重庆: 西南大学, 2006.
- LEI Kaiyou. Research on particle swarm optimization and its application[D]. Chongqing: Southwest University, 2006.

(编辑:张蓓)