

DOI:10.16356/j.1005-2615.2021.02.013

直升机切换 LPV 鲁棒跟踪控制

张绍杰¹, 李 硕¹, 严 鹏¹, 鲁 可^{1,2}

(1. 南京航空航天大学自动化学院, 南京 211106;

2. 中国直升机设计研究所直升机旋翼动力学重点实验室, 景德镇 333001)

摘要: 针对直升机跟踪控制问题, 提出了一种基于模态依赖平均驻留时间 (Mode-dependent average dwell time, MDADT) 切换信号的线性变参数 (Linear variable parameter, LPV) 控制方法。在直升机全飞行包线内选取可以表征直升机飞行特性的状态作为增益调度变量, 利用“小扰动”假设将全量方程进行线性化处理并对其配平求解, 将复杂的非线性模型转化为可以计算求解的线性模型。采用雅可比线性化方法在非线模型平衡点处进行线性化处理, 使用数据拟合的方法在理论上建立与非线模型动态接近的 LPV 模型。对时变参数进行区间划分, 结合参数依赖的多 Lyapunov 函数和 MDADT 方法, 给出了保证切换 LPV 系统全局一致指数稳定的充分条件。考虑时变参数的渐变特性, 以及由于测量误差和参数飘移等因素而造成的控制器增益变化, 得到了在 MDADT 切换信号限制下的切换律。仿真结果表明所设计的控制律能有效动态跟踪直升机前飞的不同状态量, 验证了所建模型和控制算法的有效性和可行性。

关键词: 直升机; 线性变参数建模; 切换多胞系统; 跟踪控制; 模态依赖平均驻留时间

中图分类号: V249.1 **文献标志码:** A **文章编号:** 1005-2615(2021)02-0260-07

Switching LPV Robust Tracking Control for Helicopters

ZHANG Shaojie¹, LI Shuo¹, YAN Peng¹, LU Ke^{1,2}

(1. College of Automation Engineering, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing 211106, China;

2. Science and Technology on Rotorcraft Aeromechanics Laboratory, China Helicopter Research and Development Institute, Jingdezhen 333001, China)

Abstract: A linear parameter-varying (LPV) control scheme under the mode-dependent average dwell time (MDADT) switching signals is proposed. In the full flight envelope of the helicopter, the state vectors that can describe the flight characteristics of the helicopter are selected as the gain scheduling variable, and the “small disturbance” hypothesis is used to linearize the mathematic model. The Jacobian linearization is used to get the linear model, and the LPV model is established by data fitting. Combined with the parameter-dependent multi-Lyapunov function and the average dwell time method, the time-varying parameters are divided into intervals, and a sufficient condition to ensure the global uniform exponential stability of the switching LPV system is given. Considering the gradual change of time-varying parameters, the switching law in the limitation of the MDADT switching is obtained. On the other hand, the gain change of the controller caused by measurement error and parameter drift is also considered. Simulation results indicate the effectiveness and feasibility of the proposed model and the control method.

Key words: helicopter; linear variable parameter (LPV) modeling; switching polytopic system; tracking control; mode-dependent average dwell time (MDADT)

基金项目: 航空科学基金(201957052002)资助项目; 江苏省自然科学基金(BK20201291)资助项目。

收稿日期: 2020-07-22; **修订日期:** 2020-10-15

通信作者: 张绍杰, 男, 副教授, E-mail: zhangsj@nuaa.edu.cn。

引用格式: 张绍杰, 李硕, 严鹏, 等. 直升机切换 LPV 鲁棒跟踪控制[J]. 南京航空航天大学学报, 2021, 53(2): 260-266.
ZHANG Shaojie, LI Shuo, YAN Peng, et al. Switching LPV robust tracking control for helicopters[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2021, 53(2): 260-266.

直升机以旋翼作为主要升力来源,不需要机场跑道,能够很好地实现垂直起降和空中悬停,机动灵活,但比固定翼飞机有更复杂的气动特性,给控制律设计带来了巨大的挑战。线性变参数(Linear variable parameter, LPV)系统具有线性形式,能够描述复杂的非线性模型,进而可采用线性控制理论来解决复杂的飞行控制问题,因此近年来得到了控制理论学者们的广泛关注^[1]。在对LPV系统进行控制器设计时,通常是采用传统的增益调度(Gain scheduled, GS)方法^[2],但这种方法选取调度变量的范围往往决定了系统的性能,如稳定性、 H_∞ 性能。若调度变量大范围波动,单一的LPV控制器不能获得良好的系统性能,甚至导致系统不稳定,所以这种方法难以适用于调参变量大范围时变的非线性飞行控制系统。文献[3]将切换控制和LPV控制方法相结合,提出了一种参数依赖多Lyapunov函数的切换线性变参数控制方法。文献[4]根据发动机相似工作原理以及平方和规划,基于发动机全飞行包线的换算线性变参数模型,提出了一种基于区域极点配置的航空发动机全包线切换 H_∞ /LPV控制方法,通过划分包线来极点配置的方法降低了系统的保守性。文献[5]基于切换系统提出了一种平均驻留时间(Average dwell time, ADT)切换信号设计方法,实现了平均意义上稳定线性子系统间的慢切换。文献[6]基于模态依赖平均驻留时间(Mode-dependent average dwell time, MDADT)方法,研究了一类线性不确定切换系统的稳定性,较ADT切换信号的设计,MDADT更灵活、更易实现。

目前国内外有许多学者将重点放在LPV模型建立上以及ADT和MDADT控制问题的研究上。文献[7]结合ADT方法,将后掠角的变化范围分为3个区域并分别设计控制器,解决了不同后掠角有不同系统性能的问题,通过切换控制器来保证变体过程中的稳定性。文献[8]对倾转旋翼机纵向模型进行配平线性化,得出在不同短舱倾角不同飞行模式定常飞行时的平衡工作点,采用MDADT切换鲁棒 H_∞ 跟踪控制方法对飞行器从直升机模态转换到固定翼模态的过渡过程进行切换跟踪控制。但目前针对直升机,建立LPV系统并设计带有MDADT的切换控制器的研究较少。

本文针对UH-60军用直升机,以这类直升机的非线性模型为基础,建立LPV纵向模型,并研究了其纵向模型在MDADT切换信号下控制器设计方法。结合参数依赖的多Lyapunov函数和MDADT方法,给出了保证切换LPV系统全局一

致指数稳定的充分条件。并考虑由于测量误差和参数飘移等因素而造成的控制器增益变化,设计带有MDADT限制的切换律。由Simulink仿真可知所设计的控制律能有效地动态跟踪直升机前飞状态的不同状态量,验证了所建模型和控制算法的有效性和可行性。

1 直升机纵向切换LPV建模

虽然利用气动力方程组建立的非线性系统能较为精确地描述直升机,但在实际工程中,针对直升机这类高阶、复杂的被控对象,用现有控制理论解决控制问题时仍然存在诸多的限制和局限性^[9]。LPV系统是一类特殊的非线性动态系统,这类系统只有参数是可变的。相比较于传统的线性定常(Linear time invariant, LTI)系统,LPV系统通过将复杂的飞行器对象进行LPV建模,可简易描述飞行器动力学方程,从而方便运用鲁棒控制等线性控制理论来设计变增益控制器。

1.1 纵向运动方程的线性化与切换LPV模型

当直升机作速度大小与方向均不变的定常直线运动时,其处于平衡状态,此时作用于机体轴上的合力以及合力矩均为零,根据牛顿运动定律可以得到6个平衡态动力学方程。且由于纵向运动模态下不考虑滚转角 ϕ ,偏航角 ψ ,滚转角速度 q ,偏航角速度 r 等的影响,直升机纵向平衡方程为

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -\omega q - g \sin\theta + \frac{X}{m} \\ \dot{w} &= uq + g \cos\theta + \frac{Z}{m} \\ \dot{q} &= \frac{M}{I_y} \\ \dot{\theta} &= q \end{aligned} \quad (1)$$

式中: u, w 分别为直升机沿机体轴的线速度; m 为直升机总质量; θ 为俯仰角; q 为俯仰角速率; I_y 为直升机惯性矩; X, Z 为直升机在机体轴下各部件气动力的矢量相加; M 为俯仰力矩。

目前常用的将非线性模型表示为LPV模型的方法有3种,分别是雅克比线性化方法、状态变换方法和函数替换法。由于雅克比线性化法适用于任何可在平衡点处线性化的非线性系统,本文采用雅克比线性化法来完成模型的建立。

首先需要选择调度变量,并对其作用范围进行划分,由于前飞状态的4个状态量中,俯仰角速率 q 可由俯仰角 θ 求导表示,因此在选择增益调度变量 ρ 时选取 u, w, θ 作为调度状态。且由于 w 和 θ 的数值较小且仅在小范围内变化,因而在整个飞行包

线中仅对 u 的数值进行划分。

其次需要计算各状态变量的平衡点。方程式(1)可表述为如下形式

$$\dot{x} = f(x, \delta) \quad (2)$$

式中: $x = [u, w, q, \theta]^T$, $\delta = [\delta_e, \delta_c]^T$, δ_e 为直升机纵向周期变距, δ_c 为旋翼总距。

当式(2)中的 $f=0$ 时, 便可以得到状态变量和输入变量的平衡点 x_{eq} 和 δ_{eq} 。对求得的一系列平衡点并进行上述泰勒展开, 从而可以得到

$$\begin{aligned} \dot{x} = f(x, \delta) = f(x_{eq}, \delta_{eq}) + \\ \frac{\partial f}{\partial x} (x - x_{eq}) + \frac{\partial f}{\partial \delta} (\delta - \delta_{eq}) \end{aligned} \quad (3)$$

式中: $\frac{\partial f}{\partial x}$ 表示函数 f 对状态量 x 的偏导数, $\frac{\partial f}{\partial \delta}$ 表示函数 f 对输入量 δ 的偏导数。

保留式中的线性部分, 可得

$$\Delta \dot{x} = A \Delta x + B \Delta \delta \quad (4)$$

式中: $\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{trim} = A$, $\frac{\partial f}{\partial \delta} \Big|_{trim} = B$ 。

通过一系列平衡点并进行上述泰勒展开, 从而可得到一系列能局部逼近非线性动态的线性时不变模型, 如图1所示。

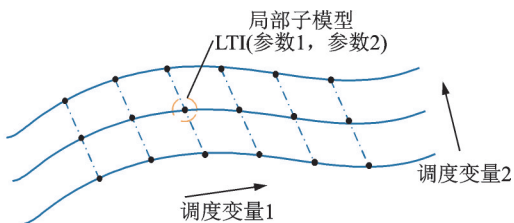


图1 基于雅克比方法的LPV模型示意图

Fig.1 Schematic diagram of LPV model established by Jacobi linearization method

最后将一系列线性化模型进行数值拟合, 从而得到直升机LPV模型

$$\dot{x} = A(\rho)x + B(\rho)\delta \quad (5)$$

相应于第 $\sigma(t)$ 个子区域的LPV模型表示为

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{q} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = A_{\sigma(t)}(\rho) \begin{bmatrix} u \\ w \\ q \\ \theta \end{bmatrix} + B_{\sigma(t)}(\rho) \begin{bmatrix} \delta_e \\ \delta_c \end{bmatrix} \quad (6)$$

1.2 跟踪控制增广切换LPV模型

考虑系统式(5)的跟踪控制问题, 记指令信号为 $r(t)$, 系统的输出 $y(t) = Cx$, C 为适当维数矩阵。则系统控制目标为

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [y(t) - r(t)] = 0 \quad (7)$$

将跟踪误差积分项

$$x_e = [y(\tau) - r(\tau)] d\tau \quad (8)$$

与LPV模型式(6)联合, 可得增广系统为

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} = \tilde{A}_{\sigma(t)}(\rho) \tilde{x} + \tilde{B}_{\sigma(t)}(\rho) \delta + \\ B_{r\sigma(t)}(\rho) r(t) \end{aligned} \quad (9)$$

式中: $\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x_e \end{bmatrix}$, $\tilde{A}_{\sigma(t)}(\rho) = \begin{bmatrix} A_{\sigma(t)}(\rho) & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix}$, $\tilde{B}_{\sigma(t)}(\rho) = \begin{bmatrix} B_{\sigma(t)}(\rho) \\ 0 \end{bmatrix}$, $B_{r\sigma(t)} = [0 \quad -I]^T$ 。

2 直升机切换LPV控制器设计

2.1 LPV模型的多胞形表示

对LPV系统设计控制器时, 实质是在变参数的轨迹上求线性矩阵不等式(Linear matrix inequality, LMI)的解。若整个变参数轨迹上LMI都有解, 则所设计的控制器可保证闭环系统稳定且满足一定的性能指标。而实际求解LMI时, 整个变参数轨迹上存在无穷组LMI, 为控制器的求解增添难度。由于多胞形属于凸集, LPV系统若具有多胞形结构, 则可用顶点来表示LPV系统, 仅需对顶点设计切换控制器^[10-11]。

考虑如下LPV系统

$$\begin{cases} \dot{x} = A(\rho(t))x + B(\rho(t))\delta \\ y = C(\rho(t))x + D(\rho(t))\delta \end{cases} \quad (10)$$

系统矩阵 $H(\rho(t)) = \begin{bmatrix} A(\rho(t)) & B(\rho(t)) \\ C(\rho(t)) & D(\rho(t)) \end{bmatrix}$ 为

一个在给定多胞形内取值的闭集, 即

$$H(\rho(t)) \in \Theta \{H_1, \dots, H_k\} =$$

$$\left\{ \sum_{i=1}^k a_i H_i, a_i \geq 0, \sum_{i=1}^k a_i = 1 \right\}$$

$$a_i = \frac{\prod_{j=1}^k |\rho_k - \text{com}(\rho_k)|}{\prod_{j=1}^k (\bar{\rho}_k - \underline{\rho}_k)}$$

$$\rho_k \in [\bar{\rho}_k, \underline{\rho}_k]$$

$$\text{com}(\rho_k) = \begin{cases} \bar{\rho}_k & \text{if } (\rho_k) = \bar{\rho}_k \\ \underline{\rho}_k & \text{if } (\rho_k) = \underline{\rho}_k \end{cases}$$

(11)

式中: H_k 为已知矩阵, a_i 为凸分解得到的权系数函数。这种LPV系统具有凸性质。

若系统矩阵中的 A 、 B 、 C 、 D 可由参数 $\{\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n\}$ 表示, 并具有以下形式

$$\begin{cases} A(\rho) = A_0 + \rho_1 A_1 + \dots + \rho_n A_n \\ B(\rho) = B_0 + \rho_1 B_1 + \dots + \rho_n B_n \\ C(\rho) = C_0 + \rho_1 C_1 + \dots + \rho_n C_n \\ D(\rho) = D_0 + \rho_1 D_1 + \dots + \rho_n D_n \end{cases} \quad (12)$$

则将这类模型称为参数依赖模型。这类模型

可通过调参变量的极值组合转化为多胞形,由此达到简化计算量,减少计算的目的。

2.2 切换 LPV 控制器设计

考虑如下切换 LPV 系统

$$\begin{cases} \dot{x} = A_{\sigma(t)}(\rho(t))x + B_{\delta \cdot \sigma(t)}(\rho(t))\delta + \\ B_{w \cdot \sigma(t)}(\rho(t))\mathbf{T}(t) \\ z = C_{\sigma(t)}(\rho(t))x + D_{\sigma(t)}(\rho(t))\delta \end{cases} \quad (13)$$

式中: $\rho(t)$ 为可时刻检测的变参数, x 为系统的状态变量, $\mathbf{T}(t)$ 为系统所受到的外部扰动。 $z(t)$ 为 H_∞ 性能输出。

定义 1^[12] 对于切换信号 $\sigma(t) \in \Delta$, 假设 $\forall 0 \leq t \leq T$, $N_{\sigma_s}(t, T)$ 表示切换信号在开区间 (t, T) 间断切换的次数, $T_s(t, T)$ 表示第 s 个包线区域在 (t, T) 运行的总时间。如果存在两个常数 $N_{0s} > 0, \tau_{as} > 0$ 使得

$$N_{\sigma_s}(t, T) \leq N_{0s} + \frac{T_s(t, T)}{\tau_{as}} \quad (14)$$

则切换信号 $\sigma(t)$ 具有模态依赖时间 τ_{as} 。

定义 2^[13] 假设切换系统满足切换信号 $\sigma(t)$, 存在 $\beta > 0, \delta > 0$ 满足

$$\|x\| \leq \beta \|x_0\| e^{-\delta(t-t_0)} \quad t > t_0 \quad (15)$$

式中: $\|x\|$ 为状态向量的向量范数, 则切换系统全局一致指数稳定。

引理 1^[14] 考虑切换 LPV 系统式(13)。若存在正定连续可微函数 $V_n(x)$ 和 Δ_∞ 类函数 $\Lambda_{1s}, \Lambda_{2s}, \forall s \in \sigma$, 给定常数 $\mu \geq 1, \gamma > 0, \lambda_s > 0$, 有式(16)成立

$$\begin{aligned} \Lambda_{1s}(\|x\|) &\leq V_s(x) \leq \Lambda_{2s}(\|x\|) \\ \dot{V}_s(x) + \lambda_s V_s(x) &\leq \gamma^2 \mathbf{T}^T(t) \mathbf{T}(t) \gamma - z^T z \\ V_n(x) &\leq \mu_s V_m(x) \quad \forall n \neq m \in \sigma \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{bmatrix} A_{sn} S_s + B_{\delta \cdot sn} U_{sn} + S_s A_{sn}^T + U_{sn}^T B_{\delta \cdot sn}^T + \alpha_s S_s & S_s B_{r_n} & C_{sn}^T & \gamma_{sn} B_{\delta \cdot sn} H & S_s E^T \\ * & -\gamma^2 I & D_{sn}^T & 0 & 0 \\ * & * & -I & 0 & 0 \\ * & * & * & \gamma_{sn}^{-1} I & 0 \\ * & * & * & * & \gamma_{sn}^{-1} I \end{bmatrix} < 0 \quad (20)$$

$$s \in \sigma, n \in N, S_i \leq \mu_s S_j, \forall i \neq j \in \sigma$$

那么在包线范围 σ 内存在一组切换控制器

$$K_{sn} = U_{sn} S_s^{-1} \quad n \in N \quad (21)$$

使得切换 LPV 系统全局一致指数稳定, 并具有 L_2 增益 γ , 且切换信号满足式(17)。

证明: 选取如下形式的 Lyapunov 函数

$$V_s = \tilde{x}^T S_s \tilde{x} \quad s \in \sigma \quad (22)$$

切换律 $\sigma(t)$ 满足 MDADT 限制

$$\tau_{as} \geq \tau_{as}^* = \frac{\ln \mu_s}{\lambda_s} \quad (17)$$

则切换系统指数稳定, 且满足 H_∞ 性能 γ 。

假设 LPV 模型为参数依赖模型, 则可对形如式(13)的 LPV 切换系统设计状态反馈控制律

$$\delta = K(\rho(t))x \quad (18)$$

来保证系统一致稳定, 且具有指定的 L_2 增益 γ 。

考虑到控制器由于测量误差和参数飘移等因素造成的控制器增益变化, 闭环系统可记为

$$\begin{cases} \dot{x} = A_{cl \cdot \sigma(t)}(\rho(t))x + B_{r \cdot \sigma(t)}(\rho(t))\mathbf{T}(t) \\ z = C_{\sigma(t)}(\rho(t))x + D_{\sigma(t)}(\rho(t))\mathbf{T}(t) \end{cases} \quad (19)$$

式中: $A_{cl \cdot \sigma(t)}(\rho(t)) = A_{\sigma(t)}(\rho(t)) + B_{\delta \cdot \sigma(t)}(\rho(t)) \cdot K(\rho(t))$, $K(\rho(t)) = \sum_{s=1}^M \sum_{n=1}^N a_{sn} (K_{sn} + \Delta K)$ 。其中 s 为第 s 个子区域, n 为多胞系统的第 n 个顶点, a_{sn} 为凸分解得到的权系数函数, 控制器 $\Delta K = HPE$ 且 $P^T P \leq I, H$ 和 E 为适当维数的常数矩阵。

引理 2^[15] $N = N^T, P, Q$ 为适当维数的常数矩阵且 $\Sigma \Sigma^T \leq I$, 下列条件等价:

- (1) $N + P \Sigma Q + Q^T \Sigma^T P^T < 0$;
- (2) 存在常数 ϵ 满足 $N + \epsilon P P^T + \epsilon^{-1} Q^T Q < 0$ 。

定理 考虑 LPV 系统式(13), 假设系统可用多胞形来表示, 则求解 H_∞ 控制器的过程可以转变成求解一组 LMI, 即对每一个包线 s 求解一个状态反馈控制器使得闭环系统稳定。给定常数矩阵 H, E 和标量 $\gamma > 0$, 令 $0 < \lambda_s < 1, \mu_s > 1$, 若存在对称正定矩阵 $S_s > 0$, 矩阵 U_{sn} , 有下列 LMIs 成立

对 V_s 求导, 有

$$\begin{aligned} \dot{V}_s &= 2 \tilde{x}^T S_s \dot{\tilde{x}} = \\ \begin{bmatrix} x \\ \mathbf{T}(t) \end{bmatrix}^T &\begin{bmatrix} A_{cl \cdot sn} S_s + S_s A_{cl \cdot sn}^T & \tilde{S}_s B_{r \cdot sn} \\ * & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \mathbf{T}(t) \end{bmatrix} = \\ \begin{bmatrix} x \\ \mathbf{T}(t) \end{bmatrix}^T &\begin{bmatrix} A_{cl \cdot sn} S_s + S_s A_{cl \cdot sn}^T & \tilde{S}_s B_{r \cdot sn} \\ * & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \mathbf{T}(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (23)$$

式中： $A_{cl,s}(\rho(t))=A_s(\rho(t))+B_{\delta,s}(\rho(t))\cdot K(\rho(t))$,
 $K(\rho(t))=\sum_{s=1}^M \sum_{n=1}^N (K_{sn} + \Delta K)$ 。

由引理1可知,如果系统全局一致渐近稳定,任意切换信号满足 $\tau_{as} \geq \tau_{as}^* = \frac{\ln \mu_s}{\lambda_s}$,且有 $\dot{V}_s(x) + \lambda_s V_s(x) \leq \gamma^2 \mathbf{r}^T(t) \mathbf{r}(t) - \mathbf{z}(t)^T \mathbf{z}(t)$,又由 $\mathbf{z}(t) = [C \ D] \begin{bmatrix} x \\ \mathbf{r}(t) \end{bmatrix}$,可得

$$\begin{bmatrix} A_{sn} S_s + B_{\delta,sn} K_{sn} S_s + S_s A_{sn}^T + S_s K_{sn}^T B_{\delta,sn}^T + \alpha_s S_s & S_s B_{r_n} & C_{sn}^T \\ * & -\gamma^2 I & D_{sn}^T \\ * & * & -I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{\delta,sn} \Delta K S_s + S_s \Delta K^T B_{\delta,sn}^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} < 0$$

$s \in \sigma, n \in N, S_i \leq \mu_s S_j, \forall i \neq j \in \sigma$

(26)

令 $K_{sn} S_s = U_{sn}$,由引理2可知,存在标量 γ_{sn} 使得

$$\begin{bmatrix} A_{sn} S_s + B_{\delta,sn} U_{sn} + S_s A_{sn}^T + U_{sn}^T B_{\delta,sn}^T + \alpha_s S_s & S_s B_{r_n} & C_{sn}^T \\ * & -\gamma^2 I & D_{sn}^T \\ * & * & -I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma_{sn} B_{\delta,sn} H H^T B_{\delta,sn} + \gamma_{sn}^{-1} S_s E^T E S_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} < 0$$

$s \in \sigma, n \in N, S_i \leq \mu_s S_j, \forall i \neq j \in \sigma$

(27)

通过Schur补定理,式(27)等价于

$$\begin{bmatrix} A_{cl_n} S_s + S_s A_{cl_n}^T + \alpha_s S_s & S_s B_{r_n} & C_{cl_n}^T & \lambda_r B_{um} H & S_s E^T \\ * & -\gamma^2 I & D_n^T & 0 & 0 \\ * & * & -I & 0 & 0 \\ * & * & * & \lambda_r^{-1} I & 0 \\ * & * & * & * & \lambda_r^{-1} I \end{bmatrix} < 0$$

$s \in \sigma, n \in N, S_i \leq \mu_s S_j, \forall i \neq j \in \sigma$

(28)

若式(28)有解,那么求得的这一组切换控制器可保证切换LPV系统全局一致稳定,并具有 L_2 增益 γ 。证毕。

3 仿真验证与分析

选取机体坐标系下的线速度(m/s) $u \in [0.5, 72]$, $w \in [-0.03, 0.18]$ 和俯仰角(rad) $\theta \in [-0.005, 0.102]$ 作为时变参数。将 u 划分为3个区域: $0.5 \leq u \leq 20$; $20 \leq u \leq 50$; $50 \leq u \leq 72$,从而飞行包线被划分为3个区域,每个子区域表示为

$$\begin{aligned} \sigma_1: & u \in [0.5, 20] \\ & w \in [-0.03, 0.18] \\ & \theta \in [-0.005, 0.102] \end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned} \sigma_2: & u \in [20, 50] \\ & w \in [-0.03, 0.18] \\ & \theta \in [-0.005, 0.102] \end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{bmatrix} A_{cl,sn} S_s + S_s A_{cl,sn}^T + \lambda_s S_s & S_s B_{r,sn} \\ * & -\gamma^2 I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{sn}^T \\ D_{sn}^T \end{bmatrix} [C \ D] < 0$$

(24)

利用Schur补定理,得到不等式

$$\begin{bmatrix} A_{cl,sn} S_s + S_s A_{cl,sn}^T + \lambda_s S_s & S_s B_{r,sn} & C_{sn}^T \\ * & -\gamma^2 I & D_{sn}^T \\ * & * & I \end{bmatrix} < 0$$

$s \in \sigma, n \in N, S_i \leq \mu_s S_j, \forall i \neq j \in \sigma$

进一步可写成

$$\begin{aligned} \sigma_3: & u \in [50, 72] \\ & w \in [-0.03, 0.18] \\ & \theta \in [-0.005, 0.102] \end{aligned} \tag{31}$$

本文通过选取直升机前飞时平衡点,得到配平模式下的一系列LTI模型。之后采用多元线性回归对这一系列模型拟合,得到该直升机LPV模型,再由1.2节的增广方法对该模型变换,得到仿射参数依赖的模型

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{q} \\ \dot{\theta} \\ u_r - u \\ \theta_r - \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_s & 0 \\ A_r & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \\ q \\ \theta \end{bmatrix} + \int_0^t (u_r - u) d\tau + \int_0^t (\theta_r - \theta) d\tau + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_r \\ \theta_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_s \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_e \\ \delta_c \end{bmatrix} \tag{32}$$

式中

$$A_s(\rho) = A_{0s} + A_{1s}u + A_{2s}u^2 + A_{3s}u^3 + A_{4s}u^4 + A_{5s}\omega + A_{6s}\omega^2 + A_{7s}\omega^3 + A_{8s}\omega^4 + A_{9s}\theta + A_{10s}\theta^2 + A_{11s}\theta^3 \quad (33)$$

$$B_s(\rho) = B_{0s} + B_{1s}u + B_{2s}\omega + B_{3s}\theta \quad (34)$$

$$A_r = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (35)$$

考虑系统的 H_∞ 性能输出

$$z(t) = Cx + Dr(t) \quad (36)$$

式中: $C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 。

对于系统(式(32)), H_∞ 性能输出(式(36)), 设计 $\lambda_1 = 0.12$, $\lambda_2 = 0.1$, $\lambda_3 = 0.1$, $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1.34$ 。利用 MATLAB 中 LMI Control Toolbox^[16], 由式(20~21)可得每个子区域相应的控制器增益。由式(17)可得系统切换律 $\sigma(t)$ 的 MDADT 限制为 $\tau_{a1}^* = 2.43s$, $\tau_{a2}^* = 2.7s$, $\tau_{a3}^* = 2.9s$ 。

给定速度分量 u , 俯仰角 θ 的指令信号分别为

$$u_r = \begin{cases} 10 & 0 \leq t < 20 \\ 30 & 20 \leq t < 40 \\ 20 & 40 \leq t < 60 \\ 60 & 60 \leq t < 80 \end{cases}$$

$$\theta_r = \begin{cases} 0.1 & 0 \leq t < 20 \\ 0.06 & 20 \leq t < 40 \\ 0.077 & 40 \leq t < 60 \\ -0.0052 & 60 \leq t < 80 \end{cases}$$

u, θ 跟踪曲线如图 2~3 所示, ω, q 的响应曲线如图 4~5 所示。

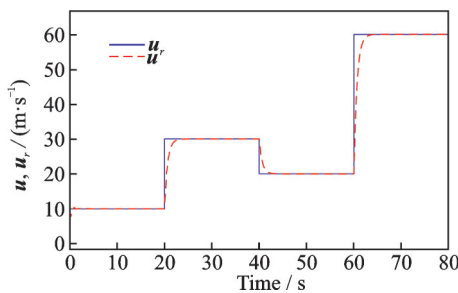


图 2 速度分量 u 跟踪曲线

Fig.2 Tracking curve of velocity component u

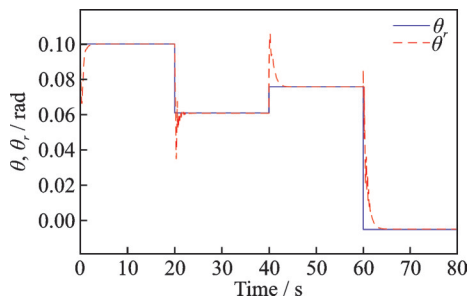


图 3 俯仰角 θ 跟踪曲线

Fig.3 Tracking curve of pitch angle θ

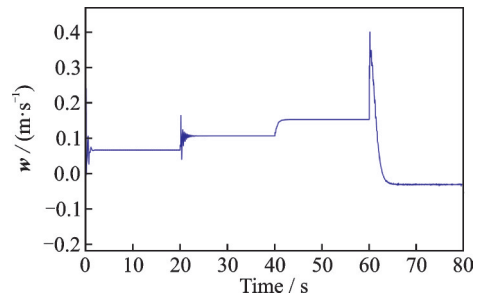


图 4 速度分量 ω 响应曲线

Fig.4 Response curve of velocity component ω

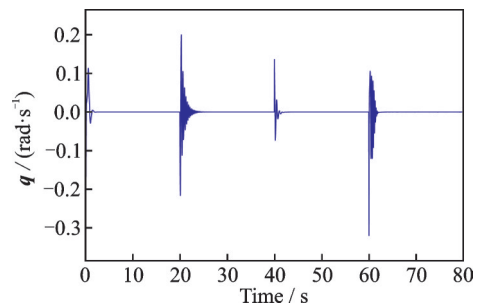


图 5 俯仰角速率 q 响应曲线

Fig.5 Response curve of pitch rate q

切换信号的检测通常需要一定的时间,因此控制器的切换往往滞后于系统模式的切换。但在 MDADT 限制下,可忽略其他区域的运行时间,使其小于每个单独区域内任意两个连续切换之间的驻留时间的平均值。由上述仿真结果可知在整个时间域内都能在 MDADT 内能有效地动态跟踪直升机前飞状态的不同状态量。

4 结 论

本文针对直升机跟踪控制问题,基于 MDADT 切换信号,设计了一组 LPV 控制器。对可以表征系统特征的时变参数进行区间划分,结合参数依赖的多 Lyapunov 函数,给出了保证切换 LPV 系统全局一致指数稳定的充分条件。考虑到控制器由于测量误差和参数飘移等因素而造成的控制器增益变化,通过 LMI 求解得到了在 MDADT 切换信号限制下的切换律,仿真结果验证了所建模型和控制算法的有效性和可行性。

参考文献:

[1] HASSENI S E I, ABDOU L. Robust LPV control for attitude stabilization of a quadrotor helicopter under input saturations [J]. Advances in Technology Innovation, 2020, 5 (2): 98-111.

[2] SHAMMA J S, ATHANS M. Guaranteed properties of gain scheduled control for linear parameter-varying plants [J]. Automatica, 1991, 27 (3): 559-564.

- [3] LU Bei, WU Fen. Switching LPV control designs using multiple parameter-dependent Lyapunov functions [J]. *Automatica*, 2004, 40 (11): 1973-1980.
- [4] 王宁, 潘慕绚, 黄金泉. 基于区域极点配置的航空发动机全包线 H_∞ /LPV 控制[J]. *南京航空航天大学学报*, 2019, 51 (4): 456-465.
WANG Ning, PAN Muxuan, HUANG Jinqun. H_∞ /LPV control for aeroengine in full flight envelope based on guardian maps theory [J]. *Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics*, 2019, 51 (4): 456-465.
- [5] LIU Hao, SHEN Yi. Asynchronous finite-time stabilization of switched systems with average dwell time [J]. *IET Control Theory & Applications*, 2012, 6 (9): 1213-1219.
- [6] XU Ning, CHEN Yun, XUE Anke, et al. A new approach to stability analysis of switched systems composed of two subsystems with average dwell time switching [J]. *International Journal of Systems Science*, 2020, 51 (10): 1862-1872.
- [7] 何塘, 章卫国, 王敏文, 等. 变体飞行器切换线性变参数鲁棒 H_∞ 控制器[J]. *西北工业大学学报*, 2016, 34 (6): 1045-1049.
HE Yong, ZHANG Weiguo, WANG Minwen, et al. Switching LPV robust H_∞ controller for morphing aircraft [J]. *Journal of Northwestern Polytechnical University*, 2016, 34 (6): 1045-1049.
- [8] 杨洁, 陈谋, 熊师洵, 等. 倾转旋翼机平均驻留时间切换鲁棒 H_∞ 跟踪控制[J]. *控制理论与应用*, 2020, 37 (5): 1018-1027.
YANG Jie, CHEN Mou, XIONG Shixun, et al. Average dwell time switching robust H_∞ tracking control for a tiltrotor aircraft [J]. *Control Theory & Applications*, 2020, 37 (5): 1018-1027.
- [9] 杨一栋. 直升机飞行控制[M]. 北京: 国防工业出版社, 2019.
YANG Yidong. Helicopter flight control [M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2019.
- [10] 李文强. LPV 系统鲁棒变增益控制研究及其应用[D]. 长沙: 国防科学技术大学, 2009.
LI Wenqiang. Research and application of robust gain-scheduling based on LPV system [D]. Changsha: National University of Defense Technology, 2009.
- [11] 王明昊, 刘刚, 赵鹏涛, 等. 高超声速飞行器的 LPV 变增益状态反馈 H_∞ 控制[J]. *宇航学报*, 2013, 34 (4): 488-495.
WANG Minghao, LIU Gang, ZHAO Pengtao, et al. Variable gain state feedback H_∞ control for hypersonic vehicle based on LPV [J]. *Journal of Astronautics*, 2013, 34 (4): 488-495.
- [12] LU Qiugang, ZHANG Lixian, KARIMI H R, et al. H_∞ control for asynchronously switched linear parameter varying systems with mode dependent average dwell time [J]. *IET Control Theory & Applications*, 2013, 7 (5): 673-683.
- [13] LIBERZON D, MORSE A S. Basic problems in stability and design of switched systems [J]. *IEEE Control Systems*, 1999, 19 (5): 59-70.
- [14] 卢秋岗. 切换 LPV 系统控制及在高超声速飞行器中的应用[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2013.
LU Qiugang. Control of switched LPV systems with applications to the hypersonic vehicles [D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2013.
- [15] LU Zhongda, LU Junxiao, ZHANG Jiaqi, et al. Finite-time non-fragile filtering for nonlinear networked control systems via a mixed time/event-triggered transmission mechanism [J]. *Control Theory and Technology*, 2020, 18 (2): 168-181.
- [16] 俞立. 鲁棒控制[M]. 北京: 清华大学出版社, 2002.
YU Li. Robust control [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2002.

(编辑: 孙静)