

DOI:10.16356/j.1005-2615.2021.01.013

周期分布压电纤维复合材料平面问题研究

杨绘峰^{1,2}, 高存法¹

(1. 南京航空航天大学机械结构力学及控制国家重点实验室, 南京 210016;
2. 江苏科技大学船舶与海洋工程学院, 镇江 212003)

摘要: 为了探索压电纤维复合材料中局部应力场的分布规律和准确预测其有效刚度, 基于复变函数理论和线性压电理论, 得到了含周期分布压电纤维复合材料平面问题的半解析解。根据单胞内基体和夹杂所占区域的几何特点, 分别给出复势函数的级数形式, 这些复势函数在基体与夹杂的相邻界面上应满足连续性条件, 在单胞的外边界应满足周期性边界条件和远场加载条件, 从而确定复势函数中的待定系数, 进而确定局部场, 最后根据平均场理论给出了复合材料有效刚度和等效压电常数。结果表明: 当基体模量大于压电夹杂模量时, 电载荷对夹杂周围的局部应力场的影响是显著的, 施加沿压电夹杂极化方向的正向电载荷有可能使基体与夹杂相邻界面上的最大等效应力位置相对于无电载或施加反向电载荷时发生 90° 改变; 反之, 电载荷对局部应力场几乎没有影响。由于微观结构的对称性, 使得复合材料宏观上沿两个对称轴方向具有相同的刚度。同时还发现等效压电系数对基体模量非常敏感。

关键词: 压电纤维复合材料; 复变函数; 有效刚度; 局部应力场; 半解析解

中图分类号: O343.1 **文献标志码:** A **文章编号:** 1005-2615(2021)01-0116-09

Study on Plane Problem of Periodic Piezoelectric Fibrous Composites

YANG Hui Feng^{1,2}, GAO Cun Fa¹

(1. State Key Laboratory of Mechanics and Control of Mechanical Structures, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing 210016, China; 2. School of Naval Architecture & Ocean Engineering, Jiangsu University of Science and Technology, Zhenjiang 212003, China)

Abstract: Based on the complex variable techniques and linear piezoelectric theory, we derive a semi-analytical solution for the plane problem of a periodic piezoelectric fibrous composite to explore the distribution of the local stress field and predict the effective stiffness of the composites. Specific series with unknown coefficients are introduced to describe the complex potential functions of the representative unit cell of the composites. The unknown coefficients are determined from the continuity conditions on the interface and the periodic boundary conditions imposed on the edge of the unit cell. Once the complex potential functions are determined, the effective stiffness and effective piezoelectric constant of the composites are obtained according to the average-field theory. The numerical results show that when the modulus of the matrix is larger than that of the piezoelectric inclusion, the influence of the electric loading on the local stress field around the inclusion is significant. The positive electric loading along the polarization direction of the piezoelectric inclusion may induce the orientation of the maximum equivalent stress on the interface of the matrix and the inclusion to change 90° relative to the case of non-electric loading or negative electric loading. On the contrary, the electric loading has little effect on the local stress field. Because of the symmetry of the

基金项目: 国家自然科学基金面上(11872203)资助项目。

收稿日期: 2020-04-17; **修订日期:** 2020-05-17

通信作者: 高存法, 教授, 博士生导师, E-mail: cfgao@nuaa.edu.cn。

引用格式: 杨绘峰, 高存法. 周期分布压电纤维复合材料平面问题研究[J]. 南京航空航天大学学报, 2021, 53(1): 116-124. YANG Hui Feng, GAO Cun Fa. Study on plane problem of periodic piezoelectric fibrous composites[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2021, 53(1): 116-124.

microstructure, the composite shows the same stiffness along the two symmetrical axes. It is also found that the effective piezoelectric constant is sensitive to the modulus of the matrix.

Key words: piezoelectric fibrous composite; complex variable technique; effective stiffness; local stress field; semi-analytical solution

功能复合材料是指由功能相和基体组成的,除机械性能以外还具有其他物理性能(如导电、超导、半导、磁性、压电等)的多组分材料系统。随着科技的进步,功能复合材料向着智能化的方向发展。人们把具有自感知、自适应和自决策能力的新型材料系统,称为智能复合材料。同时兼具感知与驱动特性的基础功能材料在很大程度上决定了智能复合材料的潜能,压电材料因其固有的力-电耦合特性,是一种常见的基础功能材料。压电纤维复合材料同时兼具压电陶瓷的力电耦合特性和聚合物基体的韧性,从根本上提高了压电器件的工作能力和应用范围,能够适应更为苛刻的使用环境。

复合材料中的粒子或纤维在力学分析中常被称为夹杂。Pak^[1]较早关注了压电夹杂问题。Chen等^[2]基于解析延拓的方法导出了均匀热流、反平面剪切载荷和面内电载荷共同作用下三相压电复合材料应力场的精确解。应用类似的方法,Shen等^[3]研究了在远场反平面剪切和面内电场作用下,无限大压电介质中压电螺型位错与含涂层的圆形夹杂的相互问题。后来,他们又研究了在反平面机械载荷和面内电载荷作用下,无限大区域中任意形状的涂层夹杂问题^[4]。Zhong^[5]利用复变分方法,得到了含部分脱粘椭圆夹杂的压电介质在反平面剪切载荷和平面内电载荷作用下的一般解。Dunn和Wienecke^[6]基于Eshelby理论分析了横观各向同性压电材料中含球形夹杂的电弹性场问题,得到问题的显式封闭表达式,该方法具有形式简单、通用性强的特点。Tong等^[7]提出了一种在多物理场(热场、电场、磁场和弹性场)耦合作用下分析纤维复合材料面内受力的三相圆柱模型。通过引入与热电磁弹性效应相对应的本征应变,将复杂的多场耦合问题归结为一个形式化的平面内弹性问题,得到了一个精确的理论解。Xiao等^[8]基于Eshelby等效夹杂理论分析了弹性基体中含有单个压电夹杂的平面问题,将夹杂问题部分解耦为弹性问题和介电夹杂问题,利用Tanak-Mura的叠加法得到了夹杂周围应力分布的显式封闭解。后来,他们又研究了压电纤维与附近裂纹相互作用问题^[9-10]。

上述的研究对象大多数是针对单个夹杂的情况,这通常对应于压电纤维所占复合材料体积分数比较小且纤维之间距离较大的情况。当在复合材

料某个局部出现纤维密集排布时,密集排布的纤维会产生一定的相互影响,这时候可以简化为无限大基体中含有多个夹杂的情况。Wu等^[11]基于保角变换方法和解析延展理论研究了在反平面力载荷和面内电载荷作用下,含有两个压电圆形夹杂的无限大压电介质的电-弹场问题。Xu等^[12]研究了双周期压电纤维复合材料在反平面剪切和平面内电载荷耦合作用下的力学行为,利用双准周期Riemann边值问题理论,结合本征应变和本征电场的概念,提出了一种严格的解析方法。随后,他们用同样的方法分析了含界面相的情况^[13-14]。Dai等^[15]研究了有限区域的电致伸缩固体内含两个任意形状孔的电-弹场问题。基于Stroh理论和复变函数理论,杨宾华^[16]系统地研究了界面相对1-3型含压电纤维复合材料电弹场的影响,讨论了界面相与多压电纤维相互作用,研究的内容涵盖反平面问题和平面问题。

综上所述,对于压电夹杂局部电-弹场问题,无限大基体中含有单个压电夹杂或多个压电夹杂的二维问题已有大量报道,这种模型通常对应于压电纤维体积分数比较低或者有压电纤维局部密集分布的情况;通常情况下,为了便于实现机械化和自动化生产,复合材料中的纤维排布常具有某种周期性,针对压电纤维周期排布且纤维体积分数比较大时,已有的研究多见于反平面剪切问题^[12-14],而平面问题的研究还鲜有报道。本文将基于复变函数理论和线性压电理论,研究含周期正方形分布压电夹杂的复合材料平面问题,试图探讨夹杂体积分数、各组分模量、外加电载荷对压电夹杂周围局部应力场的影响,并对复合材料有效刚度和等效压电常数进行预测。

1 问题描述

如图1所示,考虑一含双向周期正方形排布的圆形压电夹杂的弹性体。圆形压电夹杂半径为 R ,受到沿极化方向(x_3 轴)的均匀电载荷 E_3^∞ ,在基体远端受到均匀载荷 σ_{11}^∞ 、 σ_{22}^∞ 和 σ_{12}^∞ 的作用。此时可简化为含一压电夹杂的方形单胞,方形单胞边长为 a ,基体与夹杂所占区域分别定义为 S_m 和 S_f (此后,在不加说明的情况下,上标或下标带有“m”“f”的量分别表示基体、夹杂区域的相关量),两者相邻界面为 L ,并假设基体和夹杂完全粘接。

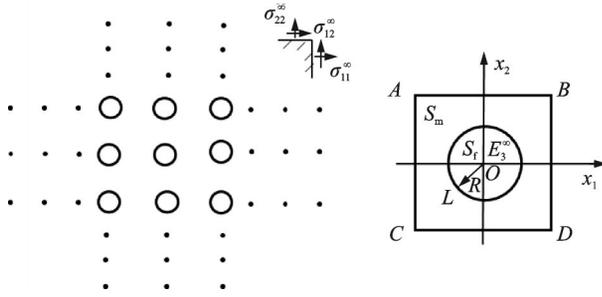


图1 含周期分布压电夹杂的二维弹性体及其正方形单胞
Fig.1 Elastomer with periodic piezoelectric inclusions and the corresponding square unit cell

2 理论基础

此问题涉及普通弹性体的平面问题和压电弹性体的平面问题,故有必要对相关的基础理论做简单介绍。

对于普通弹性基体区域的平面问题,在忽略体力的情况下,在 x_1-x_2 面内存在的位移分量有 $u_{1m}(x_1, x_2)$ 和 $u_{2m}(x_1, x_2)$, 存在的应力分量有 $\sigma_{11m}(x_1, x_2)$ 、 $\sigma_{22m}(x_1, x_2)$ 和 $\sigma_{12m}(x_1, x_2)$, 应力分量和位移分量与域内复势函数有如下关系^[17]

$$\sigma_{11m} + \sigma_{22m} = 2[\varphi'_m(z) + \overline{\varphi'_m(z)}] \quad (1)$$

$$\sigma_{22m} - \sigma_{11m} + 2i \cdot \sigma_{12m} = 2[\bar{z}\varphi''_m(z) + \psi'_m(z)] \quad (2)$$

$$u_{1m} + i \cdot u_{2m} = \frac{1}{2G_m} [\kappa_m \varphi_m(z) - z\overline{\varphi'_m(z)} - \overline{\psi_m(z)}] \quad (3)$$

式中: κ_m 为与泊松比 μ_m 有关的材料常数,在平面应力问题中取 $(3-\mu_m)/(1+\mu_m)$, 在平面应变问题中取 $(3-4\mu_m)$; G_m 为弹性体的剪切模量; $\varphi_m(z)$ 和 $\psi_m(z)$ 称为普通弹性体平面问题的两个独立的复势函数; $\overline{(\cdot)}$ 表示对复变量取共轭; i 表示复变量的单位虚部。

如图2所示,沿弹性体边界 AB 积分后得到平面问题的应力边界条件^[17]

$$\phi_{sm} = i \cdot \int_A^B (X_{1m} + i \cdot X_{2m}) ds = \varphi_m(z) + z\overline{\varphi'_m(z)} + \overline{\psi_m(z)} \quad (4)$$

式中 X_{1m} 和 X_{2m} 分别表示沿弹性体边界上作用的外力。

若在边界上给定位移分量

$$u_{1m} = \bar{u}_{1m}, u_{2m} = \bar{u}_{2m}$$

则,位移边界条件可表示为^[17]

$$\bar{u}_{1m} + i \cdot \bar{u}_{2m} = \frac{1}{2G_m} [\kappa_m \varphi_m(z) - z\overline{\varphi'_m(z)} - \overline{\psi_m(z)}] \quad (5)$$

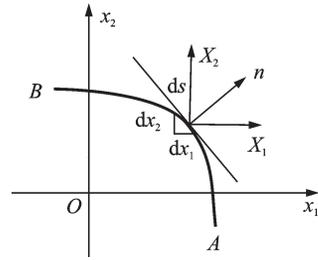


图2 作用在二维连续体边界上的外力

Fig.2 External force acting on the boundary of a two-dimensional continuum

假设压电体在 x_1-x_2 平面内施加机械载荷,而沿着极化方向(x_3 轴)施加常电载荷 E_3^∞ ,对于此类问题,为了研究方便,采用横观各向同性的压电截面作为分析平面,可将分析平面的场变量与垂直于平面(x_3 轴方向)的场变量解耦,分析平面内的力学问题可简化为二维问题,压电材料的位移函数和电势函数可以表示为^[16]

$$u_{1f} = u_{1f}(x_1, x_2), u_{2f} = u_{2f}(x_1, x_2), u_{3f} = 0 \\ \Phi_f = \Phi_f(x_3)$$

式中: u_{1f} 、 u_{2f} 、 u_{3f} 分别表示沿坐标轴 x_1 、 x_2 、 x_3 3个方向的位移分量; Φ_f 为电势。 x_1-x_2 平面内的真实应力场与复势函数之间的关系为^[16]

$$\begin{cases} \sigma_{22f} + \sigma_{11f} = 2[\varphi'_f(z) + \overline{\varphi'_f(z)}] - 2e_{31f}E_3^\infty \\ \sigma_{22f} - \sigma_{11f} + 2i \cdot \sigma_{12f} = 2[\bar{z}\varphi''_f(z) + \psi'_f(z)] \end{cases} \quad (6)$$

式中: $\varphi_f(z)$ 和 $\psi_f(z)$ 称为压电弹性体平面问题的两个独立的复势函数; e_{31f} 为材料压电系数。

仍参考图2,沿压电弹性体边界 AB 积分后可得压电材料平面问题的应力边界条件^[16]

$$\phi_{sf} = i \cdot \int_A^B (X_{1f} + i \cdot X_{2f}) ds = \varphi_f(z) + z\overline{\varphi'_f(z)} + \overline{\psi_f(z)} - e_{31f}E_3^\infty \quad (7)$$

式中 X_{1f} 和 X_{2f} 分别表示沿压电弹性体边界上作用的外力。

压电材料平面问题的位移边界条件和普通弹性材料表达形式相同^[16]

$$\bar{u}_{1f} + i \cdot \bar{u}_{2f} = \frac{1}{2G_f} [\kappa_f \varphi_f(z) - z\overline{\varphi'_f(z)} - \overline{\psi_f(z)}] \quad (8)$$

式中: \bar{u}_{1f} 、 \bar{u}_{2f} 为压电弹性体边界上给定的位移; G_f 、 κ_f 为与压电材料弹性常数相关的等效材料常数,具体形式可见文献[16]。

3 问题求解

根据复势函数基础理论^[17],压电夹杂的复势函数可以表示为

$$\begin{cases} \varphi_f(z) = \sum_{n=1}^N a_n \left(\frac{z}{R}\right)^n \\ \psi_f(z) = \sum_{n=1}^N b_n \left(\frac{z}{R}\right)^n \end{cases} \quad (9)$$

弹性基体中的复势函数可以表示为

$$\begin{cases} \varphi_m(z) = \sum_{n=1}^N c_n \left(\frac{R}{z}\right)^n + \sum_{n=1}^M d_n P_n(z) \\ \psi_m(z) = \sum_{n=1}^N e_n \left(\frac{R}{z}\right)^n + \sum_{n=1}^M f_n P_n(z) \end{cases} \quad (10)$$

式中: $a_n, b_n, c_n, d_n, e_n, f_n$ 为待定的复常数; $P_n(z)$ 为方形域 Faber 多项式^[15]

$$P_{j+1}(z) = P_1(z)P_j(z) - \sum_{k=1}^{j-1} m_k P_{j-k}(z) - (j+1)m_j$$

$$P_1(z) = \frac{143z}{84a}, m_k = \begin{cases} -1/6 & k=3 \\ 1/56 & k=7 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

在弹性基体与压电夹杂的相邻边界 L 上, 假设粘结完好, 则位移和法向应力在经过各相相邻的边界 L 时都不会发生突变, 连续性条件可表示为

$$\sigma_n^{(m)} = \sigma_n^{(f)}, u_1^{(m)} + i \cdot u_2^{(m)} = u_1^{(f)} + i \cdot u_2^{(f)} \quad (11)$$

根据平面问题的场变量与复势函数的关系, 连续性条件可以用复势函数表示成如下形式

$$\begin{cases} \varphi_m(t) + t \overline{\varphi_m'(t)} + \overline{\psi_m(t)} = \\ \varphi_f(t) + t \overline{\varphi_f'(t)} + \overline{\psi_f(t)} - e_{31} E_3^\infty t \\ \frac{\kappa_m \varphi_m(t) - t \overline{\varphi_m'(t)} - \overline{\psi_m(t)}}{2G_m} = \\ \frac{\kappa_f \varphi_f(t) - t \overline{\varphi_f'(t)} - \overline{\psi_f(t)}}{2G_f} \end{cases} \quad t \in L \quad (12)$$

将各区域的复势函数式(9)和式(10)代入连续性条件式(12), 在边界 L 上 $z = R\sigma$, 由此得到一个关于 σ (可视为单位圆上的任意点 $\sigma = e^{i\theta}$) 的方程组, 形式如下

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^N a_n \sigma^n + \sum_{n=1}^N \bar{a}_n n \sigma^{2-n} + \sum_{n=1}^N \bar{b}_n \sigma^{-n} - e_{31} E_3^\infty R \sigma = \\ \sum_{n=1}^N c_n \sigma^{-n} + \sum_{n=1}^M d_n P_n(R\sigma) - \sum_{n=1}^N \bar{c}_n n \sigma^{2+n} + \\ R\sigma \sum_{j=1}^M \bar{d}_j P_n'(R\sigma^{-1}) + \sum_{n=1}^N \bar{e}_n \sigma^n + \sum_{n=1}^M \bar{f}_n P_n(R\sigma^{-1}) \\ \frac{G_m}{G_f} \left[\kappa_f \sum_{n=1}^N a_n \sigma^n - \sum_{n=1}^N \bar{a}_n n \sigma^{2-n} - \sum_{n=1}^N \bar{b}_n \sigma^{-n} \right] = \\ \kappa_m \left[\sum_{n=1}^N c_n \sigma^{-n} + \sum_{n=1}^M d_n P_n(R\sigma) \right] + \sum_{n=1}^N \bar{c}_n n \sigma^{2+n} - \\ R\sigma \sum_{j=1}^M \bar{d}_j P_n'(R\sigma^{-1}) - \sum_{n=1}^N \bar{e}_n \sigma^n - \sum_{n=1}^M \bar{f}_n P_n(R\sigma^{-1}) \end{cases} \quad (13)$$

等式成立的条件是方程组式(13)中 σ^n 次项前面的系数相等, 由此可得

$$\begin{cases} a_1 + \bar{a}_1 - e_{31} E_3^\infty R = \sum_{k=1}^M d_k P_k^{(1)} + R \sum_{k=1}^M \bar{d}_k P_k^{(0)} + \bar{e}_1 \\ a_2 = \sum_{k=1}^M d_k P_k^{(2)} + \bar{e}_2 \\ a_n = \sum_{k=1}^M d_k P_k^{(n)} - (n-2)\bar{c}_{n-2} + \bar{e}_n \quad 3 \leq n \leq N \\ (n+2)\bar{a}_{n+2} + \bar{b}_n = c_n + R \sum_{k=1}^M \bar{d}_k P_k^{(n+1)} + \sum_{k=1}^M \bar{f}_k P_k^{(n)} \quad 1 \leq n \leq N \\ \frac{G_m}{G_f} [\kappa_f a_1 - \bar{a}_1] = \kappa_m \sum_{k=1}^M d_k P_k^{(1)} - R \sum_{k=1}^M \bar{d}_k P_k^{(0)} - \bar{e}_1 \\ \frac{G_m}{G_f} \kappa_f a_2 = \kappa_m \sum_{k=1}^M d_k P_k^{(2)} - \bar{e}_2 \\ \frac{G_m}{G_f} \kappa_f a_n = \kappa_m \sum_{k=1}^M d_k P_k^{(n)} + (n-2)\bar{c}_{n-2} - \bar{e}_n \quad 3 \leq n \leq N \\ \frac{G_m}{G_f} [-(n+2)\bar{a}_{n+2} - \bar{b}_n] = \kappa_m c_n - R \sum_{k=1}^M \bar{d}_k P_k^{(n+1)} - \sum_{k=1}^M \bar{f}_k P_k^{(n)} \quad 1 \leq n \leq N \end{cases} \quad (14)$$

式中: $P_k^{(n)}$ 为正方形单胞区域的 Faber 多项 P_k 中的 σ^n 次项前的系数; $P_n^{(n)}$ 为正方形单胞区域的 Faber 多项的导数 P_n' 中的 σ^n 次项前的系数。

将复常数中的实部和虚部解耦, 方程组式(14)可以表示成如下形式

$$A \begin{bmatrix} X_a \\ X_b \\ X_c \\ X_e \\ X_d \\ X_f \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} X_d \\ X_f \end{bmatrix} = [V_{el}] \quad (15)$$

其中

$$\begin{aligned} X_a &= [\text{Re}(a_1) \quad \text{Im}(a_1) \quad \cdots \quad \text{Re}(a_N) \quad \text{Im}(a_N)]_{2N \times 1}^T \\ X_b &= [\text{Re}(b_1) \quad \text{Im}(b_1) \quad \cdots \quad \text{Re}(b_N) \quad \text{Im}(b_N)]_{2N \times 1}^T \\ X_c &= [\text{Re}(c_1) \quad \text{Im}(c_1) \quad \cdots \quad \text{Re}(c_M) \quad \text{Im}(c_M)]_{2N \times 1}^T \\ X_e &= [\text{Re}(e_1) \quad \text{Im}(e_1) \quad \cdots \quad \text{Re}(e_M) \quad \text{Im}(e_N)]_{2N \times 1}^T \\ X_d &= [\text{Re}(d_1) \quad \text{Im}(d_1) \quad \cdots \quad \text{Re}(d_M) \quad \text{Im}(d_M)]_{2M \times 1}^T \\ X_f &= [\text{Re}(f_1) \quad \text{Im}(f_1) \quad \cdots \quad \text{Re}(f_M) \quad \text{Im}(f_M)]_{2M \times 1}^T \end{aligned}$$

A 和 B 分别为已知的 $8N \times 8N$ 和 $8N \times 4M$ 实矩阵; V_{el} 为电载荷相关的 $8N \times 1$ 列向量。

对 A 矩阵取逆, 并定义

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} E \\ F \end{bmatrix} \quad (16)$$

式中 E, F 为 $4N \times 8N$ 的实矩阵。由式(15)可得出

列向量 $\begin{bmatrix} X_a \\ X_b \end{bmatrix}$ 和列向量 $\begin{bmatrix} X_c \\ X_e \end{bmatrix}$ 关于列向量 $\begin{bmatrix} X_d \\ X_f \end{bmatrix}$ 的表达式

$$\begin{bmatrix} X_a \\ X_b \end{bmatrix} = -EB \begin{bmatrix} X_d \\ X_f \end{bmatrix} + E [V_{el}] \quad (17)$$

$$\begin{bmatrix} X_c \\ X_e \end{bmatrix} = -FB \begin{bmatrix} X_d \\ X_f \end{bmatrix} + F [V_{el}] \quad (18)$$

由此可见,在满足连续性条件的前提下,级数中的各系数均可用列向量 $\begin{bmatrix} X_d \\ X_f \end{bmatrix}$ 显示表达。这也意味着只要求出列向量 $\begin{bmatrix} X_d \\ X_f \end{bmatrix}$, 各区域的复势函数即可确定。

在正方形单胞的外边界 $ABCD$ 上,应满足周期性边界条件,形式如下^[18]

$$\begin{cases} (u_{1m} + i \cdot u_{2m})|_{(x_1, a/2)} - (u_{1m} + i \cdot u_{2m})|_{(x_1, -a/2)} = \Delta_1 + i \cdot \Delta_2 \\ (u_{1m} + i \cdot u_{2m})|_{(a/2, x_2)} - (u_{1m} + i \cdot u_{2m})|_{(-a/2, x_2)} = \Delta_3 + i \cdot \Delta_4 \\ [d(u_{1m} + i \cdot u_{2m})/dx_2]|_{(x_1, a/2)} = [d(u_{1m} + i \cdot u_{2m})/dx_2]|_{(x_1, -a/2)} \\ [d(u_{1m} + i \cdot u_{2m})/dx_1]|_{(a/2, x_2)} = [d(u_{1m} + i \cdot u_{2m})/dx_1]|_{(-a/2, x_2)} \end{cases} \quad \forall |x_1|, |x_2| \leq \frac{a}{2} \quad (19)$$

式中 $\Delta_n (n=1, \dots, 4)$ 表示单胞中两对边上相应的位移增量。将基体区域复势函数式(10)代入式(3), 然后代入平面问题的周期性边界条件式(19), 可得

$$\begin{cases} \frac{1}{2G_m} [\kappa_m \varphi_m(z^{AB}) - z^{AB} \overline{\varphi'_m(z^{AB})} - \overline{\psi_m(z^{AB})}] - \frac{1}{2G_m} [\kappa_m \varphi_m(z^{CD}) - z^{CD} \overline{\varphi'_m(z^{CD})} - \overline{\psi_m(z^{CD})}] = \Delta_1 + i\Delta_2 \\ \frac{1}{2G_m} [\kappa_m \varphi_m(z^{DB}) - z^{DB} \overline{\varphi'_m(z^{DB})} - \overline{\psi_m(z^{DB})}] - \frac{1}{2G_m} [\kappa_m \varphi_m(z^{CA}) - z^{CA} \overline{\varphi'_m(z^{CA})} - \overline{\psi_m(z^{CA})}] = \Delta_3 + i\Delta_4 \\ \kappa_m \varphi'_m(z^{AB}) - \overline{\varphi'_m(z^{AB})} + z^{AB} \overline{\varphi''_m(z^{AB})} + \overline{\psi'_m(z^{AB})} = \kappa_m \varphi'_m(z^{CD}) - \overline{\varphi'_m(z^{CD})} + z^{CD} \overline{\varphi''_m(z^{CD})} + \overline{\psi'_m(z^{CD})} \\ \kappa_m \varphi'_m(z^{DB}) - \overline{\varphi'_m(z^{DB})} - z^{AB} \overline{\varphi''_m(z^{DB})} - \overline{\psi'_m(z^{DB})} = \kappa_m \varphi'_m(z^{CA}) - \overline{\varphi'_m(z^{CA})} - z^{CD} \overline{\varphi''_m(z^{CA})} - \overline{\psi'_m(z^{CA})} \end{cases} \quad (20)$$

式中 z^{AB}, z^{CD}, z^{CA} 和 z^{DB} 分别为边界 AB, CD, DB 和 CA 上的任意点, 并满足

$$z^{AB} = \overline{z^{CD}}, z^{DB} = -\overline{z^{CA}}$$

对于周期性边界条件式(20), 本文将采用配点法进行处理, 在边界 $ABCD$ 上均匀选取 K 个配点, 如下

$$\begin{cases} z_k^{AB} = \overline{z_k^{CD}} = \frac{ka}{K+1} - \frac{a-ia}{2} & k=1, \dots, K \\ z_k^{DB} = -\overline{z_k^{CA}} = \frac{ka \cdot i}{K+1} + \frac{a-ia}{2} & k=1, \dots, K \end{cases} \quad (21)$$

将式(21)代入式(20), 可以列出 $8K$ 个线性无关的方程, 记为

$$\begin{cases} C \begin{bmatrix} X_c \\ X_e \end{bmatrix} + D \begin{bmatrix} X_d \\ X_f \end{bmatrix} = \sum_{n=1}^4 \Delta_n p_n \\ p_n = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}^T_{8K \times 1} \end{cases} \quad n=1, \dots, 4 \quad (22)$$

式中 C 和 D 分别为已知的 $8K \times 4N$ 和 $8K \times 4M$ 实矩阵。

将式(18)代入式(22), 得

$$\begin{cases} H \begin{bmatrix} X_d \\ X_f \end{bmatrix} = -CF [V_{el}] + \sum_{n=1}^4 \Delta_n p_n \\ H = D - CFB \end{cases} \quad (23)$$

列向量 $\begin{bmatrix} X_d \\ X_f \end{bmatrix}$ 中含有的未知量个数为 $4M$, 当 $8K$

大于 $4M$ 时, 此方程组的最小二乘解如下

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} X_d \\ X_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_d^0 \\ X_f^0 \end{bmatrix} + \sum_{n=1}^4 \Delta_n \begin{bmatrix} X_d^n \\ X_f^n \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} X_d^n \\ X_f^n \end{bmatrix} = (H^T H)^{-1} H^T p_n \quad n=1, \dots, 4 \\ \begin{bmatrix} X_d^0 \\ X_f^0 \end{bmatrix} = -(H^T H)^{-1} H^T CF [V_{el}] \end{cases} \quad (24)$$

将式(24)代入式(18), 列向量 $\begin{bmatrix} X_c \\ X_e \end{bmatrix}$ 也有类似的表达式

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} X_c \\ X_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_c^0 \\ X_e^0 \end{bmatrix} + \sum_{n=1}^4 \Delta_n \begin{bmatrix} X_c^n \\ X_e^n \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} X_c^n \\ X_e^n \end{bmatrix} = -FB \begin{bmatrix} X_d^n \\ X_f^n \end{bmatrix} \quad n=1, \dots, 4 \\ \begin{bmatrix} X_c^0 \\ X_e^0 \end{bmatrix} = -FB \begin{bmatrix} X_d^0 \\ X_f^0 \end{bmatrix} + F [V_{el}] \end{cases} \quad (25)$$

将式(24)和式(25)代入式(10), 得基体区域的复势函数

$$\begin{cases} \varphi_m(z) = \varphi_m^0(z) + \sum_{n=1}^4 \Delta_n \varphi_m^n(z) \\ \psi_m(z) = \psi_m^0(z) + \sum_{n=1}^4 \Delta_n \psi_m^n(z) \end{cases} \quad (26)$$

式中

$$\varphi_m^n(z) = L_1^T(z) S_{ce} X_c^n + L_2^T(z) S_{df} X_d^n \quad n=0, 1, \dots, 4$$

$$\psi_m^n(z) = L_1^T(z) S_{ce} X_e^n + L_2^T(z) S_{df} X_f^n \quad n=0, 1, \dots, 4$$

$$S_{ce} = \begin{bmatrix} 1 & i & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & i \end{bmatrix}_{N \times 2N}$$

$$S_{df} = \begin{bmatrix} 1 & i & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & i \end{bmatrix}_{M \times 2M}$$

$$L_1(z) = \begin{bmatrix} \left(\frac{R}{z}\right)^1 & \dots & \left(\frac{R}{z}\right)^N \end{bmatrix}_{N \times 1}^T$$

$$L_2(z) = [P_1(z) \quad \dots \quad P_M(z)]_{M \times 1}^T$$

至此,可以发现 $\varphi_m^n(z)$ 和 $\psi_m^n(z)$ 是仅关于 z 的函数。根据式(1)和式(2),基体域内的应力场可基于复势函数式(26)表示为

$$\begin{cases} \sigma_{22}(z) + i \cdot \sigma_{12}(z) = [\sigma_{22}^0(z) + i \cdot \sigma_{12}^0(z)] + \sum_{n=1}^4 \Delta_n [\sigma_{22}^n(z) + i \cdot \sigma_{12}^n(z)] \\ \sigma_{11}(z) - i \cdot \sigma_{12}(z) = [\sigma_{11}^0(z) - i \cdot \sigma_{12}^0(z)] + \sum_{n=1}^4 \Delta_n [\sigma_{11}^n(z) - i \cdot \sigma_{12}^n(z)] \end{cases} \quad (27)$$

式中

$$\begin{aligned} \sigma_{22}^n(z) + i \sigma_{12}^n(z) &= [L_3^T(z) S_{ce} + \overline{L_3^T(z) S_{ce}} + \overline{z} L_5^T(z) S_{ce}, L_3^T(z) S_{ce}] \begin{bmatrix} X_c^n \\ X_e^n \end{bmatrix} + [L_4^T(z) S_{df} + \overline{L_4^T(z) S_{df}} + \overline{z} L_6^T(z) S_{df}, L_4^T(z) S_{df}] \begin{bmatrix} X_d^n \\ X_f^n \end{bmatrix} \\ n &= 0, 1, \dots, 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^n(z) - i \sigma_{12}^n(z) &= [L_3^T(z) S_{ce} + \overline{L_3^T(z) S_{ce}} - \overline{z} L_5^T(z) S_{ce}, -L_3^T(z) S_{ce}] \begin{bmatrix} X_c^n \\ X_e^n \end{bmatrix} + [L_4^T(z) S_{df} + \overline{L_4^T(z) S_{df}} - \overline{z} L_6^T(z) S_{df}, -L_4^T(z) S_{df}] \begin{bmatrix} X_d^n \\ X_f^n \end{bmatrix} \\ n &= 0, 1, \dots, 4 \end{aligned}$$

$$L_3(z) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R} \left(\frac{R}{z}\right)^2 & \dots & -\frac{N}{R} \left(\frac{R}{z}\right)^{N+1} \end{bmatrix}_{N \times 1}^T$$

$$L_5(z) = \begin{bmatrix} \frac{1 \times 2}{R^2} \left(\frac{R}{z}\right)^3 & \dots & \frac{N \times (N+1)}{R^2} \left(\frac{R}{z}\right)^{N+2} \end{bmatrix}_{N \times 1}^T$$

$$L_4(z) = [P_1'(z) \quad \dots \quad P_M'(z)]_{M \times 1}^T$$

$$L_6(z) = [P_1''(z) \quad \dots \quad P_M''(z)]_{M \times 1}^T$$

在正方形单胞的边界上应力的平均值应该等于施加在远场的外载荷,由此确定正方形单胞对边的位移增量 $\Delta_n (n=1, \dots, 4)$,单胞对边的位移增量应满足如下方程

$$\begin{cases} \int_A^B \frac{\sigma_{22}^0(x_1, a/2)}{a} dx_1 + \sum_{n=1}^4 \Delta_n \int_A^B \frac{\sigma_{22}^n(x_1, a/2)}{a} dx_1 = \sigma_{22}^\infty \\ \int_A^B \frac{\sigma_{12}^0(x_1, a/2)}{a} dx_1 + \sum_{n=1}^4 \Delta_n \int_A^B \frac{\sigma_{12}^n(x_1, a/2)}{a} dx_1 = \sigma_{12}^\infty \\ \int_D^B \frac{\sigma_{11}^0(a/2, x_2)}{a} dx_2 + \sum_{n=1}^4 \Delta_n \int_D^B \frac{\sigma_{11}^n(a/2, x_2)}{a} dx_2 = \sigma_{11}^\infty \\ \int_D^B \frac{\sigma_{12}^0(a/2, x_2)}{a} dx_2 + \sum_{n=1}^4 \Delta_n \int_D^B \frac{\sigma_{12}^n(a/2, x_2)}{a} dx_2 = \sigma_{12}^\infty \end{cases} \quad (28)$$

根据上述方程组便可求出增量 $\Delta_n (n=1, \dots, 4)$ 。一旦 $\Delta_n (n=1, \dots, 4)$ 确定,便求解出所有的复势函数,相应地,整个材料的位移场和应力场便可由式(1~3)完全获得。

根据平均场理论^[19-20],复合材料的有效平面刚度定义如下^[18]

$$\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta_3/a \\ \Delta_2/a \\ \Delta_1/a + \Delta_4/a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11}^\infty \\ \sigma_{22}^\infty \\ \sigma_{12}^\infty \end{bmatrix} \quad (29)$$

式中方括号表示矩阵或向量。这里要指出的是,在求解全部的有效平面刚度时,需要考虑4种独立的外载荷作用情况(比如 $\sigma_{11}^\infty \neq 0, \sigma_{22}^\infty = \sigma_{12}^\infty = \sigma_{21}^\infty = 0; \sigma_{22}^\infty \neq 0, \sigma_{11}^\infty = \sigma_{12}^\infty = \sigma_{21}^\infty = 0; \sigma_{12}^\infty \neq 0, \sigma_{11}^\infty = \sigma_{22}^\infty = \sigma_{21}^\infty = 0$ 和 $\sigma_{21}^\infty \neq 0, \sigma_{11}^\infty = \sigma_{22}^\infty = \sigma_{12}^\infty = 0$)并使得 $\sigma_{12}^\infty = \sigma_{21}^\infty$ 加以整合,从而计算出相应的增量参数 $\Delta_n (n=1, \dots, 4)$ 。根据第一类压电方程^[21],选择电场强度和应力作为自变量,当仅有电场作用时

$$\epsilon_{11} = d_{31} E_3 \quad (30)$$

平均化后可得压电纤维复合材料等效压电应变常数 d_{31}^{eff} 的表达式

$$d_{31}^{eff} = \frac{\Delta_3}{a E_3^\infty} \quad (31)$$

4 数值分析

本文选取压电纤维的材料常数 PZT-5H 如表 1 所示^[8],假设基体材料的泊松比 $\mu_m = 0.3$ 。为了分析问题方便,本文取材料常数的比值来进行数值模拟,在远处作用于基体上的载荷均采取量纲化为一处理。

为检验方法的准确性,当纤维的体积分数减小到某个值时,可视为无限大弹性基体域内含有一压电夹杂的情形,而这种情形是有封闭解的^[16]。取单胞边长 $a = 40$,压电夹杂位于单胞中心位置,半径 $R = 1$,夹杂体积分数 (Volume fraction, VF) 约为 0.002。经计算,此时可视为无限大基体中含单个压电夹杂的情形。图 3 给出了压电夹杂周围的基体中环向应力与理论解的对比情况,可谓完全吻合。

表1 PZT-5H材料参数(弹性常数 C_{ij} (10^{10} N/m²),压电常数 e_{kl} (C/m²),介电常数 ϵ_{mn} (10^{-10} C/(V·m)))

Table 1 Material parameters of PZT-5H (Elastic coefficients C_{ij} (10^{10} N/m²), piezoelectric coefficients e_{kl} (C/m²), dielectric coefficients ϵ_{mn} (10^{-10} C/(V·m)))

材料	C_{11}	C_{33}	C_{44}	C_{12}	C_{13}	e_{13}	e_{33}	e_{15}	ϵ_{11}	ϵ_{33}
PZT-5H	12.6	11.7	3.53	5.5	5.3	-6.5	23.3	17.0	151	130

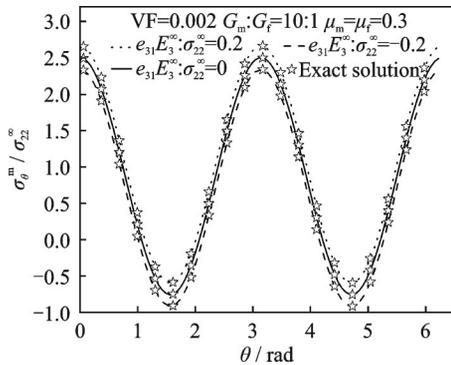


图3 本文结果与已知解的比较

Fig.3 Comparison between our solutions and previous solutions

图4研究的是压电纤维体积分数不同时,在 x_2 轴方向施加固定的力载荷 σ_{22}^{∞} 、在 x_3 轴方向施加不同的电载荷 E_3^{∞} ,纤维周围量纲化为一的环向应力($\sigma_{\theta}^m / \sigma_{22}^{\infty}$)沿基体与压电夹杂相邻界面 L 的变化情况。可以看出,当夹杂模量比基体小时,压电夹杂体积分数增大会使环向拉应力增大,环向压应力减小;正向的电载荷也会使环向应力增大,环向压应力减小。反之,如图5所示,电载荷对环向应力基本没有影响。

图6研究的是仅在 x_1 轴方向施加力载荷 σ_{11}^{∞} 、在 x_3 轴方向施加不同的电载荷 E_3^{∞} ,基体区域量纲化为一的Mises等效应力($\bar{\sigma} / \bar{\sigma}^{\infty}$)分布情况。可以发现,当压电夹杂模量较小时,电载荷会对等效应力分布产生显著影响;施加的正向的电载荷有可能会使沿基体与夹杂的相邻界面 L 上的最大等效应力值位置相对于无电载或施加反向电载荷时发

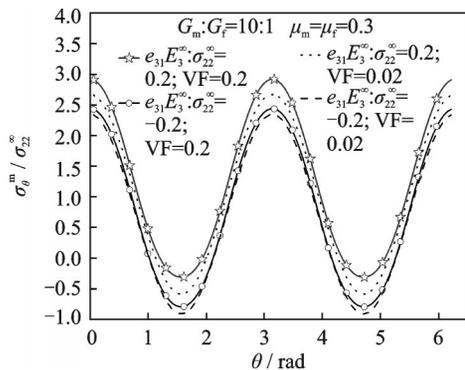


图4 体积分数和电载荷不同时软夹杂周围环向应力场
Fig.4 Hoop stress around a soft inclusion under different volume fractions of the inclusion and electrical loadings

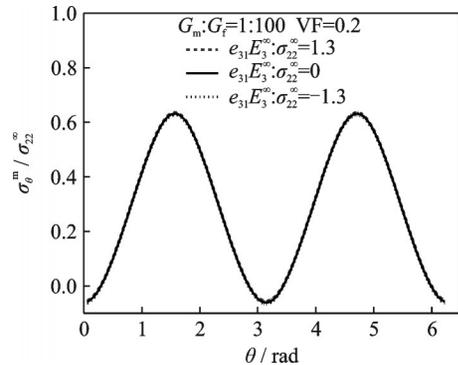


图5 电载荷不同时硬夹杂周围环向应力场

Fig.5 Hoop stress around a hard inclusion under different electrical loadings

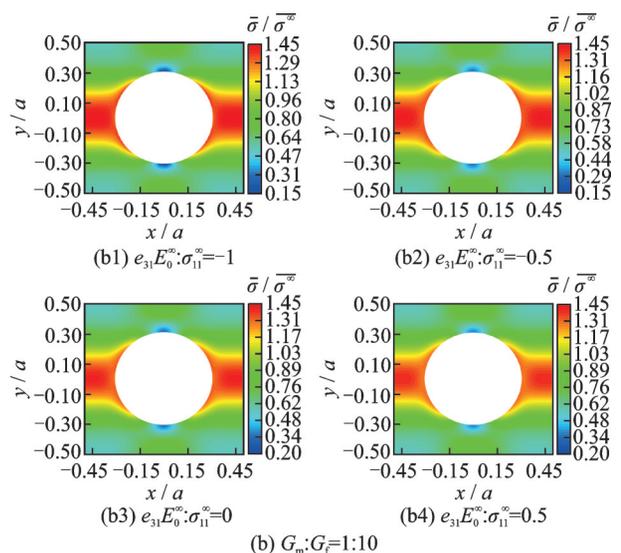
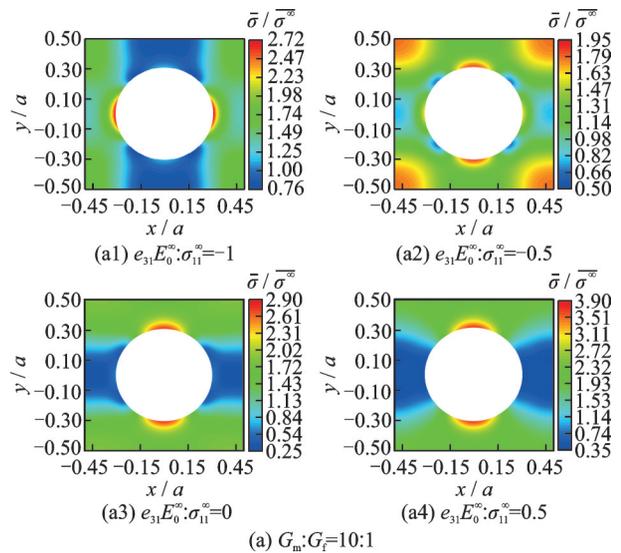


图6 电载荷不同时基体区域等效应力云图

Fig.6 Equivalent stress contours of the matrix under different electrical loadings

生 90° 改变;施加反向电载荷会影响等效应力大小,但不会改变应力分布形式(曲线 L 上的最大等效应力值位置不会发生改变)。而当压电夹杂模量较大时,电载荷对应力场的大小或分布影响微弱。

图 7~10 给出了含不同夹杂特性的复合材料的有效刚度随夹杂体积分数变化情况。从图中可以看出,有效刚度 S_{32} 、 S_{23} 、 S_{13} 、 S_{31} 总是为零,既不依赖夹杂和基体的模量,也不依赖夹杂的体积分数,这意味着复合结构面内的切应变与面内的线应变相互独立,整体呈现正交各向异性。同时,还可观察到 S_{11} 总是和 S_{22} 相等,这是因为单胞的微观结构具有四方对称性。当夹杂体积分数趋近于零时,有效刚度 S_{33}/E_m 趋近于 0.385, S_{33}/G_m 趋近于 1,这也间接验证了该方法的正确性。如图 11 所示,在相同的夹杂体积分数下,当基体的模量较小时,压电纤维复合材料具有较大的等效压电应变常数 d_{31}^{eff} (取绝对值)。当基体模量增大后,等效压电应变常数迅速减小。

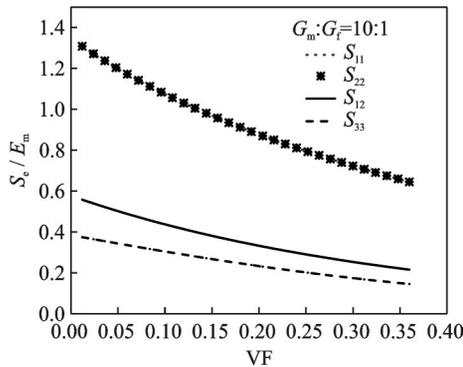


图 7 复合材料有效刚度中非零值量随软夹杂体积分数变化情况

Fig.7 Nonzero effective stiffness of the composites with varying volume fractions of soft inclusions

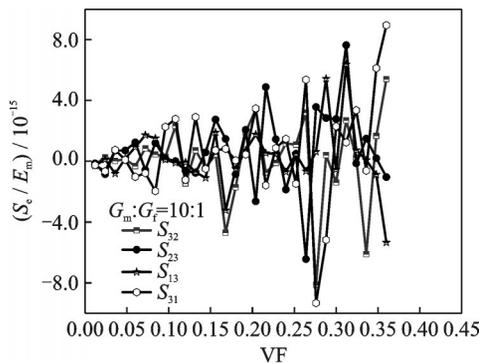


图 8 软夹杂体积分数不同时计算得到的复合材料有效刚度中的零值量

Fig.8 Zero effective stiffness of the composites calculated by this method under different volume fractions of soft inclusions

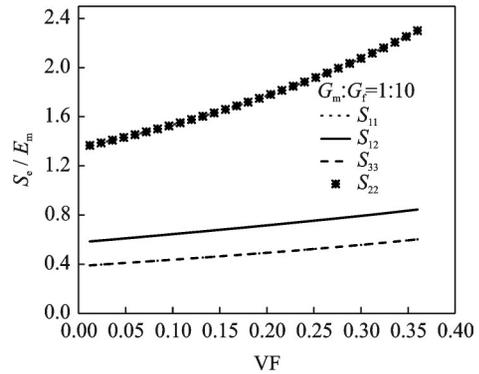


图 9 复合材料有效刚度中非零值量随硬夹杂体积分数变化情况

Fig.9 Nonzero effective stiffness of the composites with varying volume fractions of hard inclusions

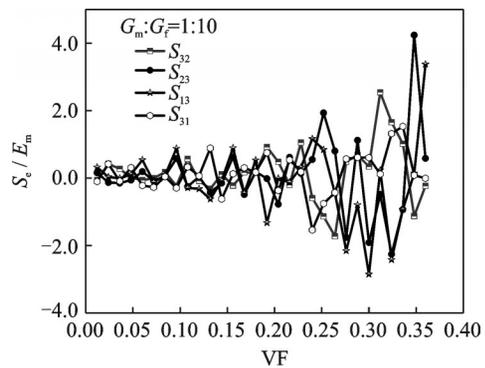


图 10 硬夹杂体积分数不同时计算得到的复合材料有效刚度中的零值量

Fig.10 Zero effective stiffness of the composites calculated by this method under different volume fractions of hard inclusions

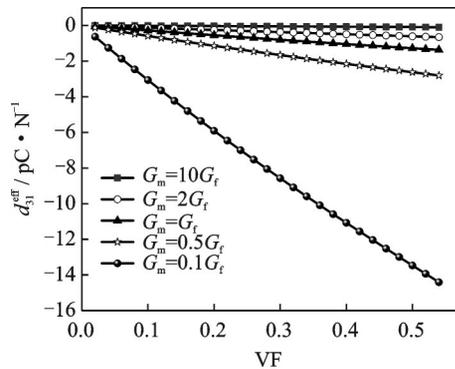


图 11 等效压电应变系数随夹杂体积分数的变化情况

Fig.11 Effective piezoelectric strain coefficient with varying volume fractions of the inclusions

5 结 论

基于复变函数理论和线弹性压电理论,本文研究了含周期分布压电夹杂的复合材料平面问题。对于单纯的压电纤维功能复合材料,当压电纤维在两个方向上周期正方形分布时,可以简化为含一个压电夹杂的正方形单胞。根据复势理论,先给出单胞中各区域

的用待定系数表示的复势函数,然后根据连续性条件、周期性边界条件和远场加载条件求出待定系数,进而得到复合材料有效刚度。计算发现,当压电夹杂模量较小时,压电夹杂体积分数增大会使环向应力大小发生改变,施加正向的电载荷有可能会使基体与夹杂相邻界面 L 上的最大等效应力值位置相对于无电载或施加反向电载荷时发生 90° 改变,施加反向电载荷会影响等效应力大小,但不会改变应力分布形式;当压电夹杂模量较大时,施加的电载荷对环向应力和等效应力的影响都不大;当压电夹杂与弹性基体的模量相对大小不同时,发现在相同的加载形式下,基体与压电夹杂相邻的界面上最大环向应力的出现位置相差 90° ;当压电纤维在弹性基体内周期正方形分布时,由于微观结构的对称性,使得复合材料宏观上沿两个对称轴方向具有相同的刚度;当基体较软时,压电纤维复合材料具有较大的等效压电应变常数。

参考文献:

- [1] PAK Y E. Circular inclusion problem in antiplane piezoelectricity[J]. *International Journal of Solids & Structures*, 2001, 29(19): 2403-2419.
- [2] CHEN F M, SHEN M H, CHEN S N. An exact thermopiezoelectricity solution for a three-phase composite cylinder[J]. *International Journal of Engineering Science*, 2006, 44(20): 1482-1497.
- [3] SHEN M H, CHEN S N, CHEN F M. A piezoelectric screw dislocation interacting with a nonuniformly coated circular inclusion[J]. *International Journal of Engineering Science*, 2006, 44(1/2): 1-13.
- [4] SHEN M H, CHEN F M, HUNG S Y. Piezoelectric study for a three-phase composite containing arbitrary inclusion[J]. *International Journal of Mechanical Science*, 2010, 52(4): 561-571.
- [5] ZHONG Zheng. Analysis of a partially deboned elliptic inhomogeneity in piezoelectric materials[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2004, 25(4): 445-457.
- [6] DUNN M L, WIENECKE H A. Inclusions and inhomogeneities in transversely isotropic piezoelectric solids[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1997, 34(27): 3571-3582.
- [7] TONG Z H, LO S H, JIANG C P, et al. An exact solution for the three-phase thermo-electro-magneto-elastic cylinder model and its application to piezoelectric-magnetic fiber composites[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2008, 45(20): 5205-5219.
- [8] XIAO Z M, BAI J. On piezoelectric inhomogeneity related problem—Part I: A close-form solution for the stress field outside a circular piezoelectric inhomogeneity[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1999, 37(8): 945-959.
- [9] XIAO Z M, BAI J. On piezoelectric inhomogeneity related problem—Part II: A circular piezoelectric inhomogeneity interacting with a nearby crack[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1999, 37(8): 961-976.
- [10] XIAO Z M, YAN J, CHEN B J. Electroelastic analysis for a griffith crack interacting with a coated inclusion in piezoelectric solid[J]. *International Journal of Engineering Science*, 2005, 43(8/9): 639-654.
- [11] WU Linzhi, CHEN Jian, MENG Qingguo. Two piezoelectric circular cylindrical inclusions in the infinite piezoelectric medium[J]. *International Journal of Engineering Science*, 2000, 38(8): 879-892.
- [12] XU Y L, LO S H, JIANG C P, et al. Electro-elastic behavior of doubly periodic piezoelectric fiber composites under anti-plane shear[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2007, 44(3/4): 976-995.
- [13] 杨勇. 多界面层双周期压电纤维复合材料反平面问题的解析法[D]. 秦皇岛: 燕山大学, 2009. YANG Yong. The analytical method of doubly periodic piezoelectric fiber composites with multiple interface layer under antiplane shear[D]. Qinhuangdao: Yanshan University, 2009.
- [14] 谢新亮, 肖俊华, 徐耀玲, 等. 双周期带涂层纤维压电复合材料反平面问题分析[J]. *航空学报*, 2008, 29(2): 333-337. XIE Xinliang, XIAO Junhua, XU Yaoling, et al. Analysis for doubly periodic coated fiber piezoelectric composite materials under antiplane shear[J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2008, 29(2): 333-337.
- [15] DAI Ming, MENG Licheng, HUANG Cheng, et al. Electro-elastic fields around two arbitrarily-shaped holes in a finite electrostrictive solid[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2016, 40(7): 4625-4639.
- [16] 杨宾华. 含压电纤维复合材料的电-弹场及其有效性预测[D]. 南京: 南京航空航天大学, 2011. YANG Binhua. Studies on elastic-electro fields and effective properties of piezoelectric composites[D]. Nanjing: Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2011.
- [17] LEKHNITSKII S G. Theory of elasticity of an anisotropic body[M]. Moscow: Mir Publisher, 1981.
- [18] 杨海兵. 含周期纳米孔或夹杂二维弹性体的应力场及其有效刚度预测[D]. 南京: 南京航空航天大学, 2017. YANG Haibing. Prediction of the stress field and effective stiffness of two-dimensional elastomer containing periodic nano-holes or inclusions[D]. Nanjing: Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2017.
- [19] HORI M, NEMAT-NASSER S. On two micromechanics theories for determining micro-macro relations in heterogeneous solids[J]. *Mechanics of Materials*, 1999, 31(10): 667-682.
- [20] BAKHVALOV N, PANASENKO G. Homogenization: Averaging processes in periodic media[M]. [S. l.]: Springer Netherlands, 1989.
- [21] 秦自楷. 压电石英晶体[M]. 北京: 国防工业出版社, 1980.