

DOI:10.16356/j.1005-2615.2021.01.001

考虑弹性变形的月面表取机械臂精度补偿方法

陈 钢, 孙丰磊, 李 彤, 邵 文

(北京邮电大学自动化学院, 北京 100876)

摘要: 表取机械臂具有大跨度、低刚度的特点, 静外力作用下杆件及关节容易发生较大弹性变形, 影响机械臂末端绝对定位精度; 同时, 加工或装配造成的几何参数误差也会对末端绝对定位精度造成一定影响。为提高表取机械臂末端绝对定位精度, 提出一种考虑弹性变形的表取机械臂精度补偿方法。首先, 基于改进的 Denavit-Hartenberg (Modified DH, MDH) 模型对机械臂进行运动学建模并推导几何误差模型; 其次, 计算因杆件、关节弹性变形产生的杆件坐标系弹性误差, 建立弹性误差与机械臂末端位置误差间的映射关系; 然后, 综合几何误差模型与弹性误差模型建立机械臂综合误差模型; 最后, 辨识机械臂几何参数, 补偿机械臂末端位置误差。实验结果表明, 该方法能够有效提高机械臂末端绝对定位精度。

关键词: 空间机器人; 精度补偿; 弹性误差建模; 标定

中图分类号: TP242

文献标志码: A

文章编号: 1005-2615(2021)01-0001-10

Accuracy Compensation for a Lunar Sampling Manipulator with Elastic Deformation

CHEN Gang, SUN Fenglei, LI Tong, SHAO Wen

(School of Automation, Beijing University of Posts and Telecommunications, Beijing 100876, China)

Abstract: Lunar sampling manipulator has large span and a low stiffness. Its links and joints are prone to large flexible deformation under static external force, which affects the absolute end positioning accuracy of the manipulator. At the same time, the kinematics error caused by manufacturing assembly error also increases the difficulty to the improvement of the manipulator's accuracy. In order to improve the absolute positioning accuracy of the end, a method for robot kinematics parameter calibration based on elastic error model is proposed. Firstly, based on the modified Denavit-Hartenberg (MDH) model, the kinematics model and the geometric error model are established. Secondly, based on the force analysis of the joints and links of the manipulator, the elastic error model is established to reflect the relation between the elastic error and the end positioning error of the manipulator. Thirdly, the kinematics error model is developed by combining the geometric error model with the elastic error model. Finally, a method for kinematic calibration is designed and kinematic parameters is identified. The experimental results show that the method can effectively improve the positioning accuracy of the end of the manipulator.

Key words: space robot; accuracy compensation; elastic error modeling; calibration

月球是距离地球最近的天体, 是人类进行深空 探测的前沿阵地, 对月球的研究将促进人类对月

基金项目: 国家自然科学基金(61802363)资助项目; 国家自然科学基金(51975059)资助项目。

收稿日期: 2020-01-11; **修订日期:** 2021-02-06

作者简介: 陈钢, 男, 教授, 博士生导师。长期从事空间机器人设计、建模、规划与控制等研究工作。承担各类科研项目 60 余项, 出版学术专著 2 部, 发表学术论文 60 余篇, 授权国家发明专利 20 余项, 获中国机械工业科技奖一等奖 1 项。

通信作者: 陈钢, E-mail: buptcg@163.com。

引用格式: 陈钢, 孙丰磊, 李彤, 等. 考虑弹性变形的月面表取机械臂精度补偿方法[J]. 南京航空航天大学学报, 2021, 53(1): 1-10. CHEN Gang, SUN Fenglei, LI Tong, et al. Accuracy compensation for a lunar sampling manipulator with elastic deformation[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2021, 53(1): 1-10.

球、地外行星乃至太阳系的认识。月壤采样返回是中国探月工程“绕、落、回”三部曲的最终章^[1]。空间机械臂具有技术成熟、灵活性好等优点,适合代替人类执行采样任务^[2]。表取机械臂是空间机械臂的一个重要分支,在月球表面采样工作中,表取机械臂的任务是多次抓取月球表面的月壤并倾泻到采样封装装置中,采样结束后,提取采样封装装置,将其转移到返回舱。机械臂末端绝对定位精度决定了表取机械臂能否顺利完成采样任务,是衡量机械臂操作性能的重要指标,提高机械臂绝对定位精度对于确保采样任务完成至关重要^[3-4]。

由于受到加工装配误差、关节背隙、编码器误差等因素影响,机械臂实际运动参数与名义运动参数之间存在误差,导致机械臂末端绝对定位精度下降^[5]。此外,对于表取机械臂而言,两杆件为细长杆,跨度较大,杆件上的微小变形映射到机械臂末端会产生较大的末端位置误差,机械臂自重、负载及外力等引起的弹性变形是导致机械臂末端位置误差的主要原因。

分析弹性变形对机械臂末端位置误差影响,需要建立弹性变形量对于末端位置误差映射关系。针对该问题,国内外学者进行了大量研究。Khalil等基于逆向动力学模型对关节、杆件进行受力分析,建立坐标系间弹性传递矩阵,并推导构造几何参数与弹性参数雅可比矩阵^[6];Meggiolaro等以多项式近似的方法建立了弹性误差模型^[7];Zhou等通过分析关节附加力矩与末端负载映射关系建立有关关节变形的弹性误差模型^[8];刘志等对机械臂杆件弯曲变形进行分析并提出一种考虑结构变形的运动学补偿模型^[9];伍小凯通过建立几何误差与弹性误差综合运动学误差模型对机器人进行了运动学辨识^[10];陈宵燕采用线性扭簧理论构建机械臂柔度误差模型,并基于此建立了机器人刚柔耦合模型^[11]。

调研结果表明:现阶段弹性建模方法并未综合考虑静外力/力矩对机械臂杆件、关节产生的拉伸、弯曲、扭转变形的影响,造成弹性变形量与机械臂末端误差间映射关系表征不准确,从而导致后续几何参数标定精度不高。针对表取机械臂多种弹性变形耦合引起的末端绝对定位精度问题,本文建立了受弹性变形影响的机械臂弹性误差模型;在此基础上,结合几何误差模型建立机械臂综合误差模型,并通过几何参数标定的方法对末端绝对定位误差进行补偿;通过实验验证了文中提出精度补偿方

法的有效性。

1 机械臂运动学建模

有效的运动学模型必须满足完备性、比例性和连续性的要求^[12]。机械臂运动学建模常常使用Denavit-Hartenberg (DH)法,表取机械臂由一个偏航关节和3个俯仰关节组成^[13-14]。由于3个俯仰关节均为平行关节,而平行关节坐标系之间运动学参数对两轴之间的夹角误差非常敏感^[15],当两平行关节轴间存在微小夹角时,会引起运动学参数突变,不满足有效的运动学模型要求。因此,本文采用改进的DH(Modified DH, MDH)方法建立运动学模型^[16],MDH方法采用 $\alpha_i, a_i, \theta_i, d_i, \beta_i$ 这5个参数描述杆件间的关系。其中: α_i 称为杆件*i*扭角,即关节*i*和关节*i+1*轴线的夹角; a_i 为杆件*i*长度,即关节*i*和关节*i+1*轴线公垂线长度; θ_i 为关节*i*的转角,即杆件*i*和杆件*i+1*轴线的夹角; d_i 为关节*i*的偏置,即杆件*i*和杆件*i+1*轴线公垂线偏置; β_i 与 α_i 类似,同样用于描述两关节间轴线夹角。

“嫦娥5”表取机械臂MDH坐标系及MDH参数分别如图1及表1所示。

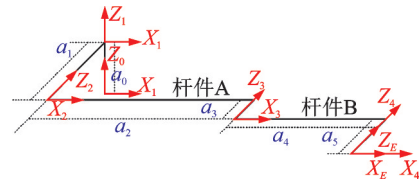


图1 表取机械臂MDH坐标系

Fig.1 MDH coordinate systems of the manipulator

表1 表取机械臂MDH参数

Table 1 MDH parameters of lunar sampling manipulator

编号	运动学参数				
	$\alpha_i/(\circ)$	$a_i/(\circ)$	$\theta_i/(\circ)$	d_i/mm	$\beta_i/(\circ)$
1	0	0	θ_1	a_0	0
2	-90	0	θ_2	$-a_1$	0
3	0	a_3	θ_3	$-a_3$	0
4	0	a_4	θ_4	$-a_5$	0

机械臂杆件坐标系间变换可以表示为

$$T_i = T_{\text{rot}}(X, \alpha_i) T_{\text{trans}}(X, a_i) T_{\text{rot}}(Z, \theta_i) \cdot T_{\text{trans}}(Z, d_i) T_{\text{rot}}(Y, \beta_i) \quad (1)$$

式中: $i=1, 2, 3, 4$; $T_{\text{rot}}(X, \alpha_i)$ 表示绕*X*轴旋转 α_i 变换矩阵; $T_{\text{trans}}(X, a_i)$ 表示沿*X*轴平移 a_i 变换矩阵; $T_{\text{rot}}(Z, \theta_i)$ 表示绕*Z*轴旋转 θ_i 变换矩阵; $T_{\text{trans}}(Z, d_i)$ 表示沿*Z*轴平移 d_i 变换矩阵; $T_{\text{rot}}(Y, \beta_i)$ 表示绕*Y*轴旋转 β_i 变换矩阵。

从惯性坐标系到末端坐标系的转换关系为

$$T = T_1 \cdot T_2 \cdot T_3 \cdot T_4 \quad (2)$$

2 机械臂弹性误差建模

分析杆件、关节因静外力导致的弹性变形量,基于此推导杆件弹性模型与关节弹性模型,综合两者建立机械臂综合弹性误差模型。表取机械臂的实际工作环境为月球重力环境,为保证地面模拟实验精度满足机械臂实际工作精度要求,需要模拟月球的重力环境,往往采用施加静态吊点力的方式来补偿地球重力环境,在进行受力分析时需要考虑吊点力对关节、杆件弹性变形的影响。

2.1 杆件弹性变形分析

杆件 A 与杆件 B 跨度较大,在机械臂自身重力、机械臂上携带的设备等载荷的重力、操作物的重力等共同作用下发生弯曲、拉伸、扭转变形。

2.1.1 杆件 B 末端弹性变形误差量

将杆件 B 视为首端固定、末端自由的悬臂梁进行受力分析^[17],杆件 B 主要受力为自身重力 G_4 、远摄像机重力 G_c 、吊点力 F_1 ;所受力矩为远摄像机重力产生力矩 M_c 、吊点力产生力矩 M_{F_1} 。

如图 2 所示,将杆件 4 的重力和机械臂末端负载简化到杆件 B 末端(关节 4 轴线与杆件 B 轴线的交点),得主矢 G_4 和主矩 M_4 ,主矩 M_4 分解为 M_{4P} 与 M_{4V} , 则有

$$\begin{cases} G_4 = m_4 g \\ M_4 = M_{4P} + M_{4V} \end{cases} \quad (3)$$

式中: M_{4P} 数值为 $M_{4P} = m_4 g(a_5 - r_{4z})$; M_{4V} 数值为 $M_{4V} = m_4 g r_{4x} \cos \varphi_4$; m_4 为杆件 4 质量; g 为重力加速度; r_{4x} 、 r_{4z} 分别为杆件 4 质心在 \sum_E 系下的位置矢量沿 X_E 和 Z_E 轴分量。

受力分析如图 3 所示。杆件 B 与水平方向的夹角 $\varphi_3 = \theta_2 + \theta_3$, 将 G_4 可分解为 G_{4r} 和 G_{4n} , G_{4r} 使

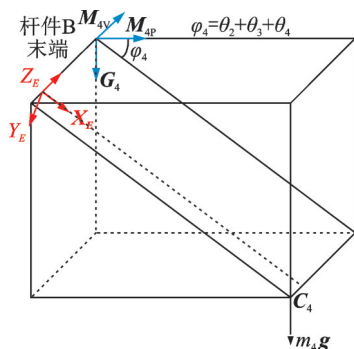


图 2 杆件 4 重力向杆件 3 末端等效示意图

Fig.2 Equivalent diagram of gravity of link 4 toward the end of link 3

杆件拉伸, G_{4n} 使杆件向 $+y$ 方向弯曲, M_{4P} 可分解为 M_{4Pr} 和 M_{4Pn} , M_{4Pr} 使杆件沿 $+x$ 方向扭转, M_{4Pn} 使杆件向 $+z$ 方向弯曲, M_{4V} 使杆件向 $+y$ 方向弯曲。杆件自身的重力 G_B 形成均匀载荷 $q_B = m_B g / l_B$ (m_B 为杆件 B 质量, l_B 为杆件 B 长度) 分解为 q_{Br} 和 q_{Bn} , q_{Br} 使杆件拉伸, q_{Bn} 使杆件沿 $+y$ 方向弯曲。远摄像机的重力简化到杆件轴线上, 得主矢 $G_c = m_c g$ 和主矩 $M_c = -m_c g r_{cx}$ (m_c 为远摄像机质量, r_{cx} 为远摄像机质心在 \sum_E 系下的位置矢量沿 Z_E 轴分量的模), G_c 、 M_c 引起的杆件变形同 G_4 、 M_4 。

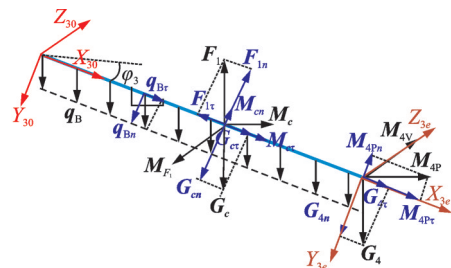


图 3 杆件 B 受力分析

Fig.3 Schematic drawing of force analysis of link B

吊点在杆件 B 上加一个竖直向上的力 F_1 和力矩 M_{F_1} , 其中: $M_{F_1} = F d_F \sin \varphi_3$, d_F 为吊点力作用点到杆件 B 轴线的垂直距离。 F_1 可分解为 F_{1r} 和 F_{1n} , F_{1r} 使杆件拉伸, F_{1n} 使杆件向 $-y$ 方向弯曲; M_{F_1} 使杆件向 $-y$ 方向弯曲。

杆件 B 的变形示意图如图 4 所示, 杆件 B 的末端由 B_1 点移动到 B_2 点, 则 \sum_{3e} 系的微分移动和转动 D_{Be} 为

$$D_{Be} = \begin{bmatrix} \Delta x_{LB} \\ \Delta y_{LB} \\ \Delta z_{LB} \\ \Delta \alpha_{LB} \\ \Delta \beta_{LB} \\ \Delta \theta_{LB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{F_x}{2EA_B} \\ \frac{F_{y1}}{8EI_B} + \frac{F_{y2}}{3EI_B} \\ \frac{F_z}{2EI_B} \\ \frac{M_x}{GI_{\rho B}} \\ \frac{M_{y1}}{6EI_B} + \frac{M_{y2}}{2EI_B} \\ \frac{M_z}{EI_B} \end{bmatrix} \quad (4)$$

式中: $F_x = q_{Br} l_B^2 + 2(G_{cr} r_{cx} + G_{4r} l_B - F_{1r} l_{F_1})$, $F_{y1} = q_{Bn} l_B^4 + 4(M_{4V} l_B^2 + G_{cn} r_{cx}^2 (l_B - r_{cx}))$, $F_{y2} = G_{cn} r_{cx}^3 + G_{4n} l_B^2$, $F_z = M_{cn} r_{cx}^2 + M_{4Pn} l_B^2 + 2(M_{cn} r_{cx} (l_B - r_{cx}))$, $M_x = M_{cr} r_{cx} + M_{4Pr} l_B$, $M_{y1} =$

$q_{Bn}l_B^3$, $M_{y2} = G_{cn}r_{cx}^2 + G_{4n}l_B^2 + 2M_{4V}l_B$, $M_z = M_{cn}r_{cx} + M_{4Pn}l_B$; EA_B 为杆件B抗拉刚度, EI_B 为杆件B弯曲刚度, GI_{pB} 为杆件B扭转刚度, r_{cx} 为远摄像机质心在 \sum_E 系下的位置矢量沿 X_E 分量。微分变换为

$$\Delta_{k3e} = \begin{bmatrix} 0 & -\Delta\theta_{LB} & \Delta\beta_{LB} & \Delta x_{LB} \\ \Delta\theta_{LB} & 0 & -\Delta\alpha_{LB} & \Delta y_{LB} \\ -\Delta\beta_{LB} & \Delta\alpha_{LB} & 0 & \Delta z_{LB} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$



图4 杆件B的变形示意图

Fig.4 Schematic drawing of deformation of link B

2.1.2 杆件A末端弹性变形误差量

杆件A主要受力为杆件3、杆件4重力 G_{34} 以及自身重力均匀载荷 q_A , 对杆件A按照杆件B的分析思路进行处理, 得到杆件A受力分析图如图5所示。杆件A末端坐标系 \sum_{2e} 微分移动和转动 D_{Ae} 为

$$D_{Ae} = \begin{bmatrix} \Delta x_{LA} \\ \Delta y_{LA} \\ \Delta z_{LA} \\ \Delta\alpha_{LA} \\ \Delta\beta_{LA} \\ \Delta\theta_{LA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{q_{Ar}l_A^2}{EA_A} + \frac{G_{34r}l_A}{EA_A} \\ \frac{q_{An}l_A^4}{8EI_A} + \frac{G_{34n}l_A^3}{3EI_A} + \frac{M_{34V}l_A^2}{2EI_A} \\ \frac{M_{34Pn}l_A^2}{2EI_A} \\ \frac{M_{34Pr}l_A}{GI_{pA}} \\ \frac{q_{An}l_A^3}{6EI_A} + \frac{G_{34n}l_A^2}{2EI_A} + \frac{M_{34V}l_A}{EI_A} \\ \frac{M_{34Pn}l_A}{EI_A} \end{bmatrix} \quad (6)$$

式中: q_{Ar} 、 q_{An} 为 q_A 分力, 分别使杆件拉伸和沿 $+y$ 方向弯曲; G_{34r} 、 G_{34n} 为 G_{34} 分力, 使杆件拉伸变形和沿 $+y$ 方向弯曲; M_{34P} 、 M_{34V} 为杆件3、杆件4重力向杆件A末端转换时的等效力矩分力矩, M_{34Pr} 、 M_{34Pn} 则为 M_{34P} 分力矩, M_{34Pr} 使杆件沿 $+x$ 方向扭转, M_{34Pn} 使杆件向 $+z$ 方向弯曲, M_{34V} 使杆件向 $+y$ 方向弯曲; EA_A 为杆件A抗拉刚度, EI_A 为杆件A弯曲刚度, GI_{pA} 为杆件A扭转刚度, l_A 为杆件A长度。微分变换为

$$\Delta_{k2e} = \begin{bmatrix} 0 & -\theta_{Ay} & \theta_{Az} & \Delta l_A \\ \theta_{Ay} & 0 & -\Delta\varphi_A & w_{Ay} \\ -\theta_{Az} & \Delta\varphi_A & 0 & w_{Az} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

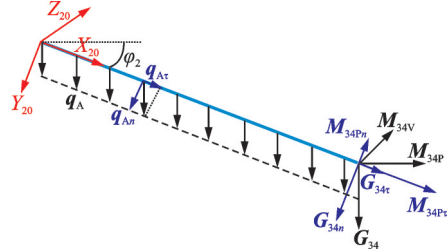


图5 杆件A受力分析图

Fig.5 Schematic drawing of force analysis of link A

2.2 关节弹性变形分析

关节弹性变形主要为绕关节转动方向的扭转变形, 拉伸变形与弯曲变形可忽略不计。关节受力主要为末端负载重力、吊点力、其余关节以及杆件重力。

2.2.1 关节4坐标系弹性变形误差量

如图6所示, 关节4主要受到杆件4重力以及末端负载影响。

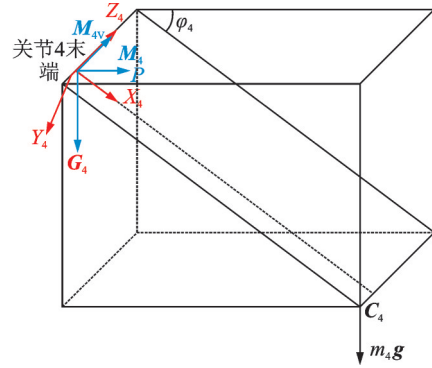


图6 杆件4重力向关节4简化示意图

Fig.6 Equivalent diagram of gravity of link 4 toward joint 4

将杆件4的重力和机械臂末端负载简化到关节4末端(关节4轴线与杆件4轴线的交点), 得主矢 $G_4 = m_4g$ 和主矩 $M_4 = M_{4P} + M_{4V}$ 。式中: $M_{4V} = m_4gr_{4r} \cos\varphi_4$, $\varphi_4 = \theta_2 + \theta_3 + \theta_4$, M_{4V} 使关节4沿 $+z$ 方向扭转; m_4 为杆件4质量, r_{4r} 、 r_{4z} 分别为杆件4质心在 \sum_4 系下的位置矢量沿 X_4 和 Z_4 轴分量。

关节4受力分析图如图7所示。则 \sum_4 系相对于 \sum_{3e} 系的微分移动和转动为

$$d_{J4} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \Delta\varphi_{J4}]^T \quad (8)$$

式中: $\Delta\varphi_{J4} = \frac{M_{4V}l_5}{GI_{pJ4}}$, l_5 为杆件5长度, GI_{pJ4} 为关节4扭转刚度。

2.2.2 其余关节坐标系弹性变形误差量

关节3在杆件B、关节4、杆件4的重力和机械臂末端负载合力 G_{34} 以及吊点力 F_1 作用下产生扭转变形, 其受力分析如图8所示。 \sum_3 系相对于

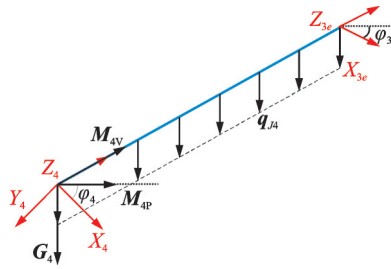


图 7 关节 4 受力分析图

Fig.7 Schematic drawing of force analysis of joint 4

\sum_{2e} 系的微分移动和转动为

$$d_{J3} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \Delta\varphi_{J3}]^T \quad (9)$$

式中: $\Delta\varphi_{J3} = \frac{M_{34V}l_3}{GI_{pJ3}} - \frac{M_{1F}l_3}{GI_{pJ3}}$, M_{34V} 为 G_{34} 向关节 3 末端(关节 3 轴线与杆件 B 轴线的交点)转换等效力矩分力矩, M_{1F} 为吊点力向关节 3 末端转换等效力矩, l_3 为杆件 3 长度, GI_{pJ3} 为关节 3 扭转刚度。

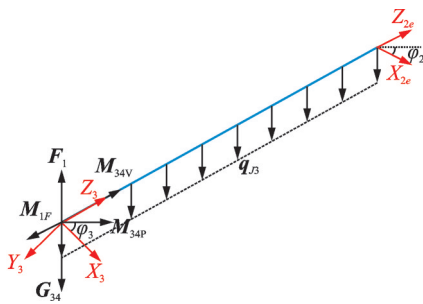


图 8 关节 3 受力分析图

Fig.8 Schematic drawing of force analysis of joint 3

关节 2 扭转变形为杆件 A、关节 3、杆件 B、关节 4、杆件 4 的重力和机械臂末端负载合力 G_{234} 以及吊点力共同作用的结果,其受力分析图如图 9 所示。

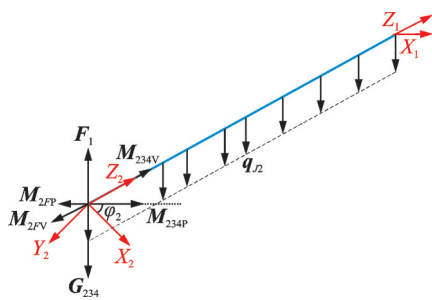


图 9 关节 2 受力分析图

Fig.9 Schematic drawing of force analysis of joint 2

\sum_2 系相对于 \sum_1 系的微分移动和转动为

$$d_{J2} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \Delta\varphi_{J2}]^T \quad (10)$$

式中: $\Delta\varphi_{J2} = \frac{M_{234V}l_3}{GI_{pJ2}} - \frac{M_{2FV}l_3}{GI_{pJ2}}$, M_{234V} 、 M_{2FV} 为 G_{234} 、吊点力向关节 2 末端(关节 2 轴线与杆件 A 轴

线的交点)转换等效力矩分力矩, GI_{pJ2} 为关节 2 扭转刚度。

关节 1 受力分析图如图 10 所示。

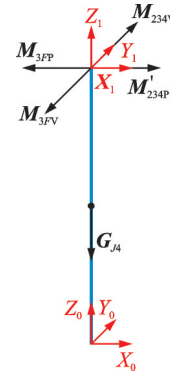


图 10 关节 1 受力分析图

Fig.10 Schematic drawing of force analysis of joint 1

由受力分析图可知,关节 1 无扭转变形,则

\sum_1 相对于 \sum_0 的微分移动和转动为

$$d_{J1} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad (11)$$

2.3 弹性误差建模

机械臂弹性变形包括关节弹性变形与杆件弹性变形两部分,关节、杆件弹性变形将导致末端坐标系发生偏移,与运动学参数造成的末端位置误差发生耦合,导致几何参数无法准确辨识出来。去除弹性误差影响,对于提高几何参数标定结果精度至关重要。

2.3.1 关节弹性模型

设 T 和 T' 分别为惯性系到末端坐标系的名义变换矩阵和实际变换矩阵,则

$$T' = T + dT \quad (12)$$

关节弹性变形后机械臂运动学模型为

$$T' = T'_1 \cdot T'_2 \cdot T'_3 \cdot T'_4 = (T_i + T_i \Delta_{Ji}) \approx T + (T_1 T_2 \cdots T_i \Delta_{Ji} T_{i+1} \cdots T_4) \quad (13)$$

由式(12)和式(13)可得关节弹性变形导致的末端变换矩阵微分 dT 为

$$dT = (T_1 T_2 \cdots T_i \Delta_{Ji} T_{i+1} \cdots T_4) = [T(T_{i+1} \cdots T_4)^{-1} \Delta_{Ji} (T_{i+1} \cdots T_4)] \quad (14)$$

定义 $dT = T \cdot \Delta_J$, Δ_J 则

$$\Delta_J = [(T_{i+1} \cdots T_4)^{-1} \Delta_{Ji} (T_{i+1} \cdots T_4)] \quad (15)$$

令 $U_i = T_i T_{i+1} \cdots T_n = \begin{bmatrix} n_i^u & o_i^u & a_i^u & p_i^u \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $n =$

4), $U_{n+1} = I_4$, 则

$$\Delta_J = [(U_i)^{-1} \Delta_{Ji} U_i] \quad (16)$$

进一步推导可得到关节弹性变形导致的末端位置误差 $D_{f,J}$ 为

$$D_{f,J} = \sum_{i=1}^4 \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} (\mathbf{n}_{i+1}^u)^T & (\mathbf{p}_{i+1}^u \times \mathbf{n}_{i+1}^u)^T \\ (\mathbf{o}_{i+1}^u)^T & (\mathbf{p}_{i+1}^u \times \mathbf{o}_{i+1}^u)^T \\ (\mathbf{a}_{i+1}^u)^T & (\mathbf{p}_{i+1}^u \times \mathbf{a}_{i+1}^u)^T \\ 0_{1 \times 3} & (\mathbf{n}_{i+1}^u)^T \\ 0_{1 \times 3} & (\mathbf{o}_{i+1}^u)^T \\ 0_{1 \times 3} & (\mathbf{a}_{i+1}^u)^T \end{bmatrix} \cdot \mathbf{d}_{f,i} \end{pmatrix} \quad (17)$$

定义关节 i 弹性变形引起的位置误差与末端位置误差之间的传递矩阵为

$$J_{f,i} = \begin{bmatrix} (\mathbf{n}_{i+1}^u)^T & (\mathbf{p}_{i+1}^u \times \mathbf{n}_{i+1}^u)^T \\ (\mathbf{o}_{i+1}^u)^T & (\mathbf{p}_{i+1}^u \times \mathbf{o}_{i+1}^u)^T \\ (\mathbf{a}_{i+1}^u)^T & (\mathbf{p}_{i+1}^u \times \mathbf{a}_{i+1}^u)^T \\ 0_{1 \times 3} & (\mathbf{n}_{i+1}^u)^T \\ 0_{1 \times 3} & (\mathbf{o}_{i+1}^u)^T \\ 0_{1 \times 3} & (\mathbf{a}_{i+1}^u)^T \end{bmatrix} \quad (18)$$

则式(17)可以写为

$$D_{f,J} = J_{f,J} \cdot \mathbf{d}_{f,J} \quad (19)$$

式中: $J_{f,J} = [J_{f,1} \ J_{f,2} \ J_{f,3} \ J_{f,4}]$ 表示关节弹性误差与末端位置误差之间的误差传递矩阵, $\mathbf{d}_{f,J} = [\mathbf{d}_{f,1} \ \mathbf{d}_{f,2} \ \mathbf{d}_{f,3} \ \mathbf{d}_{f,4}]^T$ 为关节弹性误差向量矩阵, 各个误差向量如式(8)至式(11)所示。

2.3.2 杆件弹性模型

由式(4)和式(6)可以得到 \sum_{2e} 系和 \sum_{3e} 系分别有位置误差 D_{Ae} 、 D_{Be} 。考虑杆件变形的机械臂坐标系如图11所示。对于 \sum_2 系与 \sum_3 系的变换矩阵 T_3 , 设 \sum_2 系与 \sum_{2e} 系的变换矩阵为 T_{31} , \sum_{2e} 系与 \sum_3 系的变换矩阵为 T_{32} ; 对于 \sum_3 系与 \sum_4 系的变换矩阵 T_4 , 设 \sum_3 系与 \sum_{3e} 系的变换矩阵为 T_{41} , \sum_{3e} 系与 \sum_4 系的变化矩阵为 T_{42} 。则

$$\begin{aligned} T_3 &= T_{31} T_{32} \\ T_4 &= T_{41} T_{42} \end{aligned} \quad (20)$$

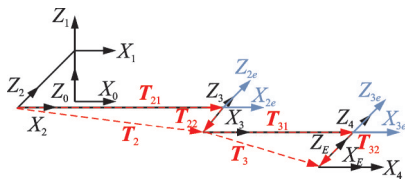


图11 考虑杆件变形的机械臂坐标系

Fig.11 Coordinate systems considering deformation of links

由于杆件变形,使得矩阵 T_{31} 和 T_{41} 分别有微分变换 Δ_{k2e} 和 Δ_{k3e} ,即矩阵 T_{31} 和 T_{41} 的实际值为

$$\begin{aligned} T'_{31} &= T_{31} + \Delta_{k2e} T_{31} \\ T'_{41} &= T_{41} + \Delta_{k3e} T_{41} \end{aligned} \quad (21)$$

杆件变形后机械臂末端坐标系相对于惯性系的变换矩阵为

$$T'' = T_1 T_2 T'_{31} T_{32} T'_{41} T_{42} \quad (22)$$

忽略高阶无穷小,结合式(12)可得

$$\begin{aligned} dT &= T_1 T_2 \Delta_{k2e} T_{31} T_{32} T_4 + T_1 T_2 T_3 \Delta_{k3e} T_{41} T_{42} = \\ &T (T_1 T_2 \Delta_{k2e} (T_1 T_2)^{-1} + T_1 T_2 T_3 \Delta_{k3e} (T_1 T_2 T_3)^{-1}) \end{aligned} \quad (23)$$

定义 $dT = T \Delta_L$, 则

$$\begin{aligned} \Delta_L &= T_1 T_2 \Delta_{k2e} (T_1 T_2)^{-1} + T_1 T_2 T_3 \Delta_{k3e} (T_1 T_2 T_3)^{-1} = \\ &V_1 \Delta_{k2e} (V_1)^{-1} + V_2 \Delta_{k3e} (V_2)^{-1} \end{aligned} \quad (24)$$

式中: $V_1 = T_1 T_2$, $V_2 = T_1 T_2 T_3$,

$V_1 = \begin{bmatrix} R_1^V & \mathbf{p}_1^V \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $V_2 = \begin{bmatrix} R_2^V & \mathbf{p}_2^V \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 。则式(24)可化为

$$\begin{aligned} \Delta_L &= \begin{bmatrix} 0 & -\delta_z & \delta_y & d_x \\ \delta_z & 0 & -\delta_x & d_y \\ -\delta_y & \delta_x & 0 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\ &\begin{bmatrix} (R_1^V)^T \delta_A^\times R_1^V & (R_1^V)^T \delta_A^\times \mathbf{p}_1^V + (R_1^V)^T \mathbf{d}_A \\ 0_{1 \times 3} & 0 \end{bmatrix} + \\ &\begin{bmatrix} (R_2^V)^T \delta_B^\times R_2^V & (R_2^V)^T \delta_B^\times \mathbf{p}_2^V + (R_2^V)^T \mathbf{d}_B \\ 0_{1 \times 3} & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (25)$$

可得由杆件变形产生的末端位置误差 $D_{f,L}$ 在惯性系下的表示为

$$D_{f,L} = [J_{L3} \ J_{L4}] \begin{bmatrix} D_{Ae} \\ D_{Be} \end{bmatrix} \quad (26)$$

2.3.3 综合弹性误差模型

定义 $J_f = [J_{f,L} \ J_{f,J}]$, 表示弹性误差与末端位置误差之间的误差传递矩阵, $\mathbf{d}_f = [\mathbf{d}_{f,L} \ \mathbf{d}_{f,J}]^T$ 为弹性误差向量矩阵, 则综合杆件弹性误差模型与关节弹性误差模型可得到弹性变形引起的末端位置误差向量为

$$D_f = D_{f,L} + D_{f,J} = [J_{f,L} \ J_{f,J}] \begin{bmatrix} \mathbf{d}_{f,L} \\ \mathbf{d}_{f,J} \end{bmatrix} = J_f \mathbf{d}_f \quad (27)$$

3 机械臂末端综合精度补偿

机械臂末端位置误差包括由几何参数误差引起的位置误差和弹性变形引起的位置误差两部分。上文已完成弹性误差建模工作,下面主要对几何参数误差建模,然后对机械臂末端位置误差进行耦合性分析,分离由关节、杆件变形导致的末端位置误差,最终对几何参数进行标定。

3.1 几何参数误差建模

对于杆件坐标系,设 T_i 和 T'_i 分别为 $\{i+1\}$ 系相对于 $\{i\}$ 系的名义变换矩阵和实际变换矩阵,对变换矩阵微分进行一阶近似,可得

$$dT_i = T'_i - T_i = \Delta_i T_i \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (28)$$

由式(28)可得相邻杆件坐标系相对于惯性系的位置误差矩阵为

$$\Delta_i = (T'_i - T_i) T_i^{-1} \Delta_i = (T'_i - T_i) T_i^{-1} \quad (29)$$

对变换矩阵微分进行一阶近似,可由式(30)计算^[18]

$$dT_i = \frac{\partial T_i}{\partial \alpha_i} \Delta \alpha_i + \frac{\partial T_i}{\partial a_i} \Delta a_i + \frac{\partial T_i}{\partial \theta_i} \Delta \theta_i + \frac{\partial T_i}{\partial d_i} \Delta d_i + \frac{\partial T_i}{\partial \beta_i} \Delta \beta_i \quad (30)$$

计算得

$$\begin{bmatrix} d_{xi} \\ d_{yi} \\ d_{zi} \\ \delta_{xi} \\ \delta_{yi} \\ \delta_{zi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -d_i s \theta_i c \beta_i & c \theta_i c \beta_i & 0 & -s \beta_i & 0 \\ -d_i c \theta_i & -s \theta_i & 0 & 0 & 0 \\ -d_i s \theta_i s \beta_i & c \theta_i s \beta_i & 0 & c \beta_i & 0 \\ c \theta_i c \beta_i & 0 & -s \beta_i & 0 & 0 \\ -s \theta_i & 0 & 0 & 0 & 1 \\ c \theta_i s \beta_i & 0 & c \beta_i & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \alpha_i \\ \Delta a_i \\ \Delta \theta_i \\ \Delta d_i \\ \Delta \beta_i \end{bmatrix} \quad (31)$$

设 T 和 T' 分别为惯性系到末端坐标系的名义变换矩阵和实际变换矩阵,则

$$T' = T + dT = \prod_{i=1}^4 (T_i + dT_i) \approx T + \sum_{i=1}^4 T_1 T_2 \cdots T_{i-1} dT_i T_{i+1} \cdots T_4 \quad (32)$$

由式(28)和式(32)可得

$$dT = \sum_{i=1}^4 T_1 T_2 \cdots T_{i-1} dT_i T_{i+1} \cdots T_4 = \sum_{i=1}^4 T (T_{i+1} \cdots T_4)^{-1} \Delta_i (T_{i+1} \cdots T_4) \quad (33)$$

令 $U_i = T_i T_{i+1} \cdots T_n (i=1, 2, 3, 4), U_{n+1} = I_4$, 式(33)可化为

$$dT = \sum_{i=1}^4 T \cdot (U_{i+1})^{-1} \cdot \Delta_i \cdot U_{i+1} = T \cdot \Delta \quad (34)$$

则 Δ 可写为

$$\Delta = \sum_{i=1}^4 (U_{i+1})^{-1} \cdot \Delta_i \cdot U_{i+1} \quad (35)$$

式中 $U_i = \begin{bmatrix} n_i^u & o_i^u & a_i^u & p_i^u \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 。

定义 D_g 为由几何参数误差引起的末端位置误差向量

$$D_g = [d_x \ d_y \ d_z \ \delta_x \ \delta_y \ \delta_z]^T \quad (36)$$

由式(35)和式(36)可推导出

$$D_g = \sum_{i=1}^4 \begin{bmatrix} (n_{i+1}^u)^T & (p_{i+1}^u \times n_{i+1}^u)^T \\ (o_{i+1}^u)^T & (p_{i+1}^u \times o_{i+1}^u)^T \\ (a_{i+1}^u)^T & (p_{i+1}^u \times a_{i+1}^u)^T \\ 0_{1 \times 3} & (n_{i+1}^u)^T \\ 0_{1 \times 3} & (o_{i+1}^u)^T \\ 0_{1 \times 3} & (a_{i+1}^u)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{xi} \\ d_{yi} \\ d_{zi} \\ \delta_{xi} \\ \delta_{yi} \\ \delta_{zi} \end{bmatrix} \quad (37)$$

令 J_{g_i} 表示几何参数误差与末端位置误差之间的误差传递矩阵; $e_i =$

$[\Delta \alpha_i \ \Delta a_i \ \Delta \theta_i \ \Delta d_i \ \Delta \beta_i]^T (i=1, 2, 3, 4)$ 表示几何参数误差。式(37)可写为

$$D_g = [J_{g^1} \ J_{g^2} \ J_{g^3} \ J_{g^4}] \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{bmatrix} = J_g e \quad (38)$$

3.2 模型参数耦合性分析

综合几何误差模型与弹性误差模型,可得到机械臂末端位置误差向量为

$$D_{\text{End}} = D_f + D_g = J_f d_f + J_g e \quad (39)$$

式中: $D_{\text{End}} = PE_{\text{meas}} - PE_{\text{nom}}$, PE_{meas} 为末端位置测量值, PE_{nom} 为末端位置理论值。

由式(39)表示的机械臂末端位置误差向量中,末端位置理论值 PE_{nom} 、由弹性误差引起的末端位置误差 D_f 、由几何参数误差引起的末端位置误差 D_g 、弹性误差与末端位置误差之间的传递矩阵 J_f 、几何参数误差与末端位置误差之间的传递矩阵 J_g , 均为几何参数的函数;此外,由于关节和杆件所受力矩 F_{L_i} 和 F_{R_i} 均为动力学参数的函数,因此由弹性变形引起的末端位置误差向量 d_f 为几何参数和弹性参数的函数。

以 E 表示全部几何参数, S 表示全部弹性参数,则有

$$D_{\text{End}}(E') = J_f(E') \cdot d_f(E', S') + J_g(E') \cdot e \quad (40)$$

式中: $E' = E + e, S' = S + \Delta s$ 。式(40)中几何参数误差与弹性参数误差存在耦合,忽略高阶无穷小量,可将式(40)简化为

$$D_{\text{End}}(E') = J_f(E') \cdot d_f(E, S) + J_g(E') \cdot e \quad (41)$$

3.3 综合精度补偿

经过上述分析可知,末端位置误差是几何参数和弹性参数共同作用的结果,几何参数的标定会受弹性参数误差的影响,因此需先对弹性参数进行标定,然后再对几何参数误差进行标定,精度补偿流程如图 12 所示。

由于几何参数误差与末端位置误差之间的关系是线性的,因此采用最小二乘法进行标定。对于 n 自由度串联机器人,利用 MDH 建立的运动学模型中含有 $5n$ 个几何参数,取 m 组末端位置构建超定方程组,如式(42)所示。为保证顺利求解, m 应取大于 $5n/6$ 的整数。

$$\begin{bmatrix} D_{g^1} \\ \vdots \\ D_{g^m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{g^1} \\ \vdots \\ J_{g^m} \end{bmatrix} \cdot e \quad (42)$$

本文只关注机械臂末端绝对定位误差,即式(42)中 $D_{g^1} \cdots D_{g^m}$ 以及 $J_{g^1} \cdots J_{g^m}$ 均只有前三行有效,

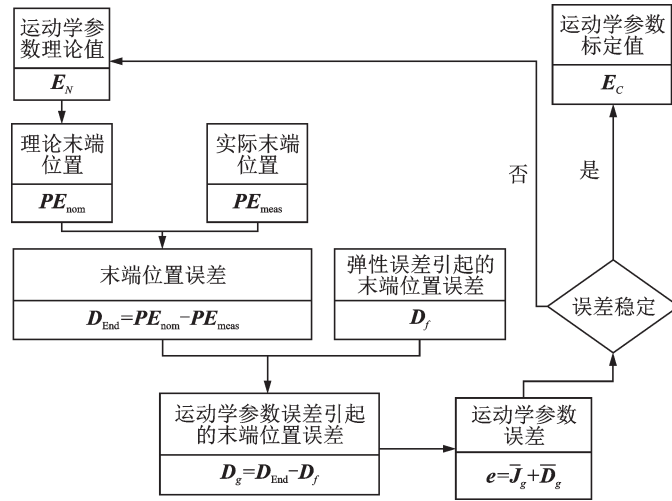


图12 精度补偿算法流程图

Fig.12 Flowchart of algorithm for accuracy compensation

后三行中对应的末端姿态误差均为零。因此,为了顺利求解全部的几何参数,要求 m 应取大于 $5n/3$ 的整数。

令 $\bar{D}_g = [D_{g1}^T, \dots, D_{gm}^T]^T$, $\bar{J}_g = [J_{g1}^T, \dots, J_{gm}^T]^T$, 则式(42)可化为

$$\bar{D}_g = \bar{J}_g e \quad (43)$$

利用最小二乘法求解式(43),可得

$$e = (\bar{J}_g)^+ \bar{D}_g \quad (44)$$

为保证得到的几何参数具有足够的精度,需要利用最小二乘法进行有限次迭代,以 $E_j = [\alpha_j \ a_j \ \theta_j \ d_j]^T$ ($j=1, \dots, N$) 表示第 j 次标定过程输入的几何参数,则有

$$e_{j+1} = [J_{gj}(E_j)]^+ \cdot D_g(E_j) = [J_{gj}(E_j)]^+ \cdot [D_{\text{End}}(E_j) - D_f(E_j)] =$$

$$[J_{gj}(E_j)]^+ \cdot [PE_{\text{meas}} - PE_{\text{nom}}(E_j) - D_f(E_j)] \quad (45)$$

式中:当 $j=1$ 时(即第一次标定过程),取 $e_1=0$, E_1 为初始几何参数, $E_j' = E_j + e_j$ 。式(45)的收敛条件为 $e_{j+1}=0$ 。

4 实验与结果分析

为了对本文所提出的考虑弹性变形的精度补偿方法的正确性和有效性进行验证,选取 28 组关键构型,利用激光跟踪仪测得 28 组构型绝对末端位置,将测得的末端位置作为输入,利用本文提出的精度补偿方法求解坐标系运动学参数误差,进而得到机械臂坐标系运动学参数。如表 2 所示为补偿前后机械臂 MDH 参数值以及误差值。

表2 表取机械臂补偿前后的 MDH 参数

Table 2 MDH parameters before and after compensation

编号	原 MDH 参数					标定 MDH 参数					MDH 参数误差				
	$\alpha/(^\circ)$	a/mm	$\theta/(^\circ)$	d/mm	$\beta/(^\circ)$	$\alpha/(^\circ)$	a/mm	$\theta/(^\circ)$	d/mm	$\beta/(^\circ)$	$\alpha/(^\circ)$	a/mm	$\theta/(^\circ)$	d/mm	$\beta/(^\circ)$
1	0	0	0	0.10	0	0.019	0	-0.008	0.097	0.304	0.019	0	-0.008	-0.003	0.304
2	90	0	0	-0.10	0	89.996	-0.002	0.304	-0.084	0.007	-0.004	-0.002	0.304	0.016	0.007
3	0	1.95	0	-0.10	0	-0.001	1.974	0.189	-0.095	0	-0.001	0.024	0.189	0.005	0
4	0	1.75	0	-0.10	0	-0.019	1.766	-0.790	-0.092	0.005	-0.019	0.016	-0.790	0.008	0.005

对标定结果进行验证,选取 50 组验证构型,对比精度补偿前后机械臂末端位置误差。同时,忽略弹性变形对机械臂末端位置误差的影响,仅对运动学参数进行辨识,并基于辨识获得的坐标系运动学参数计算 50 组验证构型末端位置误差。补偿前、考虑弹性变形进行补偿、忽略弹性变形仅进行运动学参数辨识 3 种情况末端位置误差沿 X、Y、Z 坐标轴的分量以及三轴合成误差如图 13 所示。

对实验数据进行处理,可以得到补偿前后末端位置误差在各个坐标轴上的最大值、最小值和平均值如表 3 所示。

分析表 3 中数据可以看出,补偿后末端位置误差沿各个坐标轴的平均值比标定前有明显下降,误差沿 X、Y、Z 三轴分量的平均值分别下降 88.90%、92.81%、93.13%,三轴合成的位置误差平均值下降 92.16%。补偿后末端位置误差沿各个坐标轴的

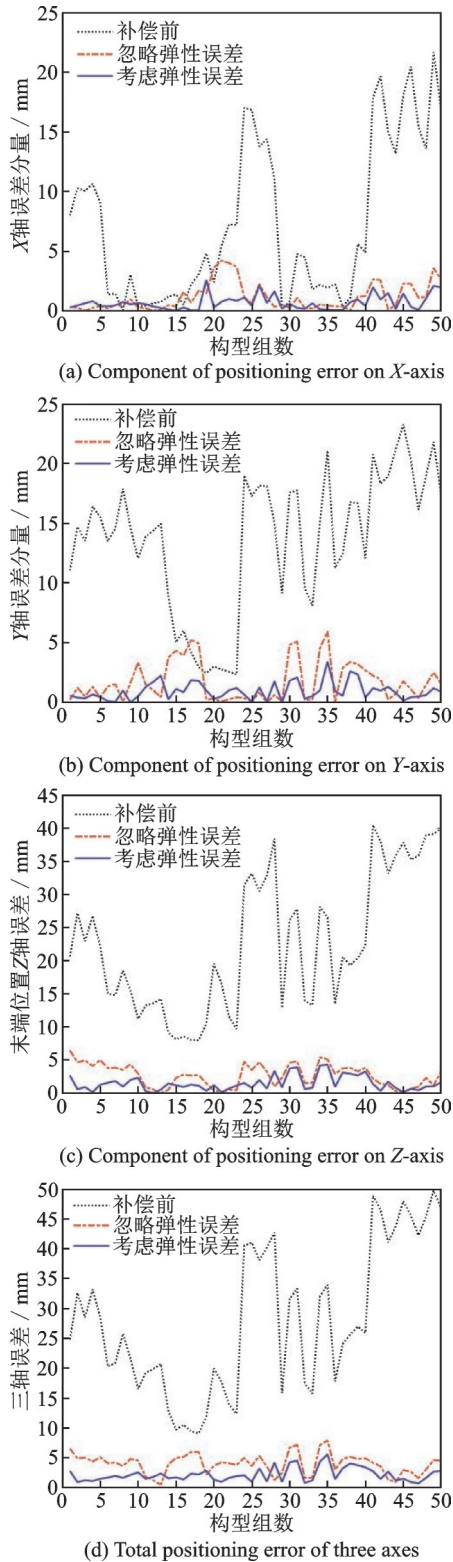


图 13 精度补偿前后末端位置误差

Fig.13 Positioning error before and after compensation

最大值比标定前分别下降 87.67%、84.87%、89.01%，三轴合成的位置误差最大值下降 88.63%。而且，综合精度补偿后末端位置误差较几何标定末端位置误差更小、效果更优。通过分析可知，利用本文提出考虑弹性变形的精度补偿方法得到的机械臂运动学参数精度较高，能够大幅提高表取机械臂末端绝对定位精度。

表 3 精度补偿前后末端位置误差对比

Table 3 Comparison of positioning error in different situations

验证参数	三轴分量	标定前	考虑弹性误差	忽略弹性误差
最大值/mm	X	20.910 0	2.578 3	7.873 9
	Y	22.720 0	3.438 3	4.196 4
	Z	39.540 0	4.345 1	5.949 6
	sum	48.964 4	5.541 6	6.481 5
平均值/mm	X	6.164 6	0.684 5	1.130 3
	Y	13.330 4	0.957 8	1.751 9
	Z	21.978 6	1.509 3	2.687 3
	sum	27.250 6	2.135 8	3.967 3

5 结 论

针对大跨度、低刚度的表取机械臂存在的末端绝对定位精度问题，本文首先对机械臂关节、杆件进行了受力分析和形变分析，并推导了机械臂弹性误差和末端位置误差间的映射关系，从而建立了机械臂弹性误差模型；然后，基于机械臂的 MDH 运动学模型建立了机械臂几何误差模型，表征机械臂运动学参数误差和末端位置误差间的映射关系；进而，建立弹性机械臂综合误差模型并且设计了可适用于表取机械臂的精度补偿方法，并进行仿真验证。结果表明，该方法能够获得准确的机械臂运动学参数，大幅提高机械臂末端绝对定位精度。

参考文献：

[1] 张樵苏. 探月“三步走”收官“有看头”——中国探月工程嫦娥五号任务正式启航[EB/OL]. (2020-11-24). http://www.xinhuanet.com/202011/24/c_1126779817.htm.

[2] 王仕卫. 面向在轨服务的空间机械臂自标定方法研究[D]. 北京: 北京邮电大学, 2019.
WANG Shiwei. Research on self-calibration method of space manipulator for on-orbit service[D]. Beijing: Beijing University of Posts and Telecommunications, 2019.

[3] 文科, 张加波, 赵长喜, 等. 工业机器人 D-H 运动学参数分步辨识方法[J]. 南京航空航天大学学报, 2018, 50(S2): 69-73.
WEN Ke, ZHANG Jiabo, ZHAO Changxi, et al. Step by step identification of D-H kinematics parameter for industry robot[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2018, 50(S2): 69-73.

[4] 向民志, 李祥云, 范百兴, 等. 基于抗差估计的工业机器人运动学参数标定[J]. 南京航空航天大学学

- 报, 2018, 50(6): 848-853.
- XIANG Minzhi, LI Xiangyun, FAN Baixing, et al. Calibration of industrial robot kinematic parameters based on the robust estimation[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2018, 50(6): 848-853.
- [5] 陈钢, 贾庆轩, 李彤, 等. 基于误差模型的机器人运动学参数标定方法与实验[J]. 机器人, 2012, 34(6): 680-688.
- CHEN Gang, JIA Qingxuan, LI Tong, et al. Study on calibration method and experiments of robot kinematics parameters based on error model[J]. Robot, 2012, 34(6): 680-688.
- [6] KHALIL W, BESNARD S. Geometric calibration of robots with flexible joints and links[J]. Journal of Intelligent and Robotic Systems, 2002, 34(4): 357-379.
- [7] MEGGIOLARO M A, DUBOWSKY S, MAVROUDIS C. Geometric and elastic error calibration of a high accuracy patient positioning system[J]. Mechanism and Machine Theory, 2005, 40(4): 415-427.
- [8] ZHOU J, NGUYEN H N, KANG H J. Simultaneous identification of joint compliance and kinematic parameters of industrial robots[J]. International Journal of Precision Engineering and Manufacturing, 2014, 15(11): 2257-2264.
- [9] 刘志, 赵正大, 谢颖, 等. 考虑结构变形的机器人运动学标定及补偿[J]. 机器人, 2015, 37(3): 376-384.
- LIU Zhi, ZHAO Zhengda, XIE Ying, et al. Kinematic calibration and compensation for a robot with structural deformation[J]. Robot, 2015, 37(3): 376-384.
- [10] 伍小凯. 轻型柔性机械臂的误差分析与辨识[D]. 大连: 大连理工大学, 2013.
- WU Xiaokai. Error analysis and identification of lightweight flexible manipulator[D]. Dalian: Dalian University of Technology, 2013.
- [11] 陈宵燕. 工业机器人多模式标定及刚柔耦合误差补偿方法研究[D]. 无锡: 江南大学, 2020.
- CHEN Xiaoyan. Research on multi-mode calibration and rigid-flexible coupling error compensation method for industrial robot[D]. Wuxi: Jiangnan University, 2020.
- [12] 刘振宇, 陈英林, 曲道奎, 等. 机器人标定技术研究[J]. 机器人, 2002, 24(5): 447-450.
- LIU Zhenyu, CHEN Yinglin, QU Daokui, et al. Research on robot calibration[J]. Robot, 2002, 24(5): 447-450.
- [13] 马如奇, 姜水清, 刘宾, 等. 月球采样机械臂系统设计及试验验证[J]. 宇航学报, 2018, 39(12): 1315-1322.
- MA Ruqi, JIANG Shuiqing, LIU Bin, et al. Design and verification of a lunar sampling manipulator system[J]. Journal of Astronautics, 2018, 39(12): 1315-1322.
- [14] 王康, 张沛, 林云成, 等. 采样机械臂关节月表环境适应性设计[J]. 航天器环境工程, 2017, 34(5): 482-489.
- WANG Kang, ZHANG Pei, LIN Yuncheng, et al. Environmental adaptive design of joint for a lunar surface sampling arm[J]. Spacecraft Environment Engineering, 2017, 34(5): 482-489.
- [15] SANTOLARIA J, AGUILAR J J, YAGÜE J A, et al. Kinematic parameter estimation technique for calibration and repeatability improvement of articulated arm coordinate measuring machines[J]. Precision Engineering, 2008, 32(4): 251-268.
- [16] HAYATI S A. Robot arm geometric link parameter estimation[C]//Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control. New York: IEEE, 1983: 1477-1483.
- [17] 王蕾. 柔性机械臂运动学参数标定与精度补偿技术研究[D]. 北京: 北京邮电大学, 2019.
- WANG Lei. Research on kinematic calibration and accuracy compensation of flexible manipulator[D]. Beijing: Beijing University of Posts and Telecommunications, 2019.
- [18] 阎华, 刘桂雄, 郑时雄. 机器人位姿误差建模方法综述[J]. 机床与液压, 2000(1): 3-5.
- YAN Hua, LIU Guixiong, ZHENG Shixiong. Review of posture error modeling methods for robot[J]. Machine Tool & Hydraulics, 2000(1): 3-5.

(编辑: 胥橙庭)