

DOI:10.16356/j.1005-2615.2020.06.020

二维非线性离散声子晶体色散摄动分析

吴 添¹, 朱 江¹, 黄文博¹, 何 欢^{1,2}, 惠旭龙³, 刘小川³

(1.南京航空航天大学机械结构力学及控制国家重点实验室,南京,210016;2.南京航空航天大学振动工程研究所,南京,210016;3.中国飞机强度研究所结构冲击动力学航空科技重点实验室,西安,710065)

摘要:弹性波在声子晶体中的传播方式可由其色散关系决定,从二维无限周期结构的波动方程出发,通过引入 Bloch 理论与小参数摄动展开法,提出了一种分析非线性离散型声子晶体色散关系的一阶近似摄动法。得到了一阶近似的色散关系与频散曲线,以分析不同方向上的阻抗配置与非线性系数对频散及群速度的影响。分别以二维单原子网格、二维双原子二自由度网格和二维双原子四自由度网格为例,得到了它们的一阶频散曲线,色散结果显示带隙及传播方向与波幅相关。同时结合数值积分分解验证了其在有限波幅谐波激励下解的精度。

关键词:声子晶体;离散周期结构;弱非线性;摄动法;色散关系

中图分类号:TU311.3;TU352.1

文献标志码:A

文章编号:1005-2615(2020)06-0997-10

Perturbation Analysis for Dispersion Relations of Two-Dimensional Periodic Structure

WU Tian¹, ZHU Jiang¹, HUANG Wenbo¹, HE Huan^{1,2}, XI Xulong³, LIU Xiaochuan³

(1. State Key Laboratory of Mechanics and Control of Mechanical Structures, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing, 210016, China; 2. Institute of Vibration Engineering Research, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing, 210016, China; 3. Aviation Key Laboratory of Science and Technology on Structures Impact Dynamics, Aircraft Strength Research Institute of China, Xi'an, 710065, China)

Abstract: The propagation mode of the elastic wave in phononic crystals is determined by its dispersion relation. Starting from the wave equation of two-dimensional infinite periodic structure and introducing the Bloch theory and small parametric perturbation expansion method, a first-order approximate perturbation method for analyzing the dispersion relationship of nonlinear discrete phononic crystals is proposed. And the first-order dispersion relations and dispersion curves are obtained to analyze the effects of impedance configuration and nonlinear coefficient pair frequency on dispersion and group velocity in different directions. Two-dimensional single-atom lattices, two-dimensional two-atom two-degree-of-freedom grids, and two-dimensional two-atom four-degree-of-freedom grids are used as examples. Their first-order dispersion curves are obtained. Dispersion results are displayed. Dispersion results reveal that band gap and direction of propagation are related to the amplitude of the wave. Finally, combining with the numerical integral result to verify the solution's accuracy under harmonic excitation of finite amplitude.

Key words: sonic crystal; discrete periodic structure; weak nonlinear; perturbation method; dispersion relation

基金项目:江苏高校优势学科建设工程资助项目。

收稿日期:2019-05-17;修订日期:2019-06-21

通信作者:何欢,男,教授, E-mail: hehuan@nuaa.edu.cn。

引用格式:吴添,朱江,黄文博,等. 二维非线性离散声子晶体色散摄动分析[J]. 南京航空航天大学学报,2020,52(6):997-1006. WU Tian, ZHU Jiang, HUANG Wenbo, et al. Perturbation analysis for dispersion relations of two-dimensional periodic structure[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2020, 52(6):997-1006.

近年来,大量关于声子晶体的研究聚焦在线性周期结构中波传播的可控性。通过调整晶胞的结构可以获得理想的声子(或光子)色散关系。从Bloch波理论出发,学者对声子晶体结构的波传播特性进行了大量研究。Ruzzene和Tsopelas^[1]分析蜂窝夹芯板中的波传播,发现沿着结构周期性地放置具有不同几何形状的蜂窝芯材料,会引入阻抗不匹配,可以阻止波在指定频带(阻带)上的传播;Phani等^[2]使用Floquet-Bloch理论,展示了二维网状细胞结构,如三角形、正方形、六角形和Kagome晶格的波的空间滤波特性;Scarpa等^[3]使用有限元和Bloch理论分析了具有六边形单胞(即蜂窝体)的细胞结构,发现在特定的频带内,波的传播将被限制在特定方向。Chen等^[4]研究发现单相星形结构可以实现双负性质,可以通过改变星型结构的凹角和其他结构参数来调整带隙的位置和宽度。Hussein等^[5-6]采用阻尼Bloch波理论研究指出,阻尼会改变色散曲线的形状,减小带隙宽度,并且会通过分支截断打开波矢能带。郁殿龙^[7]通过修改傅立叶级数的展开形式,改进平面波展开法计算周期栅格结构的振动带隙。

计算能带结构和频散关系是研究声子晶体的基础,因而带隙可调的声子晶体也得到了更多的关注。Bertoldi等^[8]通过施加外部应力改变声子晶体结构的方式实现对能带的控制。He等^[9]研究了缺陷位置对声子缺陷频率和声子定位的影响。Cheng等^[10]研究了一维声子晶体板中兰姆波的温度调谐带隙,在研究范围内温度升高带隙变宽。Kishimoto^[11]分析了二维压电声子晶体中弹性波的传播。Tang等^[12]研究了由拉胀星形蜂窝构成的周期结构中的波传播,通过色散分析给出了能带结构和频率等高线。发现星型拉胀特性的材料不仅能够降低带隙频率,对声学的准直性也有很大影响。Wang等^[13]的研究表明压电弹簧的结构刚度和负比例控制可以在声学分支下产生新的阻带。文献^[14]等利用有限元方法对存在缺陷的二维声子晶体进行了研究,结果表明弹性波在点缺陷处出现多条缺陷模,弹性波沿着线缺陷传播形成波导,改变线缺陷结构可以改变弹性波传播方向。

对于非线性二维周期性结构,它可以表现出可调的波传输特性。因此非线性声子晶体也有一些特有的性质,例如存在高度稳定的局部解(孤立波和孤子^[15-16])以及能够根据波的强度(振幅)调谐波的速度和方向,这些特性被广泛的应用于声子(或光子)晶体材料中。Sreelatha和Joseph^[17]利用摄动法和连续近似法,发现在二维弱二次和立方刚度特性的非线性晶格中存在孤立波解。Babaoglu等^[18]

采用了长波长近似,研究了研究二维波在弱非线性和弱色散弹性固体中的传播,采用耦合改进的Kadomtsev-Petviashvili(KP)方程描述其结构中的横波。Duan等^[19]在连续非线性二维结构中,利用泰勒级数展开位移,获得了连续结构的谐波色散关系以及耦合KdV方程。文献^[20]提出了一种改进的Lindstedt-Poincare方法,得到的近似解不仅适用于弱非线性系统,也适用于强非线性系统。还有很多学者借用集中质量法和晶格动力学理论,将声子晶体中的连续系统问题离散化求解。Sigalas等^[21]对声子晶格中经典振动模态的物理学进行综述。Langley等^[22-23]使用弹簧质量和有限元模型研究了简单和复杂二维周期结构中的波传播,发现在不对称的线性刚度情况下会出现带隙,且带隙的频率范围取决于配置特性,并在复杂的二维周期性结构(如梁格架)中研究和验证了波的方向性现象。陈志远等^[24]基于晶格动力学理论推导了计及次近邻原子作用下二维单原子正方晶格振动的色散关系,得到第一布里渊区中3种特殊对称方向的色散关系表达式,发现每一对称方向仅有两支声学波。

本文探讨了弱非线性对行波的色散特性的影响。采用摄动法来预测离散二维非线性声子晶体中的色散关系、群速度相对振幅的依赖性。此外,考虑了各种典型二维结构与其各向异性结构布置。本文所提出的摄动分析方法类似于连续系统的L-P^[20]摄动法,同时它能应用于非线性的微分方程组,也适用于在无限域上研究波传播。本文分析了色散关系中与幅度相关的等频线、波的群速度等特性,分析结果表明在通带内的一定频率范围内,会出现与波幅相关的通带。此外非线性的引入带来了波方向性的可调。最后通过平面波激励下的有限二维点阵的数值模拟来验证上述结论。本文提出的控制方程是用刚度矩阵与质量矩阵来描述的,因此该方法适用于无限域内的离散系统和离散弱非线性动力学系统。

1 含非线性的晶格摄动分析

1.1 声子晶体晶格模型描述

类似于晶体中微观粒子的周期性排列,宏观介质的周期性也可以用晶体的周期性点阵几何来描述。若将晶体按比例放大,在晶体中周期排列微观粒子的地方置换一定几何形状的宏观介质,而除微观粒子之外空余的空间用其他宏观介质填充,就构成了与晶体周期性一致的宏观介质。连通一体的同种介质叫基体,不连通的同种介质叫散射体。

用散射体中任意一点代表散射体,这些点在空间中周期排列解构成了描述声子晶体的空间点阵。这些空间点阵就是晶格,其中的点叫作格点。若把散射体置于每个格点上,而其余空间用基体填充就得到了实际的声子晶体^[12]。

格点沿空间中 3 个方向分别按一定距离周期性平移就形成了晶格。3 个方向存在最小单位的平移距离。于是可以用 3 个矢量 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ 来代表 3 个单位平移,这 3 个矢量叫作基矢。任意选定一个格点作为坐标原点,晶格中所有格点的位置可以表述为

$$\mathbf{R}_n = n_1 \mathbf{a}_1 + n_2 \mathbf{a}_2 + n_3 \mathbf{a}_3 \quad (1)$$

式中: n_1, n_2, n_3 均为整数, \mathbf{R}_n 为格矢。

由基矢所构成的平行六面体是晶格的最小重复单元,成为原胞。每个原胞等效含有一个格点,原胞平行且无交叠的堆积在一起,就形成了晶格。本文将研究对称性高的二维简单正方晶格。

在定义基矢 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ 的基础上定义倒格子基矢 $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$, 须满足

$$\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{b}_j = 2\pi \delta_{ij} \quad (2)$$

式中 δ 为 Kronecker 符号。原来的晶格称为正格子,格矢称为正格矢。

因此, $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ 可以用正格子基矢表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_1 &= \frac{2\pi(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)}{\mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)} \\ \mathbf{b}_2 &= \frac{2\pi(\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1)}{\mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)} \\ \mathbf{b}_3 &= \frac{2\pi(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2)}{\mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)} \end{aligned} \quad (3)$$

对于二维情况,只需将未定义的正格子基矢取单位矢量 $\mathbf{a}_3 = \mathbf{e} = (0, 0, 1)$, 再进行求解。由倒格子基矢所确定的基矢空间称为原位置空间的倒易空间或对偶空间。倒格矢为

$$\mathbf{G}_h = h_1 \mathbf{b}_1 + h_2 \mathbf{b}_2 + h_3 \mathbf{b}_3 \quad (4)$$

而波矢空间与倒格空间处于统一空间,其基矢为 $\mathbf{b}_1/N_1, \mathbf{b}_2/N_2, \mathbf{b}_3/N_3$, 其中 N_1, N_2, N_3 分别是沿正格子基矢方向晶体晶胞的数目。所以波矢也可以表示为

$$\boldsymbol{\kappa} = \mu_1 \mathbf{b}_1 + \mu_2 \mathbf{b}_2 + \mu_3 \mathbf{b}_3 \quad (5)$$

1.2 二维声子晶体的动力学建模

本文将基于二维简单正方晶格的 Bravais 晶格。如图 1 是晶体结构的截面示意图。

图 1 中,每个点代表一个晶胞,每个晶胞可能不止含有一个格点。不失一般性的,假设每个晶胞含有 N 个格点。取其中一个晶胞为原点,则所有的晶胞位置都可以表示为

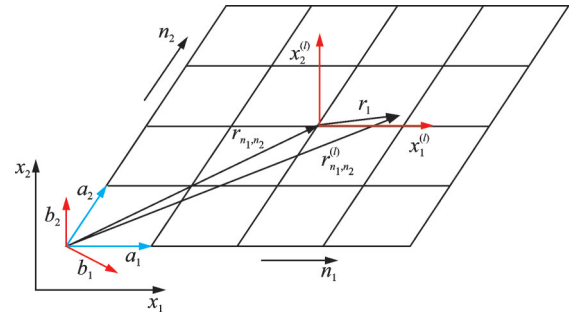


图 1 晶胞结构坐标位置

Fig.1 Coordinate system of lattice structure

$$\mathbf{r}_{n_1, n_2}^{(i)} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_{n_1, n_2} \quad (6)$$

$$\mathbf{r}_{n_1, n_2} = n_1 \mathbf{a}_1 + n_2 \mathbf{a}_2 \quad (7)$$

式中: $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ 为晶格平面两个方向的基矢; $\mathbf{r}_{n_1, n_2}^{(i)}$ 表示全局坐标系下的某单元的绝对位置; \mathbf{r}_0 表示在全局坐标系中位于原点的单元的绝对位置; \mathbf{r}_{n_1, n_2} 表示某单元与原点单元之间的相对位置。倒格子基矢可以表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_1 &= \frac{2\pi(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)}{\mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)} \\ \mathbf{b}_2 &= \frac{2\pi(\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1)}{\mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)} \end{aligned} \quad (8)$$

式中 $\mathbf{a}_3 = \mathbf{e} = (0, 0, 1)$ 。

波矢空间与倒格空间处于统一空间。所以波矢可以表示为

$$\boldsymbol{\kappa} = \mu_1 \mathbf{b}_1 + \mu_2 \mathbf{b}_2 \quad (9)$$

采用弹簧-质量块的模型来表述此二维正方声子晶体的结构组成。即,每个格点均为集中质量的质量块,格点与格点间的作用力以非线性弹簧表述。每个质量块只考虑 \mathbf{a}_3 方向的位移(即与晶格平面垂直的方向),连接格点间的弹簧沿 \mathbf{a}_1 或 \mathbf{a}_2 方向布置,且只提供 \mathbf{a}_3 方向的线性和非线性恢复力,即弹簧只有剪切方向的变形。

每个晶胞含有 N 个格点,即每个晶胞内包含 N 个质量块。设位于 (n_1, n_2) 处的晶胞位移表示为 $\mathbf{u}_{n_1, n_2} = [u_1, u_2, u_3, \dots, u_{N-1}, u_N]$, 每个晶胞的运动不仅与该晶胞内部质量块及弹簧的布置有关,也受相邻晶胞的位移影响,而这些位移之间的关系既有线性也有非线性的。如图 2 所示,位于 (n_1, n_2) 的晶胞有 8 个相邻晶胞,那么这个以 (n_1, n_2) 晶胞为中心的 9 个晶胞组成的系统的运动微分方程可以写作

$$\begin{aligned} \sum_{p, q = -1, 0, 1} \left[\mathbf{M}^{(p, q)} \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{u}_{n_1 + p, n_2 + q} + \mathbf{K}^{(p, q)} \mathbf{u}_{n_1 + p, n_2 + q} \right] + \\ \sum_{p, q = -1, 0, 1} \boldsymbol{\varepsilon} f_{NL}(\mathbf{u}_{n_1, n_2}, \mathbf{u}_{n_1 + p, n_2 + q}) = \mathbf{f}^{(n_1, n_2)}(t) \end{aligned} \quad (10)$$

式中: $f^{(n_1, n_2)}(t)$ 为施加在该晶胞单元上的外力; $M^{(p, q)}$ 与 $K^{(p, q)}$ 为该9晶胞系统运动微分方程的组集之后的质量矩阵与刚度矩阵, 在第2节中将详细描述如何在特定晶体结构中获得 $M^{(p, q)}$, $K^{(p, q)}$ 。 ϵf_{NL} 为相邻晶胞与中心晶胞之间的非线性的作用力, 由于考虑的是弱非线性问题, 所以使用一个一阶小量 ϵ 。为了排除量纲的影响, 记 $\tau = \omega t$ 。

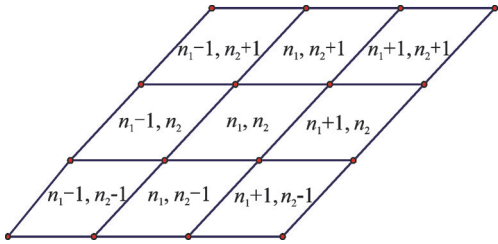


图2 二维9晶胞组成的系统示意图

Fig.2 Schematic of 2D 9-cell system

一般的, 对于同一个晶胞来说, 其组成的9晶胞系统的 $K^{(p, q)}$ 与晶胞内部刚度布置有关, 而 $M^{(p, q)}$ 是不随着相邻单元 (p, q) 变化而改变的, 所以记 $M^{(p, q)} = M$, 方程被简化为

$$\omega^2 M \frac{d^2 \mathbf{u}_{n_1, n_2}}{d\tau^2} + \left[\sum_{p, q = -1, 0, 1} K^{(p, q)} \mathbf{u}_{n_1 + p, n_2 + q} \right] + \sum_{p, q = -1, 0, 1} \epsilon f_{NL}(\mathbf{u}_{n_1, n_2}, \mathbf{u}_{n_1 + p, n_2 + q}) = f^{(n_1, n_2)}(\tau) \quad (11)$$

将 $\mathbf{u}_{n_1, n_2}, \omega$ 进行小参数展开

$$\mathbf{u}_{n_1, n_2} = \mathbf{u}_{n_1, n_2}^{(0)} + \epsilon \mathbf{u}_{n_1, n_2}^{(1)} + o(\epsilon^2) \quad (12)$$

$$\omega = \omega_0 + \epsilon \omega_1 + o(\epsilon^2) \quad (13)$$

将式(12), (13)代入式(11), 得

$$\epsilon^0: \omega_0^2 M \frac{d^2 \mathbf{u}_{n_1, n_2}^{(0)}}{d\tau^2} + \sum_{p, q = -1, 0, 1} K^{(p, q)} \mathbf{u}_{n_1 + p, n_2 + q}^{(0)} = f^{(n_1, n_2)}(\tau) \quad (14)$$

$$\epsilon^1: \omega_0^2 M \frac{d^2 \mathbf{u}_{n_1, n_2}^{(1)}}{d\tau^2} + \sum_{p, q = -1, 0, 1} K^{(p, q)} \mathbf{u}_{n_1 + p, n_2 + q}^{(1)} - \sum_{p, q = -1, 0, 1} f_{NL}(\mathbf{u}_{n_1, n_2}, \mathbf{u}_{n_1 + p, n_2 + q}) = -2\omega_0 \omega_1 M \frac{d^2 \mathbf{u}_{n_1, n_2}^{(0)}}{d\tau^2} \quad (15)$$

1.3 Bloch 波解

当晶体单元没有外力场时, 即 $f^{(n_1, n_2)}(\tau) = 0$; 平面波在二维离散介质的传播的解可以通过式(14), (15)得到, 对于 ϵ^0 方程解的形式为

$$\mathbf{u}_{n_1, n_2}(\tau) = \mathbf{u}_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_{n_1, n_2}} e^{i\tau} \quad (16)$$

式(16)代入式(14)得到式两边恒等, 这表明了布鲁赫定理可以适用于该离散周期结构, 同时由式(7)–(9)不难得到

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_{n_1, n_2} = \mu_1 n_1 + \mu_2 n_2 \quad (17)$$

所以式(16)可以简化为

$$\mathbf{u}_{n_1, n_2}(\tau) = \mathbf{u}_0 e^{i(\mu_1 n_1 + \mu_2 n_2)} e^{i\tau} \quad (18)$$

式(18)表明位于全局坐标系下的单元 (n_1, n_2) 的在波传播过程中的幅值与相位之间的关系, 所以对于 $(n_1 + p, n_2 + q)$ 的单元, 其幅值与相位之间的关系可以表示为

$$\mathbf{u}_{n_1 + p, n_2 + q}(\tau) = \mathbf{u}_0(\boldsymbol{\kappa}) e^{i(\mu_1(n_1 + p) + \mu_2(n_2 + q))} e^{i\tau} = \mathbf{u}_0(\boldsymbol{\kappa}) e^{i(\mu_1 p + \mu_2 q)} e^{i(\mu_1 n_1 + \mu_2 n_2)} e^{i\tau} = \mathbf{u}_{n_1, n_2} e^{i(\mu_1 p + \mu_2 q)} \quad (19)$$

式(19)表明, 单元的位移 \mathbf{u} 是二维波矢量 $\boldsymbol{\kappa} = \mu_1 \mathbf{b}_1 + \mu_2 \mathbf{b}_2$ 的周期函数, 比如当 $\boldsymbol{\kappa}' = \boldsymbol{\kappa} + 2\pi(m_1 \mathbf{b}_1 + m_2 \mathbf{b}_2)$, 其中 m_1, m_2 为一对实数, 因此研究弹性波在其中的传播特性只需研究一个晶胞单元的特性即可。在二维周期结构中, 由倒格子基矢确定的布里渊区, 若布里渊区中存在的任何对称区域都可以将布里渊区简化至不能缩减的子区域, 称为不可约布里渊区, 不可约布里渊区则是研究二维周期结构带隙特性的最小单元。

将式(18), (19)代入式(14)得到

$$\omega_0^2 M \frac{d^2 \mathbf{u}_{n_1, n_2}^{(0)}}{d\tau^2} + \left[\sum_{p, q = -1, 0, 1} K^{(p, q)} e^{i(\mu_1 p + \mu_2 q)} \right] \mathbf{u}_{n_1, n_2}^{(0)} = 0 \quad (20)$$

化简式(20)得到

$$\omega_0^2 M \frac{d^2 \mathbf{u}_{n_1, n_2}^{(0)}}{d\tau^2} +$$

$$\left[\sum_{p, q = -1, 0, 1} K^{(p, q)} e^{i(\mu_1 p + \mu_2 q)} \right] e^{i(\mu_1 n_1 + \mu_2 n_2)} \mathbf{u}_0(\boldsymbol{\kappa}) e^{i\tau} = 0 \quad (21)$$

$$[-\omega_0^2 M + \tilde{K}(\boldsymbol{\kappa})] \mathbf{u}_0(\boldsymbol{\kappa}) = 0 \quad (22)$$

式中

$$\tilde{K}(\boldsymbol{\kappa}) = \sum_{p, q = -1, 0, 1} K^{(p, q)} e^{i(\mu_1 p + \mu_2 q)} \quad (23)$$

$\tilde{K}(\boldsymbol{\kappa})$ 为根据 Bloch 定理化简后的刚度矩阵。事实上, 式(22)定义了一个特征值问题, 其特征值和特征向量为波矢的函数, 与 μ_1 与 μ_2 的取值有关, 当波矢沿着第一布里渊区的边界变化时, 就可以得到了此结构的频率与波矢的关系, 即能带图, 充分地代表了该结构的带隙特性。

$$\omega_{0, j} = \omega_{0, j}(\boldsymbol{\kappa}) \quad (24)$$

式(22)定义的特征值问题, 其特征值 $\omega_{0, j}$ 是波矢 $\boldsymbol{\kappa}$ 的函数, 其特征向量 $\mathbf{u}_{0, j}(\boldsymbol{\kappa})$ 也是波矢 $\boldsymbol{\kappa}$ 的函数, 与 μ_1 与 μ_2 的取值密切相关, 为了更好地研究其变化的趋势, 按照其向量中最大幅值归一化即

$$\max \{ u_{0, j}(\boldsymbol{\kappa}) \} = 1 \quad (25)$$

同时, 根据特征向量的正交性质, 不难得到化简后的式(21)

$$-\omega_{0, j}^2 \mathbf{u}_{0, i}^H(\boldsymbol{\kappa}) M \mathbf{u}_{0, j}(\boldsymbol{\kappa}) + \mathbf{u}_{0, i}^H(\boldsymbol{\kappa}) \tilde{K} \mathbf{u}_{0, j}(\boldsymbol{\kappa}) = 0 \quad (26)$$

若 $i=j$, 得

$$-\omega_{0,r}^2 m_r + k_r = 0 \quad (27)$$

式中

$$k_r = \mathbf{u}_{0,r}^H(\boldsymbol{\kappa}) \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{u}_{0,r}(\boldsymbol{\kappa}) \quad (28)$$

$$m_r = \mathbf{u}_{0,r}^H(\boldsymbol{\kappa}) \mathbf{M} \mathbf{u}_{0,r}(\boldsymbol{\kappa}) \quad (29)$$

1.4 一阶非线性修正

对于式(15)来说,式左边的形式跟式(14)基本相同,所以其解可以看作一个通解加特解的形式,所以非线性力带来的位移解的通解可以通过零阶线性方程的解形式进行假设,而零阶方程的解为

$$\mathbf{u}^{(0)}(\tau) = \frac{A_0}{2} \cdot \mathbf{u}_{0,j}(\boldsymbol{\kappa}) e^{i\tau} + \text{c.c} \quad (30)$$

式中:c.c表示复数共轭, A_0 为对应点出的幅值, $\mathbf{u}_{0,j}(\boldsymbol{\kappa})$ 为对应第 j 阶按照最大元素归一化后的列向量。为了不失一般性和形式统一简洁,假设所取单元的位置为 $n_1=0, n_2=0$,其单元内的位移 $\mathbf{u}_{0,0}^{(0)} = \mathbf{u}^{(0)}$ 。

根据式(26)解的形式,第一阶的微分方程可以改写为

$$\omega_{0,j}^2 \mathbf{M} \frac{d^2 \mathbf{u}^{(1)}}{d\tau^2} + \sum_{p,q=-1}^{+1} \mathbf{K}^{(p,q)} \mathbf{u}_{p,q}^{(1)} = \omega_{0,j} \omega A_0 \mathbf{M} \mathbf{u}_{0,j}(\boldsymbol{\kappa}) e^{i\tau} - f_{NL}(\mathbf{u}^{(0)}, \mathbf{u}_{\pm 1, \pm 1}^{(0)}(\tau)) \quad (31)$$

非线性力表达式为

$$f_{NL}(\mathbf{u}^{(0)}, \mathbf{u}_{\pm 1, \pm 1}^{(0)}(\tau)) = \sum_{p,q=-1}^{+1} f_{NL}(\mathbf{u}^{(0)}, \mathbf{u}_{p,q}^{(0)}) \quad (32)$$

不失一般性,假设二维单元相邻的晶胞单元之间都存在非线性力,并且不难得到周围单元的位移为

$$\mathbf{u}_{p,q}^{(0)}(\tau) = \frac{A_0}{2} \cdot \mathbf{u}_{0,j}(\boldsymbol{\kappa}) e^{i\mu_1 + q\mu_2} e^{i\tau} + \text{c.c} \quad (33)$$

并且不难得到, $\mathbf{u}_{p,q}^{(0)}(\tau)$ 与 $\mathbf{u}^{(0)}(\tau)$ 中的自变量 $\tau \in [0, 2\pi]$ 是周期为 2π 的周期函数

$$f_{NL}(\mathbf{u}^{(0)}(\tau), \mathbf{u}_{\pm 1, \pm 1}^{(0)}(\tau)) = f_{NL}(\mathbf{u}^{(0)}(\tau + 2\pi), \mathbf{u}_{\pm 1, \pm 1}^{(0)}(\tau + 2\pi)) \quad (34)$$

式中非线性力不仅跟 τ 有关,而且跟波幅密切相关,所以不妨假设

$$f_{NL} = f_{NL}(A_0, \tau) \quad (35)$$

下面对其进行傅里叶级数展开

$$f_{NL}(A_0, \tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(A_0) e^{in\tau} \quad (36)$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(A_0, \tau) e^{-in\phi} d\phi \quad (37)$$

对于确定的幅值 A_0 ,第 n 阶的傅里叶系数可以通过式(36)得到明确的解析解形式,方程(31)可以进一步简化为

$$\omega_{0,j}^2 \mathbf{M} \frac{d^2 \mathbf{u}^{(1)}}{d\tau^2} + \sum_{p,q=-1}^{+1} \mathbf{K}^{(p,q)} \mathbf{u}_{p,q}^{(1)} =$$

$$\omega_{0,j} \omega A_0 \mathbf{M} \mathbf{u}_{0,j}(\boldsymbol{\kappa}) e^{i\tau} - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(A_0) e^{in\tau} + \text{c.c} \quad (38)$$

观察后发现,式(38)的左边形式与零阶方程的形式统一,根据叠加定理的性质, $\mathbf{u}^{(1)}$ 的解形式是齐次通解与特解的叠加。注意到方程的右端会出现 $e^{i\tau}$ 的项,这一项会导致解出现 $t \sin \omega t$ 或 $t \cos \omega t$ 这样随着时间增大趋于无穷的项导致系统发散,为永年项,永年项必须被消除。不妨假设方程(38)的特解形式为

$$\mathbf{u}_{p,q}^{(1)}(\tau) = A_1 \mathbf{U}_0(\boldsymbol{\kappa}) e^{i\tau} e^{i(\mu_1 + q\mu_2)} + B_1 \mathbf{U}_0(\boldsymbol{\kappa}) e^{i\tau} e^{i(\mu_1 + q\mu_2)} + \text{c.c} \quad (39)$$

将其代入方程,化简计算得到消除永年项的条件为

$$\mathbf{u}_0^H(\boldsymbol{\kappa}) (\omega_{0,j} \omega A_0 \mathbf{M} \mathbf{u}_{0,j}(\boldsymbol{\kappa}) - c_1(A_0)) = 0 \quad (40)$$

式中, $\mathbf{U}_0(\boldsymbol{\kappa}) = [\mathbf{u}_{0,1}(\boldsymbol{\kappa}), \mathbf{u}_{0,2}(\boldsymbol{\kappa}), \mathbf{u}_{0,3}(\boldsymbol{\kappa}), \dots, \mathbf{u}_{0,N}(\boldsymbol{\kappa})]$,是零阶线性方程中得到的特征向量。

所以

$$\omega_{1,j} = \frac{\mathbf{u}_0^H(\boldsymbol{\kappa}) c_1(A_0)}{\omega_{0,j} A_0 \mathbf{u}_0^H(\boldsymbol{\kappa}) \mathbf{M} \mathbf{u}_{0,j}(\boldsymbol{\kappa})} \quad (41)$$

到此,得到了一阶展开后的一阶色散频率,对应的非线性色散频率为

$$\omega_j = \omega_{0,j} + \omega_{1,j} + o(\epsilon^2) \quad (42)$$

或者写为

$$\omega_j = \omega(A_0, \boldsymbol{\kappa}) \quad (43)$$

1.5 群速度

本文中的结构为二维非线性介质,波传播的特性不仅与介质的特性,各个方向材料的布置有关,还与外界扰动输入波的频率与幅值相关。这些因素不仅影响各个方向的传播速度,而且改变了波在介质中的传播的带隙特性。群速度的定义为频率的梯度。

$$c_g = \nabla \omega = \frac{\partial \omega(k)}{\partial k} \quad (44)$$

如前所述,二维正方晶格结构的色散关系可以表示为定义与指定的一对波矢量 μ_1, μ_2 相关联的频率函数,并相应地绘制等频散等高线,它可以有效地将群速度视作垂直于所考虑的频率等值线的矢量。这种方法在识别波传播的方向,或波完全不能传播的存在方向中,是行之有效的。

在本研究中描述的摄动方法中,与第 j 个色散分支相对应的群速度可以为

$$c_{g,j}(\boldsymbol{\kappa}, |A_0|) = \nabla \omega_{0,j}(\boldsymbol{\kappa}) + \nabla \omega_{1,j}(\boldsymbol{\kappa}, |A_0|) + o(\epsilon^2) \quad (45)$$

从式(45)可以看出,群速度对波动的波数和振

幅的依赖性。

2 单原子晶格色散分析

图3所示的二维非线性单原子晶格被模拟为由具有线性 and 三次系数的弹簧相互连接的等质量的阵列。图3中每一个质量块之间的刚度连接均为线性耦合三次非线性的弹簧。横向(平面外)位移是描述每个质量运动的单一自由度,因此弹簧被假定提供与相邻质量块的相对位移有关的剪切方向的作用力。代表单元的运动方程可以由式(10)简化,其中质量矩阵可简化为标量。

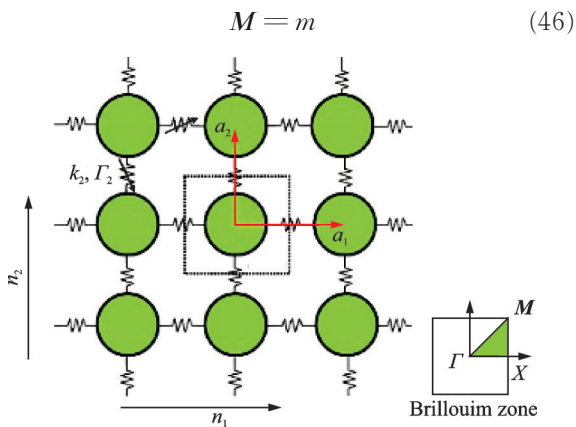


图3 二维非线性单原子正方晶格结构示意图

Fig.3 Two-dimensional nonlinear monoatomic lattice structure

线性的刚度矩阵可以用式(7)通过摄动方法获得

$$\begin{aligned} K_{p,q} &= 0; \forall p, q = \pm 1 \\ K_{p,q} &= -k_1; \forall p = \pm 1, q = 0 \\ K_{p,q} &= -k_2; \forall p = 0, q = \pm 1 \\ K_{0,0} &= 2(k_2 + k_1); p = q = 0 \end{aligned} \quad (47)$$

根据式(23)得

$$\tilde{K} = \sqrt{2k_1(1 - 2\cos\mu_1) + 2k_2(1 - 2\cos\mu_2)} \quad (48)$$

对于色散分析,综合式(45)和式(47)已经得到了 \tilde{K} 与 M 的具体形式,并且维度为一维,仅有一个色散分支,所以

$$\omega_0 = \sqrt{2\frac{k_1}{m}(1 - 2\cos\mu_1) + 2\frac{k_2}{m}(1 - 2\cos\mu_2)} \quad (49)$$

非线性力项

$$\begin{aligned} f_{NL} &= \sum_{p=\pm 1, q=0} \Gamma_1 (\mathbf{u}_{1,p,q} - \mathbf{u}_{1,0,0})^3 + \\ &\sum_{q=\pm 1, p=0} \Gamma_2 (\mathbf{u}_{1,p,q} - \mathbf{u}_{1,0,0})^3 \end{aligned} \quad (50)$$

根据式(35), (36)将非线性力项傅里叶展开得

$$c_1 = \frac{3}{4} |A_{0,1}|^3 \sum_{i=1,2} (\Gamma_i \cos(2\mu_i) - 4\Gamma_i \cos(\mu_i) + 3\Gamma_i) \quad (51)$$

式中线性方程特征向量归一化后: $u_1^{(0)}(\kappa) = 1$,所以一阶近似后的色散频率为

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_0 + \\ &\frac{3|A_0|^2 \sum_{i=1,2} (\Gamma_i \cos(2\mu_i) - 4\Gamma_i \cos(\mu_i) + 3\Gamma_i)}{4m\omega_0} + \\ &o(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (52)$$

所选取的单原子线性晶格参数为 $m = 1 \text{ kg}$, $k_1 = 1 \text{ N/m}$, $k_2 = 1 \text{ N/m}$ 。

波的频散取决于波幅 A_0 和各方向的非线性刚度 Γ_i 的大小。图3中的子图给出了单原子正方晶格的不可约布里渊区的示意图。根据布里渊区的性质,沿着不可约布里渊区的轮廓(从 Γ 沿着 b_1 轴到 X ,再从 X 沿着 b_2 轴到 M ,最终从点 M 沿着 45° 方向回到 Γ),即可得到单原子正方晶格结构的频散曲线图4。图5是在 $\Gamma_1 = -3 \text{ N}\cdot\text{m}^{-3}$, $\Gamma_2 = 0$ 阻抗配置下不同振幅的群速度等高线。

由图4,5不难得到,非线性刚度 Γ_i 和 A_0 波幅

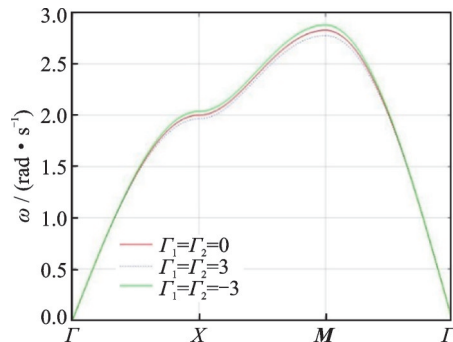


图4 二维单原子非线性网格频散曲线 ($m = 1 \text{ kg}$, $k_1 = 1 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$, $k_2 = 1.5 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$, $A_0 = 2$)

Fig.4 Dispersion of two-dimensional single atom nonlinear grid ($m = 1 \text{ kg}$, $k_1 = 1 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$, $k_2 = 1.5 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$, $A_0 = 2$)

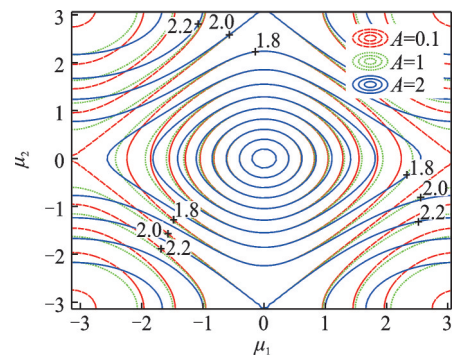


图5 二维单原子非线性网格群速度等高线 ($m = 1 \text{ kg}$, $k_1 = 1 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$, $k_2 = 1 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$, $\Gamma_1 = -3 \text{ N}\cdot\text{m}^{-3}$, $\Gamma_2 = 0$)

Fig.5 Group velocity contour of two-dimensional single atom nonlinear grid ($m = 1 \text{ kg}$, $k_1 = 1 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$, $k_2 = 1 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$, $\Gamma_1 = -3 \text{ N}\cdot\text{m}^{-3}$, $\Gamma_2 = 0$)

均可以定量的改变晶体的能带结构。并且,频散曲线的向上移动意味着对于给定的频率,波的群速度相应地增加,这在第一布里渊区的边缘(点 X 和 M)是特别显著的。由图 5 可以看出,幅度的增加导致沿着 μ_1 轴的频散等高线的拉伸,意味着波沿 μ_1 方向的衰减。改变阻抗配置,如若 $\Gamma_1 = 0, \Gamma_2 = -3 \text{ N} \cdot \text{m}^{-3}$, 则会在 μ_2 方向出现相似现象。

3 二维双原子正方晶格

3.1 二维双原子二自由度网格

本节研究二维双原子正方晶格结构,即一个原胞内含有两种不同的格点。由这两种格点组成的晶胞结构,根据其配置的不同分为双原子二自由度网格和双原子四自由度网格。

如图 6 所示的二维网格包含两个不同质量的质量块(m_1 与 m_2),每个质量均具有一个垂直于平面的自由度。图 6 中每一个质量块之间的刚度连接均为线性耦合三次非线性的弹簧。其晶胞单元由两个质量块组成,其单元的位移 $\mathbf{u} = [u_1, u_2]^T$, 如图 7 所示。推导得到频散的具体形式,并且维度为二维,仅有两个色散分支,所以

$$\omega_{0,1}^2 = \frac{1}{m_1 m_2} \{ (k_1 + k_2)(m_1 + m_2) - [2m_1 m_2 (k_1^2 \cos \mu_1 + (k_1 + k_2)^2 m_1^2 + (k_1 + k_2)^2 m_2^2 + 2k_1 k_2 (\cos(\mu_1 - \mu_2) + \cos \mu_2 - 1) + k_2^2 \cos(\mu_1 - 2\mu_2))]^{\frac{1}{2}} \} \quad (53)$$

$$\omega_{0,2}^2 = \frac{1}{m_1 m_2} \{ (k_1 + k_2)(m_1 + m_2) + [2m_1 m_2 (k_1^2 \cos \mu_1 + (k_1 + k_2)^2 m_1^2 + (k_1 + k_2)^2 m_2^2 + 2k_1 k_2 (\cos(\mu_1 - \mu_2) + \cos \mu_2 - 1) + k_2^2 \cos(\mu_1 - 2\mu_2))]^{\frac{1}{2}} \} \quad (54)$$

因为 ω_1 推导过程中涉及求多个二阶立方非线性项的二阶矩阵本征问题,所以不能得到一阶近似频散 ω_1 的解析解,只能得到数值解,其频散如图 8, 图 8 中显示得到了两条色散曲线,频率较高的一条

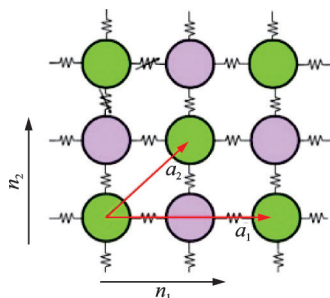


图 6 二维双原子网格

Fig.6 Two-dimensional diatomic lattice grid

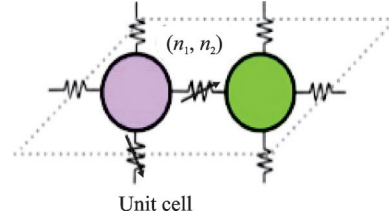


图 7 二维双原子二自由度网格单元

Fig.7 Two-dimensional diatomic two-Dof cell

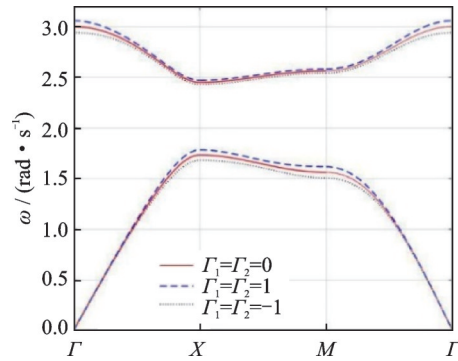


图 8 二维双原子非线性网格频散曲线 ($m_1 = 2 \text{ kg}, m_2 = 1 \text{ kg}, k_1 = 2 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}, k_2 = 1 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}, A_0 = 1$)

Fig.8 Dispersion of two-dimensional diatomic nonlinear grid ($m_1 = 2 \text{ kg}, m_2 = 1 \text{ kg}, k_1 = 2 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}, k_2 = 1 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}, A_0 = 1$)

曲线称之为光学分支,频率较低的一条曲线称之为声学分支,相应两个分支之间的间隙确定了波在任何方向上不传播的频率范围,即带隙。图 9 描述了所考虑的双原子晶格能带图和相关不可约布里渊区。该图是在相同的波幅下计算的,它说明了两个分支是如何由于非线性系数变化而移动的,非线性元件导致带隙偏移,进而导致带隙频率范围的变化。除此之外,也可利用幅值作为调整参数来控制给定的非线性周期网格的通带和带隙,从而阻止(或允许)弹性波在某个特定频率上传播。

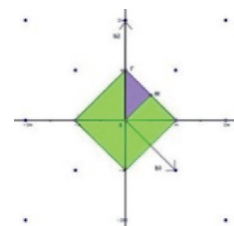


图 9 不可约布里渊区

Fig.9 Irreducible Brillouin zone

3.2 二维双原子四自由度网格

在图 10 中描绘了一个具有包含异质量的非线性晶格的示意图,图 10 中每一个质量块之间的刚度连接均为线性耦合三次非线性的弹簧。晶胞由 3 个相同的质量 m 和一个质量 m_i 组成,其中 $m_i \neq m, m_i$ 通常与其他质量不同,晶格结构如图 11 所示。图 12 描述了所考虑的二维双原子晶格能带

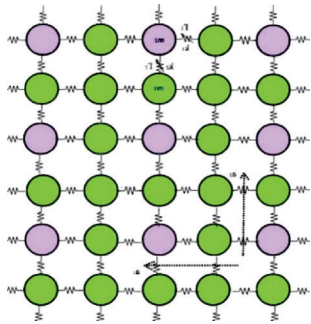


图10 二维双原子四自由度网格

Fig.10 Two-dimensional diatomic four-DOF grid

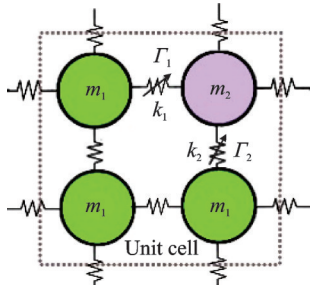


图11 二维双原子四自由度网格单元示意图

Fig.11 Two-dimensional diatomic four-DOF cell

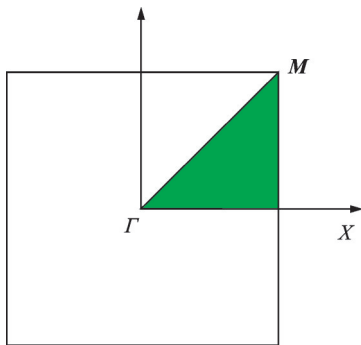


图12 二维双原子四自由度网格单元布里渊区示意图

Fig.12 Two-dimensional diatomic four-DOF cell Brillouin zone

图和相关不可约布里渊区。这样的质量 m_i 在网格中均匀包含。系统的动力学由4个自由度来描述,其中第一个自由度表示异质量的位移,其余分别表示其余 m 的位移。由于晶格的晶胞包含4个自由度,因此4个色散分支是可能的。这种情况说明该方法适用于更复杂的系统。

方程式中的系数根据波幅的大小和每个线性模态进行频散校正。因为其涉及多个立方项高阶矩阵的本征问题,所以得不到其具体的解析解,只能得到数值解,其色散关系如图13所示,这证实了先前对较简单的单原子以及双原子网格所产生的带隙频率范围的变化趋势具有相似的分支。图13的结果也说明了刚度渐硬使晶格向上移动能带结构的方式,而刚度渐软使晶格向下移动色散曲线,两个移动的幅度随着幅度的增加而增加。

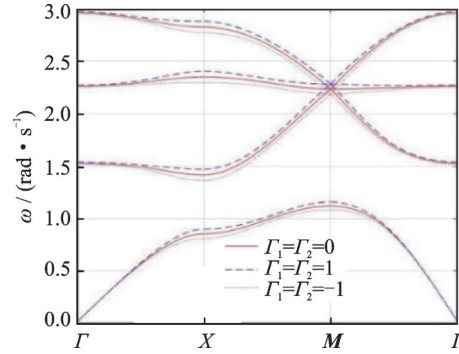


图13 二维双原子四自由度非线性网格频散曲线($m_1 = 2 \text{ kg}, m_2 = 1 \text{ kg}, k_1 = 2 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}, k_2 = 1 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}, A_0 = 1$)

Fig.13 Dispersion of two-dimensional diatomic four-DOF nonlinear grid ($m_1 = 2 \text{ kg}, m_2 = 1 \text{ kg}, k_1 = 2 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}, k_2 = 1 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}, A_0 = 1$)

4 数值验证分析

在本节中,将使用单原子非线性网格的数值积分模型计算的响应并进行比较来验证摄动法预测的色散关系。模型外激励被设计为在指定方向上注入平面波,以估计传播方向和幅度方面的波数变化。外界扰动激励通过在有限单原子网格的一个边上施加分布式激励来实现的。

通过对从有限网格得到的运动方程进行数值积分来验证上述幅度相关波的色散特性。所选择的配置考虑了单原子网格的单元格。所得组件的运动方程的数值积分使用MATLAB中可用的龙格-库塔方案进行。晶格在所有边缘都是自由的,并通过沿着底部水平边缘施加到质量块的谐波运动而激发。施加的位移可以表示为

$$u(r_{n_1,0}, t) = A_0 e^{-i\omega t} e^{i\kappa_0(r_{n_1,0})} = A_0 e^{-i\omega t} e^{i\mu_1 \mu_1} \quad (55)$$

$$\kappa_0 = \mu_{1,0} b_1 + \mu_{2,0} b_2$$

式中: A_0 为入射的平面波的幅值; ω 为入射平面波的频率;对于单原子非线性网格, $a_1 = b_1 = i_1 = (1, 0), a_2 = b_2 = i_2 = (0, 1)$; $\mu_{1,0}$ 为入射的平面波沿着 b_1 方向变化的波数; $\mu_{2,0}$ 为入射的平面波沿着 b_2 方向变化的波数。质量块之间的间距为1,质量块网格为 120×120 ;所施加的位移分布可以被认为是平面波的结果,以角度 α 入射到网格的底部边缘,如图14所示。

入射波的波数可表示为

$$\kappa_0 = \mu_0 (\cos \alpha \cdot b_1 + \cos \beta \cdot b_2) \quad (56)$$

即 $\mu_{1,0} = \mu_0 \cos \alpha$, 也意味着网格的底部边缘上的每个质量由等幅度的位移和相位的外激励激励,其大小取决于波的波数和入射角的关系。

针对不同的输入频率和波数,进行数值仿真以

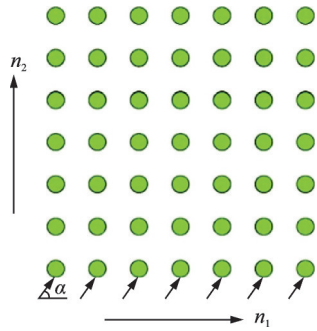


图 14 入射波与 n_1 轴成 α 角入射时的示意图
Fig.14 Incident wave with an angle α to axis n_1

验证由式(52)确定的输入谐波频率对应的等频散频率等高线(图4)。目标是验证根据 n_1 方向的波数 μ_1 估计方向 n_2 的波数 μ_2 , 即 μ_1, μ_2 在其相应的等频率等值线所定义的范围内变化。如上所述, 对有限格的运动方程进行数值积分, 得到系统各点位移关于时间的响应。一般来说, 晶格响应可以表示为

$$u(n_1, n_2, t) = u(t - \kappa_0 \cdot r_{n_1, n_2}) \quad (57)$$

对式(57)进行傅里叶变换, 得

$$U(n_1, n_2, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t - \kappa_0 \cdot r_{n_1, n_2}) e^{-i\omega t} dt \quad (58)$$

$$U(n_1, n_2, \omega) = U(\omega) e^{-i\kappa_0 \cdot r_{n_1, n_2}} = U(\omega) e^{-i(\mu_1 n_{1,0} + \mu_{2,0} n_2)} \quad (59)$$

特别地, u 在 $\omega = \omega_0$ 处傅里叶变换的值的相位, 即

$$\text{phase}(U(n_1, n_2, \omega_0)) = \mu_{1,0} n_1 + \mu_{2,0} n_2 \quad (60)$$

从在 $\omega = \omega_0$ 处计算的响应的相位, 可以通过评估沿着给定方向对齐的质量相对相位来估计波数分量。假设外激励设定为施加波数 $\mu_{1,0}$, 可以根据 x_2 方向上的响应的相位变化来估计波数 $\mu_{2,0}$ 。

通过在一个方向上布置与入射波相似的外激励的方法来模拟平面波入射, 从而分析非线性对频散等高线的影响。这些研究的结果如图 15 所示,

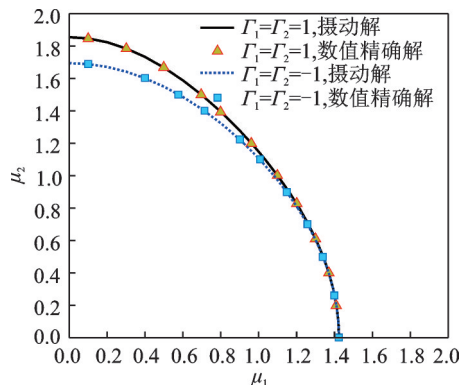


图 15 摄动解对比数值解 ($\omega = 1.6 \text{ rad/s}, m = 1 \text{ kg}, k_1 = 1 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}, k_2 = 1.5 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$)
Fig.15 Comparison of perturbation solution and numerical solution ($\omega = 1.6 \text{ rad/s}, m = 1 \text{ kg}, k_1 = 1 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}, k_2 = 1.5 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$)

它描述了参数为 $m = 1 \text{ kg}, k_1 = 1 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}, k_2 = 1.5 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ 和 $\Gamma_1 = -1 \text{ N} \cdot \text{m}^{-3}, \Gamma_2 = 1 \text{ N} \cdot \text{m}^{-3}$, 外激励频率 $\omega_0 = 1.6 \text{ rad/s}$ 的单原子网格结构 (120×120) 的频散等高线。其中点表示数值估计的波数, 而连续线对应于来自摄动法的色散分析的预测。对于所考虑的非线性网格和入射波, 摄动分析预测结果和数值结果之间表现了极好一致性。图 16 显示了在 $\omega_0 = 2.1 \text{ rad/s}$ 时平面波入射的结果, 并且说明随着幅度的增加出现凋落波。这是由于波在“特定方向”显著衰减的事实, 而凋落波行为不能用式(59)描述, 因此并不能得到较好的匹配。

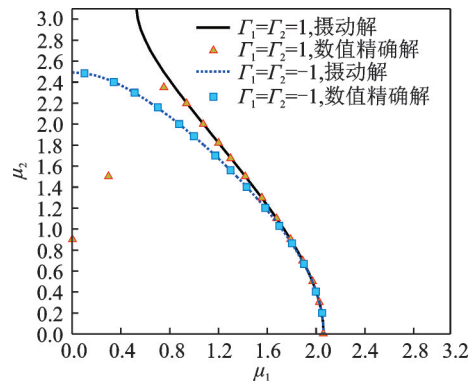


图 16 摄动解对比数值解 ($\omega = 2.1 \text{ rad/s}, m = 1 \text{ kg}, k_1 = 1 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}, k_2 = 1.5 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$)
Fig.16 Comparison of perturbation solution and numerical solution ($\omega = 2.1 \text{ rad/s}, m = 1 \text{ kg}, k_1 = 1 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}, k_2 = 1.5 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$)

5 结 论

本文采用简单正方晶格模型, 并以二维质量块-非线性线性耦合弹簧网格结构为例, 分别分析二维单原子非线性网格, 二维双原子网格, 二维双原子四自由度网格。首先处理二维单原子网格时, 由于单元结构形式简单; 直接得到了其一阶近似的频散解析解, 其色散关系显示其频散不仅与结构的阻抗配置、非线性系数有关, 并且与输入谐波的波幅相关, 接着分别说明了不同方向的非线性系数对其色散关系及群速度的影响, 这间接说明了可以定向调整波幅和非线性刚度, 为二维非线性声子晶体带隙可调提供一种解决方案。值得一提的是, 各向同性线性刚度和各向异性非线性刚度的晶格可以表现出与波幅相关的波方向性传播。之后分别用该一阶近似摄动法分析了二维双原子网格, 二维双原子四自由度网格, 分别得到非线性引入后的色散曲线和带隙。最后用数值仿真结果对照了摄动分析结果, 得到了所考虑的有限幅度的弹性波分析和数值结果之间的极好一致性。

参考文献:

- [1] RUZZENE M, TSOPELAS P. Control of wave propagation in sandwich plate rows with periodic honeycomb core[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 2003, 129(9): 975-986.
- [2] PHANI A S, WOODHOUSE J, FLECK N A. Wave propagation in two-dimensional periodic lattices[J]. *Journal of the Acoustical Society of America*, 2006, 119(4): 1995-2005.
- [3] SCARPA F L, RUZZENE M, SORANNA F. Wave beaming effects in two-dimensional cellular structures[C]//*Proceedings of Smart Structures and Materials Damping and Isolation*. [S.l.]: International Society for Optics and Photonics, 2002: 63-77.
- [4] CHEN M, XU W, LIU Y, et al. Band gap and double-negative properties of a star-structured sonic metamaterial[J]. *Applied Acoustics*, 2018, 139: 235-242.
- [5] HUSSEIN M I. Theory of damped Bloch waves in elastic media[J]. *Physical Review B*, 2009, 80(21): 308-310.
- [6] HUSSEIN M I, FRAZIER M J. Band structure of phononic crystals with general damping[J]. *Journal of Applied Physics*, 2010, 108(9): 2022.
- [7] 郁殿龙. 基于声子晶体理论的梁板类周期结构振动带隙特性研究[D]. 长沙: 国防科学技术大学, 2006.
YU Dianlong. Study on vibration band gap of periodic structure as beam-plate by phononic crystal theory[D]. Changsha: National University of Defense Technology, 2006.
- [8] BERTOLDI K, BOYCE M C. Mechanically triggered transformations of phononic band gaps in periodic elastomeric structures[J]. *Physical Review B*, 2008, 77(5): 439-446.
- [9] HE Y, WU F, YAO Y, et al. Effect of defect configuration on the localization of phonons in two-dimensional phononic crystals[J]. *Physics Letters A*, 2013, 377(12): 889-894.
- [10] CHENG Y, LIU X J, WU D J. Temperature effects on the band gaps of Lamb waves in a one-dimensional phononic crystal plate[J]. *Acoustical Society of America Journal*, 2011, 129(3): 1157-1160.
- [11] KISHIMOTO K. Tuning of band gaps for a two-dimensional piezoelectric phononic crystal with a rectangular lattice[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2009, 25(1): 65-71.
- [12] TANG H W, CHOU W D, CHEN L W. Wave propagation in the polymer-filled star shaped honeycomb periodic structure[J]. *Applied Physics A*, 2017, 123(8): 523.
- [13] WANG Y Z, WANG Y S. Active control of elastic wave propagation in nonlinear phononic crystals consisting of diatomic lattice chain[J]. *Wave Motion*, 2018, 78: 1-8.
- [14] 江卫锋, 殷鸣, 殷国富, 等. 固/固型二维正方晶格声子晶体缺陷态研究[J]. *应用声学*, 2016, 35(5): 410-416.
WANG Weifeng, YIN Ming, YIN Guofu, et al. Investigation of defect modes for two-dimensional solid/solid phononic crystals with square lattice[J]. *Journal of Applied Acoustics*, 2016, 35(5): 410-416.
- [15] LANGLEY R S. The response of two-dimensional periodic structures to point harmonic forcing[J]. *Journal of Sound & Vibration*, 1996, 197(4): 447-469.
- [16] PANKOV A. Travelling waves and periodic oscillations in fermi-pasta-ulam lattices[M]. UK: Imperial College Press, 2005.
- [17] SREELATHA K S, JOSEPH K B. Wave propagation through a 2D lattice[J]. *Chaos Solitons & Fractals*, 2000, 11(5): 711-719.
- [18] BABA OGLU C, ERBAY S. Two-dimensional wave propagation in a generalized elastic solid[J]. *Chaos Solitons & Fractals*, 2001, 12(2): 381-389.
- [19] DUAN W S, SHI Y R, ZHANG L, et al. Coupled nonlinear waves in two-dimensional lattice[J]. *Chaos Solitons & Fractals*, 2005, 23(3): 957-962.
- [20] HUAN Heji. Modified lindstedt-poincare methods for some strongly non-linear oscillations—Part I: Expansion of a constant[J]. *International Journal of Non-linear Mechanics*, 2002, 37(2): 309-314.
- [21] SIGALAS M, KUSHWAHA M S, ECONOMOU E N, et al. Classical vibrational modes in phononic lattices: Theory and experiment[J]. *Zeitschrift für Kristallographie*, 2005, 220(9/10): 765-809.
- [22] LANGLEY R S. The response of two-dimensional periodic structures to point harmonic forcing[J]. *Journal of Sound & Vibration*, 1996, 197(4): 447-469.
- [23] LANGLEY R S, BARDELL N S, RUIVO H M. The response of two-dimensional periodic structures to harmonic point loading: A theoretical and experimental study of a beam grillage[J]. *Journal of Sound & Vibration*, 1997, 207(4): 521-535.
- [24] 陈志远, 吴涛, 张全坤, 等. 二维双原子正方晶格振动的色散关系[J]. *河南科学*, 2014, 32(2): 153-162.
CHEN Zhiyuan, WU Tao, ZHANG Quankun, et al. Dispersion relations of two-dimensional diatomic square lattice vibration[J]. *Henan Science*, 2014, 32(2): 153-162.