

DOI:10.16356/j.1005-2615.2020.06.005

变体辅助的无人机栖落机动模糊控制设计

岳 理, 何 真, 王无天

(南京航空航天大学自动化学院, 南京, 211106)

摘要: 无人机(Unmanned aerial vehicle, UAV)的栖落机动是一种大幅度的俯仰运动,易引起升降舵操纵力矩饱和。本文以变体方式增强无人机的俯仰操纵能力,并研究其对应的控制设计方法。首先对栖落机动建立了纵向动力学模型,并通过采用轨迹线性化和张量积变换方法转换得到T-S模糊模型。基于Lyapunov稳定理论和平方和方法,设计了满足控制输入约束的栖落机动多项式模糊控制器。对非变体与变体下的栖落机动控制过程进行了仿真,结果验证了控制律的有效性,并且表明变体辅助的无人机具有更强的操纵性能,能提高栖落机动中升降舵的抗饱和能力。

关键词: 栖落机动;变体飞行器;T-S模糊模型;平方和;飞行控制

中图分类号: V249 **文献标志码:** A **文章编号:** 1005-2615(2020)06-0871-10

Fuzzy Control Design for Perching Maneuvers of Morphing UAVs

YUE Cheng, HE Zhen, WANG Wutian

(College of Automation Engineering, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing, 211106, China)

Abstract: A perching maneuver is a kind of fierce pitching. An unmanned aerial vehicle (UAV) may probably be caught in saturation of the control moment of its elevators during such a process. A morphing mechanism is introduced to strengthen the capability of pitching control, and its corresponding controllers is discussed. Dynamic models of the longitudinal motion are generated at the beginning, and then T-S fuzzy models are obtained by trajectory linearization and tensor product transformation. According to Lyapunov stability theory and sum-of-square approach, polynomial fuzzy controllers meeting the constraints of control inputs are designed. After that, simulations of perching tasks are launched for both the rigid UAV and the morphing one. The results of simulations demonstrate that the morphing UAV has got its edge in maneuverability over the rigid one, and is more capable of suppressing the saturation of elevators.

Key words: perching maneuver; morphing aircraft; T-S fuzzy model; sum of squares; flight control

在栖落机动过程中,无人机拉大迎角增大阻力进行减速,最终以较低的动能降落在预定地点^[1-4]。在此过程中,无人机的速度与姿态发生剧烈变化,导致其空气动力学特性具有高度非线性特点。栖落机动需要对末端的飞行姿态和落点位置进行准确地控制,以实现安全降落的目的,但是传统固定翼无人机在大迎角状态下气动效率急剧降低,对操纵十分不利。随着新材料和控制技术的探索,变

体无人机应运而生^[4]。拥有一定变形能力的无人机可以改变其固有的气动特性,起到辅助操纵的效果。在栖落机动过程中,变体无人机凭借变体能力可以获得额外的操纵能力,在更小的空间内实现栖落过程^[5]。在实际应用中,由于存在预先设定的轨迹库,故无人机的栖落过程表现为轨迹跟踪运动,跟踪过程中的姿态偏差与位置偏差将作为输入,交由控制器处理。在处理轨迹跟踪问题时,通常先对

基金项目: 国家自然科学基金(61873126)资助项目。

收稿日期: 2020-05-12; **修订日期:** 2020-11-01

通信作者: 何真,女,副教授, E-mail:hezhen@nuaa.edu.cn。

引用格式: 岳理,何真,王无天. 变体辅助的无人机栖落机动模糊控制设计[J]. 南京航空航天大学学报, 2020, 52(6):871-880. YUE Cheng, HE Zhen, WANG Wutian. Fuzzy control design for perching maneuvers of morphing UAVs[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2020, 52(6):871-880.

非线性模型进行轨迹线性化,使其转换为线性变参数模型^[6-7],再经过张量积模型转换^[7-9],得到便于分析的T-S模糊模型。通过设计控制器,可实现对无人机的姿态精准控制,达到减速和控制落点的目的。本文根据Lyapunov稳定性判据与并行分布补偿原则,以Takagi-Sugeno模糊模型为参照,设计了多项式模糊控制器^[10],使无人机以合适的控制量实现预定轨迹的跟踪。本文将变体辅助方案与非变体方案进行了对比,分析了变体结构对操纵性能的影响。

1 变体辅助栖落机动建模

1.1 空气动力学系数

固定翼无人机的纵向运动方程见文献[3]。无人机的姿态变量表示为 $\mathbf{X}_a = [V, \theta, \alpha, q]^T$,控制输入量为 $\mathbf{u} = [T, \delta_e]^T$ 。其中 V 为无人机的速度, θ 为俯仰角, α 为迎角, q 为俯仰角速率, T 为推力, δ_e 为升降舵偏角。无人机使用了全动平尾,以保证在低速飞行时输出更大的力矩,则无人机的升力、阻力和俯仰力矩系数可由以下方程表示^[6]

$$\begin{cases} C_L = 0.8 \sin 2\alpha \\ C_D = 1.4 \sin^2 \alpha + 0.1 \end{cases} \quad (1)$$

$$C_M = -\frac{S_e l_e}{S} [0.8 \cos \alpha \sin(2\alpha + 2\delta_e) + 1.4 \sin \alpha \sin^2(\alpha + \delta_e) + 0.1 \sin \alpha] \quad (2)$$

式中: S_e 为无人机升降舵的气动面积; l_e 为升降舵空气动力中心到无人机质心的距离; S 为无人机机翼面积。

1.2 纵向动力学模型

无人机的纵向动力学方程可表示为

$$\dot{\mathbf{X}}_a = \mathbf{g}_a(\mathbf{X}_a, \mathbf{u}) \quad (3)$$

$$\dot{x} = V \cos(\theta - \alpha), \dot{h} = V \sin(\theta - \alpha) \quad (4)$$

式中: $\mathbf{g}_a(\bullet)$ 为无人机姿态变量的导数关于当前姿态与控制输入的函数表达式, x 与 h 为无人机的位移变量。为了方便模型分析与控制器设计,将姿态与位置共同定义为该纵向动力学模型的状态变量,即 $\mathbf{X} = [V, \theta, \alpha, q, x, h]^T$,该模型可表示为

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{f}(\mathbf{X}, \mathbf{u}) \quad (5)$$

式中 $\mathbf{f}(\bullet)$ 为状态变量导数的非线性函数表达式。

参考轨迹的状态变量与控制输入量皆为已知,该轨迹可表示为与时间对应的 $(\mathbf{X}_s, \mathbf{u}_s)$ 的集合,其中 $\mathbf{X}_s = [V_s, \theta_s, \alpha_s, q_s, x_s, h_s]^T$, $\mathbf{u}_s = [T_s, \delta_{es}]^T$,且满足纵向动力学方程

$$\dot{\mathbf{X}}_s = \mathbf{f}(\mathbf{X}_s, \mathbf{u}_s) \quad (6)$$

将参考轨迹作为控制器的参考输入,非线性系统的控制问题可转化为轨迹跟踪问题。

将非线性动力学方程式(5)沿参考轨迹 $(\mathbf{X}_s, \mathbf{u}_s)$ 进行线性化,可得

$$\dot{\mathbf{X}} - \dot{\mathbf{X}}_s = \mathbf{f}(\mathbf{X}, \mathbf{u}) - \mathbf{f}(\mathbf{X}_s, \mathbf{u}_s) \quad (7)$$

令 $\Delta \dot{\mathbf{X}} = \dot{\mathbf{X}} - \dot{\mathbf{X}}_s$, $\Delta \mathbf{u} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_s$,则式(7)可改写成增量形式

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\mathbf{X}} &= \mathbf{f}(\Delta \mathbf{X} + \mathbf{X}_s, \Delta \mathbf{u} + \mathbf{u}_s) - \mathbf{f}(\mathbf{X}_s, \mathbf{u}_s) = \\ & \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \Delta \mathbf{X}} \Big|_{\substack{\Delta \mathbf{X}=0 \\ \Delta \mathbf{u}=0}} \Delta \mathbf{X} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \Delta \mathbf{u}} \Big|_{\substack{\Delta \mathbf{X}=0 \\ \Delta \mathbf{u}=0}} \Delta \mathbf{u} + \\ & \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial \Delta \mathbf{X}^2} \Big|_{\substack{\Delta \mathbf{X}=0 \\ \Delta \mathbf{u}=0}} \Delta \mathbf{X}^2 + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial \Delta \mathbf{u}^2} \Big|_{\substack{\Delta \mathbf{X}=0 \\ \Delta \mathbf{u}=0}} \Delta \mathbf{u}^2 + \\ & \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial \Delta \mathbf{X} \partial \Delta \mathbf{u}} \Big|_{\substack{\Delta \mathbf{X}=0 \\ \Delta \mathbf{u}=0}} \Delta \mathbf{X} \Delta \mathbf{u} + \dots = \\ & \mathbf{A}(\mathbf{X}_s, \Delta \mathbf{X}, t) \Delta \mathbf{X} + \mathbf{B}(\mathbf{u}_s, \Delta \mathbf{u}, t) \Delta \mathbf{u} \end{aligned} \quad (8)$$

忽略式(8)中的高阶导数,只保留线性部分,由此得到的 $\mathbf{A}(t)$ 与 $\mathbf{B}(t)$ 为随时间变化的参数矩阵, $\Delta \dot{\mathbf{X}} = [\mathbf{A}(t) \quad \mathbf{B}(t)] [\Delta \mathbf{X}^T \quad \Delta \mathbf{u}^T]^T$ 为线性变参数(Linear parameter varying, LPV)模型^[7]。

1.3 模糊模型建立

T-S模糊模型通过模糊规则,以多个线性模型组合的方式描述非线性模型^[11-12],非常适于非线性模型的分析 and 相应控制器的设计。模糊规则 i 为

若 $z_1(t)$ 属于集合 M_1^i 且 $z_2(t)$ 属于集合 M_2^i 且 $z_p(t)$ 属于集合 M_p^i ,则

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = [\mathbf{A}_i \quad \mathbf{B}_i] \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{u}(t) \end{bmatrix} \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (9)$$

式中: $z_j(t)$ ($j = 1, 2, \dots, p$)为前件变量; M_j^i 为第 i 个规则的第 j 个前件变量的模糊集合。T-S模糊模型可表示为

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) [\mathbf{A}_i \quad \mathbf{B}_i] \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{u}(t) \end{bmatrix} \quad (10)$$

式中: $z(t) = [z_1(t), \dots, z_p(t)]$; $h_i(z(t))$ 为隶属度函数且满足以下条件

$$h_i(z(t)) \in [0, 1] \quad \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) = 1 \quad (11)$$

由于式(8)中 $\mathbf{A}(\mathbf{X}_s, \Delta \mathbf{X}, t)$ 与 $\mathbf{B}(\mathbf{u}_s, \Delta \mathbf{u}, t)$ 中元素大多为关于参考轨迹的多项式,既不是常数,也非LPV模型的状态变量 $\Delta \mathbf{X}$ 的多项式。将式(8)表示为张量积形式为

$$\Delta \dot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \Delta \mathbf{X}} & \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \Delta \mathbf{u}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{X} \\ \Delta \mathbf{u} \end{bmatrix} \quad (12)$$

根据模糊原理,选取时间 t 为前件变量,以轨迹跟踪的时域跨度为变换空间,将变换空间离散化成有限个网格,使用MATLAB中的张量积工具箱进行张量积模型变换,得到张量积模型,其权重函数 w_i 即为对应的线性时不变顶点系统的隶属度函

数 $h_i^{[8]}$ 。将式(12)进行张量积变换,得到多胞体的张量积模型可表示为

$$\Delta \dot{X} = \sum_{i=1}^r \omega_i [A_i \quad B_i] \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta u \end{bmatrix} \quad (13)$$

1.4 变体辅助方案设计与建模

变体无人机是可以在飞行过程中主动改变自身形状的无人机^[4,13],随着执行机构和智能材料的发展,无人机的变体方案日渐多样化。常见的变体方案有变翼展^[14]、变弯度^[14]、变前/后掠翼^[13,15]、旋转吊杆^[16]以及移动主翼^[5]等,这些变体部件能够改变无人机的升阻比、气动焦点等物理性质。在本文所用的参考轨迹中,为了实现迅速拉大迎角再减小迎角的栖落动作,升降舵的摆动幅度很大。由于升降舵的偏转角度有限,当存在扰动时,控制器的修正作用可能导致升降舵饱和,饱和特性的存在可能埋下控制发散的隐患。为了提高升降舵的俯仰操纵效率,在快速俯仰时减小升降舵饱和的风险。本文采取变体方式为伸缩尾翼吊杆,通过吊杆的伸缩,固定翼无人机的尾翼与质心的距离发生改变,升降舵的操纵力臂也随之发生改变。当吊杆伸长时,升降舵产生的俯仰力矩随之增大,有利于提高无人机在输出大俯仰力矩时的操控能力。

由于采用了伸缩吊杆的变体方式,无人机的尾翼在飞行过程可自主移动位置,升降舵气动中心到无人机质心的距离 l_e 是可变的。尾翼的质量远小于机身和主翼,因此忽略 l_e 变化造成的无人机质心位置变化。为了方便与 l_e 固定的情形进行对比,假设 l_e 可变情形中参考曲线的状态变量 $X_s = [V_s, \theta_s, \alpha_s, q_s, x_s, h_s]^T$ 和推力 T_s 与 l_e 固定时保持一致,即两种不同特性的无人机模型需在相同的时间内执行相同的任务。根据式(1),上述变体策略不会影响无人机的升力与阻力系数;根据式(2)的俯仰力矩系数表达式,当输出同样的俯仰力矩时,升降舵偏角会因 l_e 的变化而改变。因此, l_e 固定与 l_e 可变情形的参考轨迹的差别仅在于,由于 l_e 不同导致二者的参考升降舵偏转角不同。分别对二者建立式(5)形式的非线性模型。在针对参考轨迹进行线性化时, l_e 可变情形与 l_e 固定时的LPV模型都具有式(8)的形式,但矩阵 $A(t)$ 与 $B(t)$ 具有不同的表达式。

将 l_e 固定与 l_e 可变的LPV模型分别根据T-S模糊建模原理进行张量积变换,选取相同的顶点数目,得到式(13)形式的T-S模糊模型,二者的模型具有相等的子模型数目。

2 栖落机动轨迹跟踪控制

2.1 并行分布补偿原理

与T-S模糊建模方法对应的是并行分布补偿控制原理^[11],该原理要求对模糊模型的每一个局部线性部分设计一个状态反馈控制器,通过模糊规则将各个控制器组合成全局控制器。T-S模糊模型式(10)对应控制器结构为

$$u(t) = - \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) F_i x(t) \quad (14)$$

式中 F_i 为第 i 个线性部分对应的控制器增益。

2.2 多项式模糊控制器设计

多项式模糊控制器与T-S模糊模型的控制器的区别在于,多项式模糊控制器矩阵 $F_i(x(t))$ 的内部元素为关于状态变量的多项式,列向量 $\hat{x}(x(t))$ 内部元素为 $x(t)$ 的单项式,即

$$u(t) = - \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) F_i(x(t)) \hat{x}(x(t)) \quad (15)$$

当 $F_i(x(t))$ 内部元素为零阶多项式时,式(15)退化为式(14)^[10]。由此可见,多项式模糊控制器在形式上包含了T-S控制器,是更广泛的表达方式,因而具有更低的保守性。将式(15)代入栖落机动T-S模糊模型式(10)得闭环系统,即

$$\dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) \{ A_i(x(t)) - B_i(x(t)) F_j(x(t)) \} \hat{x}(x(t)) \quad (16)$$

多项式模糊控制器的设计问题可以转化为平方和(Sum of squares, SOS)不等式条件求解问题。SOS求解不等式的原理基于多项式的平方和分解。

定义1^[10] 对一个多项式 $f(x(t)), x(t) \in \mathbf{R}^n$,若存在多项式 $f_1(x(t)), f_2(x(t)), \dots, f_m(x(t))$ 使得等式 $f(x(t)) = \sum_{i=1}^m f_i^2(x(t))$ 成立,则称 $f(x(t))$ 为一个SOS多项式。

显然,若 $f(x(t))$ 为SOS多项式,则对于所有 $x(t) \in \mathbf{R}^n, f(x(t)) > 0$ 天然成立。因此可得以下推论^[10]:

$f(x(t))$ 为关于 $x(t) \in \mathbf{R}^n$ 的 $2d$ 阶多项式, $\hat{x}(x(t))$ 为列向量且其内部元素为阶数不超过 d 的 $x(t)$ 的单项式。当且仅当存在半正定矩阵 P 使得

$$f(x(t)) = \hat{x}^T(x(t)) P \hat{x}(x(t)) \quad (17)$$

成立时, $f(x(t))$ 为SOS多项式。

应当注意的是,虽然SOS条件并不是多项式非负的必要条件,但是数值实验显示SOS与非负性之间的差别很小^[10],并且在控制系统实例研究中SOS方法相比传统的线性矩阵不等式(Linear ma-

trix inequality, LMI) 得到了保守性更低的结果^[17-18]。

根据 Lyapunov 稳定性判据, 结合 SOS 方法, 可以推导出多项式状态反馈控制器的设计条件。设李雅普诺夫函数为

$$V(x) = \hat{x}^T(x) P^{-1}(\tilde{x}) \hat{x}(x) \quad (18)$$

式中: $P^{-1}(\tilde{x}) \in \mathbf{R}^{N \times N}$ 为对称多项式矩阵; \tilde{x} 为状态变量 x 中与控制输入 u 完全无关的变量组成的向量。由条件式(17)可得 $P(\tilde{x})$ 和 $P^{-1}(\tilde{x})$ 是关于 x 的正定矩阵, 故 $V(x)$ 是关于 x 的正定函数。

应用式(16)的闭环控制, 由于 $k \in K$ 时, $B_i^k(x) = 0$; $k \notin K$ 时, $\frac{\partial P^{-1}}{\partial x_k}(\tilde{x}) = 0$, 则 $V(x)$ 对时间的导数为

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \hat{x}^T(x) P^{-1}(\tilde{x}) \dot{\hat{x}}(x) + \\ &\hat{x}^T(x) P^{-1}(\tilde{x}) \hat{x}(x) + \hat{x}^T(x) \dot{P}^{-1}(\tilde{x}) \hat{x}(x) = \\ &\frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) \hat{x}^T(x) \cdot \\ &\left\{ \Omega_{ij}(x) + \Omega_{ji}(x) + \sum_{k \in K} \frac{\partial P^{-1}}{\partial x_k}(\tilde{x}) A_i^k(x) \hat{x}(x) + \right. \\ &\left. \sum_{k \in K} \frac{\partial P^{-1}}{\partial x_k}(\tilde{x}) A_j^k(x) \hat{x}(x) \right\} \hat{x}(x) \quad (19) \end{aligned}$$

其中 $\Omega_{ij}(x) = P^{-1}(\tilde{x}) T(x) \{ A_i(x) - B_i(x) F_j(x) \} + \{ A_i(x) - B_i(x) F_j(x) \}^T T^T(x) P^{-1}(\tilde{x})$ 。

根据文献[11], 由于 $P^{-1}(\tilde{x}) P(\tilde{x}) = I$, 等号两边同时对 x_k 求导可得

$$\begin{cases} \frac{\partial P^{-1}}{\partial x_k}(\tilde{x}) P(\tilde{x}) + P^{-1}(\tilde{x}) \frac{\partial P}{\partial x_k}(\tilde{x}) = 0 \\ \frac{\partial P^{-1}}{\partial x_k}(\tilde{x}) = -P^{-1}(\tilde{x}) \frac{\partial P}{\partial x_k}(\tilde{x}) P^{-1}(\tilde{x}) \end{cases} \quad (20)$$

根据李雅普诺夫稳定性判据, 若系统稳定, 则要求式(19)非正, 将式(20)代入式(19)得以下条件

$$\begin{aligned} &-\left\{ \Omega_{ij}(x) - \sum_{k \in K} P^{-1}(\tilde{x}) \frac{\partial P}{\partial x_k}(\tilde{x}) P^{-1}(\tilde{x}) A_i^k(x) \right. \\ &\hat{x}(x) + \Omega_{ji}(x) - \sum_{k \in K} P^{-1}(\tilde{x}) \cdot \\ &\left. \frac{\partial P}{\partial x_k}(\tilde{x}) P^{-1}(\tilde{x}) A_j^k(x) \hat{x}(x) \right\} \geq 0 \quad i < j \end{aligned} \quad (21)$$

式中 $A_i^k(x) \hat{x}(x)$ 为标量, 将式(21)左乘 $P(\tilde{x})$ 右乘 $P(\tilde{x})$, 并定义矩阵 $M_i(x) = F_i(x) P(\tilde{x})$, 则得到闭环系统(16)的稳定条件^[10]为: 存在对称多项式矩阵 $P(\tilde{x}) \in \mathbf{R}^{N \times N}$ 与多项式矩阵 $M_i(x) \in \mathbf{R}^{m \times N}$ 满足下列条件

$$v^T (P(\tilde{x}) - \varepsilon_1(x) I) v \quad (22)$$

是 SOS 多项式;

$$\begin{aligned} &-v^T (T(x) A_i(x) P(\tilde{x}) - T(x) B_i(x) M_j(x) + \\ &P(\tilde{x}) A_i^T(x) T^T(x) - M_j^T(x) B_i^T(x) T^T(x) + \\ &T(x) A_j(x) P(\tilde{x}) - T(x) B_j(x) M_i(x) + \\ &P(\tilde{x}) A_j^T(x) T^T(x) - M_i^T(x) B_j^T(x) T^T(x) - \\ &\sum_{k \in K} \frac{\partial P}{\partial x_k}(\tilde{x}) A_i^k(x) \hat{x}(x) - \\ &\sum_{k \in K} \frac{\partial P}{\partial x_k}(\tilde{x}) A_j^k(x) \hat{x}(x) + \varepsilon_{2ij}(x) I) v \quad i \leq j \end{aligned} \quad (23)$$

是 SOS 多项式。

上述条件中 $\varepsilon_1(x)$ 和 $\varepsilon_{2ij}(x)$ 为非负多项式, 满足 $\varepsilon_1(x) > 0, x \neq 0$ 与 $\varepsilon_{2ij}(x) \geq 0$, 若对所有 $x \neq 0$ 都有 $\varepsilon_{2ij}(x) > 0$, 则系统是渐进稳定的。 $v \in \mathbf{R}^N$ 为与 x 无关的向量, $T(x) \in \mathbf{R}^{N \times N}$ 为多项式导数矩阵, 其内部第 (i, j) 号元素为

$$T^{ij}(x) = \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial x_j}(x) \quad (24)$$

反馈控制增益 $F_i(x)$ 可由 $P(\tilde{x})$ 和 $M_i(x)$ 获得

$$F_i(x) = M_i(x) P^{-1}(\tilde{x}) \quad (25)$$

特别地, 当 $P(\tilde{x})$ 为常数矩阵时, 系统全局稳定。

考虑到控制输入存在饱和约束, 设控制输入 $\Delta T \in [-F, F], \Delta \delta_e \in [-r, r]$, 即

$$\|u(t)\|^2 < F^2 + r^2 = \mu^2 \quad (26)$$

初始条件 $x(0)$ 即为栖落机动初始状态偏差 ΔX 。根据文献[19], 当

$$\begin{bmatrix} 1 & x^T(0) \\ x(0) & P(\tilde{x}) \end{bmatrix} \geq 0, \begin{bmatrix} P(\tilde{x}) & M_i^T(x) \\ M_i(x) & \mu^2 I \end{bmatrix} \geq 0 \quad (27)$$

成立时, 所有 $t > 0$ 时刻都有 $\|u(t)\|^2 < \mu^2$ 。

联立不等式(22, 23, 27), 使用平方和方法求解满足不等式条件的矩阵 $P(\tilde{x})$ 和矩阵 $M_i(x)$, 可得到 Lyapunov 意义下稳定且符合控制输入幅值限制(26)的控制律。

2.3 位置控制设计

栖落机动轨迹控制的目的是实现固定翼无人机的定点降落, 其特殊之处在于, 无人机不仅要按照参考轨迹的姿态要求完成规定的动作, 还需要安全着陆于指定地点附近。在经典飞行控制系统中, 控制器往往采用“位置-姿态”串级结构, 位置控制器将实际位置与同时刻参考位置的偏差补偿至姿态控制器的参考输入, 实现位置跟随。执行栖落任务的过程中, 当无人机存在较小的初始姿态偏差且

仅应用姿态控制时,无人机能够迅速修正姿态,并保持较小的落点误差^[6];若无人机初始姿态偏差较大,或存在初始位置偏差,仅应用姿态控制便很难满足落点精度要求,且在引入位置外环后,栖落机动过程中过大的位置偏差会对姿态产生较大影响,虽能保证落点的精度,但容易导致无人机姿态出现较大偏差以及执行机构饱和。

考虑到落点精度的重要性,本文的轨迹跟踪控制使用“位置-多项式模糊控制”串级结构。本文在研究式(3)形式的4状态变量非线性模型的基础上,将2个位置变量纳入了纵向动力学模型的状态变量,得到了式(5)形式的6变量非线性模型。在控制设计环节,本文针对4变量模型与6变量模型分别设计了包含4变量和6变量的多项式模糊控制器,并将两种控制器分别接入非线性模型,并加入位置控制进行了闭环仿真对比。

在该“位置-多项式模糊控制”串级结构中,外环仅使用纯比例控制便能以较小的比例系数在修正落点位置的同时得到符合参考轨迹要求的末端姿态。若当前时刻的位置偏差为 $(\Delta x, \Delta h)$,则位置控制器补偿后,多项式模糊控制器实际得到的参考输入为 $\mathbf{X}_d = [V_d, \theta_d, \alpha_s, q_s, x_s, h_s]^T = \mathbf{X}_s + [V_{err}, \theta_{err}, 0, 0, 0, 0]^T$, 其中

$$\begin{cases} V_d = \sqrt{(V_s \cos(\theta_s - \alpha_s) + k_1 \Delta x)^2 + (V_s \sin(\theta_s - \alpha_s) + k_2 \Delta h)^2} \\ \theta_d = \arctan\left(\frac{V_s \sin(\theta_s - \alpha_s) + k_2 \Delta h}{V_s \cos(\theta_s - \alpha_s) + k_1 \Delta x}\right) \end{cases} \quad (28)$$

为补偿后的参考速度与参考俯仰角,而 k_1 与 k_2 为比例系数,根据表达式的物理含义,比例系数应为负数。当比例系数的绝对值较小时, V_{err} 与 θ_{err} 较小,外环对内环的参考姿态的影响也较小,在保证无人机姿态对参考姿态的跟随的同时,对末端位置作出了进一步修正,并减小了执行机构饱和的风险。

栖落机动轨迹控制器可根据稳定条件(22)、(23)和幅值条件(27),使用平方和工具SOSTOOLS^[20]求解。在SOS求解程序中给 $P(\tilde{\mathbf{x}})$ 和 $M_i(\mathbf{x})$ 赋予不同的阶数,会给系统带来不同的性能参数^[21]。使用SOSTOOLS对非变体无人机和变体无人机的T-S模糊模型按照并行分布补偿原则生成阶数相同的 $P(\tilde{\mathbf{x}})$ 与阶数相同的 $M_i(\mathbf{x})$,若SOSTOOLS对二者皆可得到可行解,则得到的状态反馈控制律将具有相同的结构。将两种模型的控制律分别代入其非线性模型,组成闭环系统,对

二者以相同的初始状态偏差 $\Delta \mathbf{X}$ 进行仿真,观察二者对参考轨迹的跟踪情况以及控制输入量的变化情况,可得出 l_e 可变对无人机的操纵性能带来的影响。

3 仿真分析

本节对非变体与变体方案下的无人机栖落机动闭环控制进行仿真以检验所设计的多项式模糊控制器的控制效果,并对比非变体与变体下无人机在应对不同程度的初始偏差时的表现,检验了变体辅助方案在轨迹跟踪和防止升降舵饱和方面的作用。

3.1 栖落机动模糊模型仿真验证

在仿真中,确定无人机的物理参数为:质量 $m = 0.8 \text{ kg}$,俯仰转动惯量 $I_y = 0.1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$,机翼面积 $S = 0.25 \text{ m}^2$,升降舵面积 $S_e = 0.054 \text{ m}^2$ 。空气密度为 $\rho = 1.225 \text{ kg/m}^3$,重力加速度为 $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ 。令 $l_e = 0.52 \text{ m}$, l_e 为常数,无人机处于非变体状态。

参考轨迹起点处,无人机的配平状态为:速度 $V = 9.9736 \text{ m/s}$,俯仰角 $\theta = 0.2455 \text{ rad}$,迎角 $\alpha = 0.2455 \text{ rad}$,俯仰角速率 $q = 0 \text{ rad/s}$,位置 $x = 0 \text{ m}$, $h = 0 \text{ m}$ 。参考轨迹末端,无人机的降落状态为:速度 $V = 3.8858 \text{ m/s}$,俯仰角 $\theta = 0.6786 \text{ rad}$,迎角 $\alpha = 0.7628 \text{ rad}$,俯仰角速率 $q = -1.5628 \text{ rad/s}$,位置 $x = 10.9631 \text{ m}$, $h = 1.4353 \text{ m}$ 。

选取状态变量 $\mathbf{X} = [V, \theta, \alpha, q, x, h]^T$ 建立纵向动力学模型,并将 $\mathbf{X} = \Delta \mathbf{X} + \mathbf{X}_s, \mathbf{u} = \Delta \mathbf{u} + \mathbf{u}_s$ 代入该模型,分别对 $\Delta \mathbf{X}$ 和 $\Delta \mathbf{u}$ 求偏导得到LPV模型。对参考轨迹的 $(\mathbf{X}_s, \mathbf{u}_s)$ 进行拟合,使之成为关于时间 t 的函数,代入LPV模型。

使用张量积工具箱对LPV模型进行变换^[6],变换空间设为 $t = [0, 1.6] \text{ s}$,网格密度选取为100,隶属度函数凸包类型设置为接近正规型(Close to normality, CNO),隶属度函数的数目定为5,得到式(13)形式的模型,包含5个线性时不变的子模型。子模型通过隶属度函数提供的权值实时叠加,形成时变的T-S模糊模型。

为了测试模糊建模的精度,现假设无人机以初始状态偏差 $\Delta \mathbf{X} = [1, \pi/180, \pi/180, 0.1, 0, 0]^T$ 进行栖落机动,对非线性模型和T-S模糊模型进行开环仿真,即控制输入量完全按照参考输入 \mathbf{u}_s 变化。图1的模型开环响应曲线表明,由于初始偏差的存在,非线性模型无法收敛于参考轨迹(水平位置偏

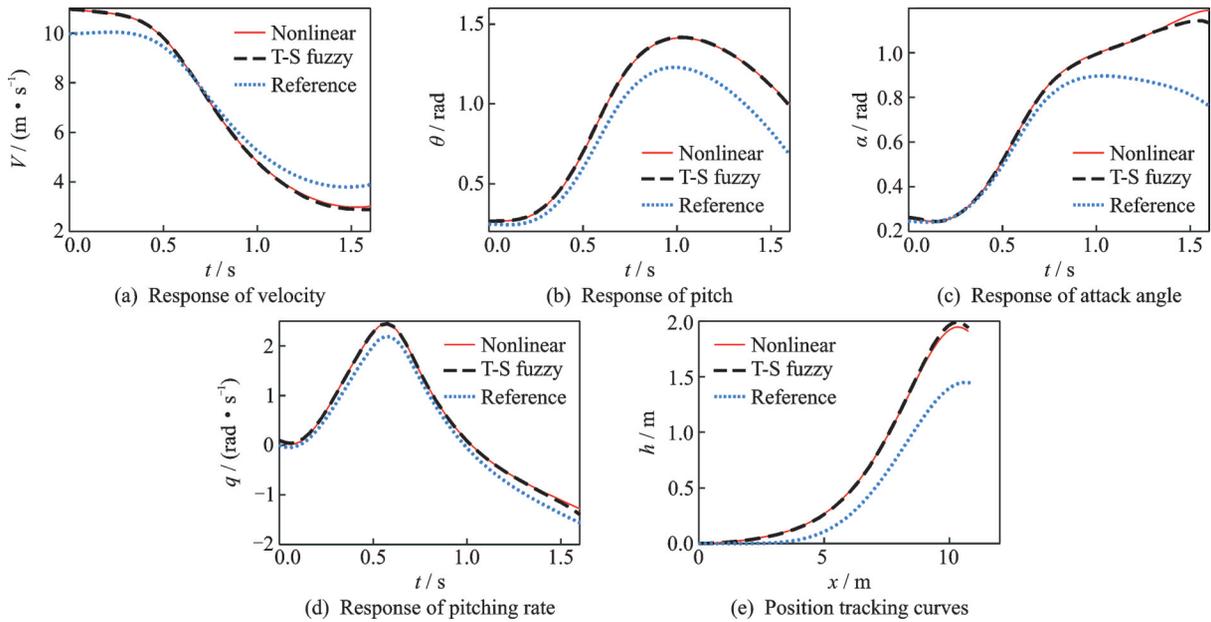


图1 开环系统响应曲线

Fig.1 Open-loop response

差 0.2184 m, 纵向位置偏差 0.4728 m), 体现了设计控制器的必要性; T-S 模糊模型的仿真曲线走势贴近非线性模型, 具有一定的精度, 开环响应特性与原非线性模型十分相似。由此分析, 针对 T-S 模糊模型设计的控制器对原非线性模型有很高的适用性。

3.2 变体辅助方案操纵能力仿真对比

本小节分析了几种 l_e 情况下, 执行参考轨迹需要的升降舵偏角变化情况, 并设计了增强俯仰力矩的 l_e 变化策略。忽略 l_e 变化对无人机模型质心位置的影响, 即变体策略仅影响单一物理量 l_e , 且参考轨迹保持不变。此时, 保持栖落机动过程中俯仰力矩与参考轨迹一致, 由于 l_e 的变化, 升降舵偏转角 δ_e 也需做出相应的变化。利用 MATLAB 的 f_{solve} 函数, 根据俯仰力矩系数表达式(2)求解出不同 l_e 情况下对应的 δ_e 数值。图 2 显示了 l_e 分别为 0.4、0.6 和 0.8 m 时对应的 δ_e 参考曲线。结合俯仰力矩系数表达式(2)分析可得: 一定范围内, l_e 越大, 完成同

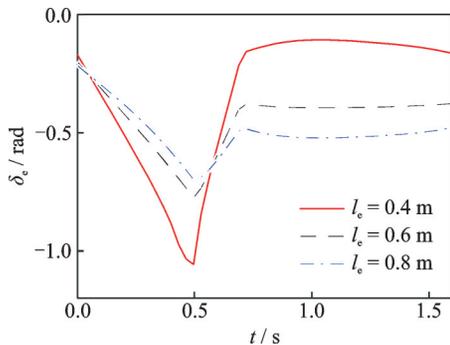


图2 不同 l_e 对应的 δ_e 变化曲线

Fig.2 δ_e corresponding to different l_e

样俯仰力矩变化需要的升降舵角变化值越小, 参考轨迹在 $t=0.5$ s 附近的升降舵偏角越大(距离升降舵偏角饱和的余量越大); l_e 越小, 则参考轨迹起点处的配平状态下的升降舵偏转角数值越大(越趋向于向下偏转), 且参考轨迹后半段的升降舵偏转角也越大。需要注意的是, 当 l_e 小于 0.35 m 时, δ_e 会在 $t=0.5$ s 附近无解; 当 l_e 为定值且 l_e 小于 0.47 m 时, SOSTOOLS 无法得到可行的状态反馈控制律。

变体设计的目的为: 在极端状况下防止升降舵由于行程限制出现舵角饱和, 保证操纵性能; 同时升降舵应趋于行程中点以充分利用升降舵的行程。此外, 为了方便无人机以较小的速度安全地降落在有限的指定范围(如栖落平台)内, 并为下一次飞行做好准备, 无人机在降落时应处于吊杆缩短的状态, 以紧凑的结构应对冲击、防止机尾撞击栖落平台并减小空间占用。现假设 $t=0$ s 时刻起到 $t=0.5$ s 时刻, l_e 由 0.5 m 匀速增加到 0.8 m; 而在 $t=0.5$ s 时刻之后, l_e 由 0.8 m 匀速减小到 0.47 m。据此生成新的 δ_e 参考曲线, 纳入新的参考轨迹。按照 3.1 节的方法, 建立变体无人机的 T-S 模糊模型。

3.3 栖落机动轨迹跟踪控制仿真与对比

本小节依据非变体和变体的 T-S 模糊模型分别设计了控制器, 并设置了两组不同初始偏差的栖落机动仿真, 对变体方案防止升降舵饱和的作用进行了验证。根据定理 1 设计状态反馈控制器, 然后对 5 个模糊子模型对应的状态反馈控制增益进行求解。SOSTOOLS 提供了指定维度和元素类型

构造待定系数的矩阵与利用平方和分解法求解不等式的功能。由于非变体与变体 T-S 模型具有同样的结构,仅是子模型参数值与隶属度函数不同,故二者的控制律求解方法也相同。

首先,根据模糊模型的 A_i 与 B_i 的维度,生成符合维度要求的包含待定系数的多项式矩阵 $P(\tilde{x})$ 和 $M_i(x)$ (包括 $M_1(x)$ 、 $M_2(x)$ 、 $M_3(x)$ 、 $M_4(x)$ 和 $M_5(x)$ 共 5 个矩阵)。本文建立的模型包含 6 个状态变量和 2 个控制输入,故 $P(\tilde{x})$ 为 6 行 6 列矩阵, $M_i(x)$ 为 2 行 6 列矩阵,且 B_i 第 2、5、6 行为全零行,故 $\tilde{x} = [\Delta\theta, \Delta x, \Delta h]^T$ 。待定矩阵的元素多项式的阶数影响系统的控制性能,选择合适的阶数配合,可得到期望的控制效果。选定 $M_i(x)$ 为常数(即 0 阶多项式)矩阵,而 $P(\tilde{x})$ 为关于 \tilde{x} 的 2 阶多项式矩阵。

其次,根据条件(22)、条件(23)和条件(27),设置对应的矩阵不等式。建立的 T-S 模糊模型包含 5 个子模型,条件(22)对应 1 个矩阵不等式,而条件(23)对应 15 个矩阵不等式,条件(27)则对应 6 个矩阵不等式。这些不等式共同成为矩阵求解时的约束条件。

最后,联立所有不等式同时求解 6 个待定的矩阵,根据式(25)进行求解,得到的 5 个矩阵分别对应每个子系统的反馈增益。5 个状态反馈控制律通过隶属度函数提供的权值,实施叠加得到当前时刻的控制律。将得到的控制律代入模型,验证控制律的实际性能表现。由于无人机的推力有限,升降舵也存在偏转角度限制,故需要对状态反馈得到的控制输入量进行限幅。由于调节器能源有限,以及执行机构本身惯性的存在,希望得到的控制输入量变化较为平缓,以更低的能耗完成栖落机动任务^[4]。在此假设控制输入 $u = [T, \delta_e]^T$ 对应的执行器行程限制为推力 $T \in [0, 7.5396]$ N, 升降舵偏转角

$$\delta_e = \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6} \right] \text{ rad}。$$

设定初试状态偏差仍然为 $\Delta X = [1, \pi/180, \pi/180, 0.1, 0, 0]^T$, 根据经典的飞行控制系统结构,引入外环位置控制进行参考轨迹位置信息的跟踪。本文在闭环仿真中对比了 4 变量控制器和 6 变量控制器配合位置控制外环得到的反馈控制律的性能。将比例系数 k_1 与 k_2 都置为 0, 先缓缓减小 k_2 , 观察纵向位置跟踪情况。当 $k_2 = -5$ 时, 4 变量控制器和 6 变量控制器的纵向位置跟踪情况如图 3 所示。

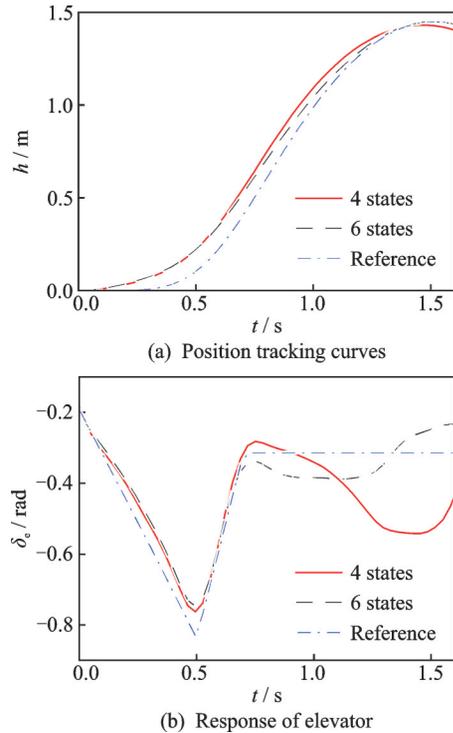


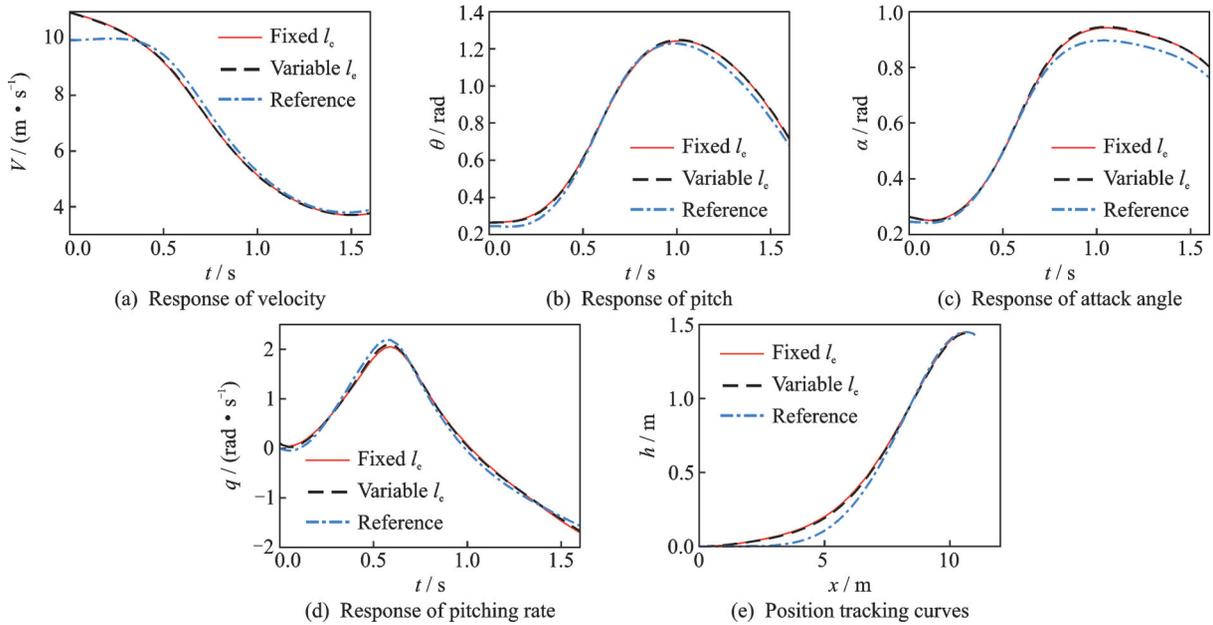
图 3 $k_2 = -5$ 时纵向位置跟踪情况

Fig.3 Vertical tracking with $k_2 = -5$

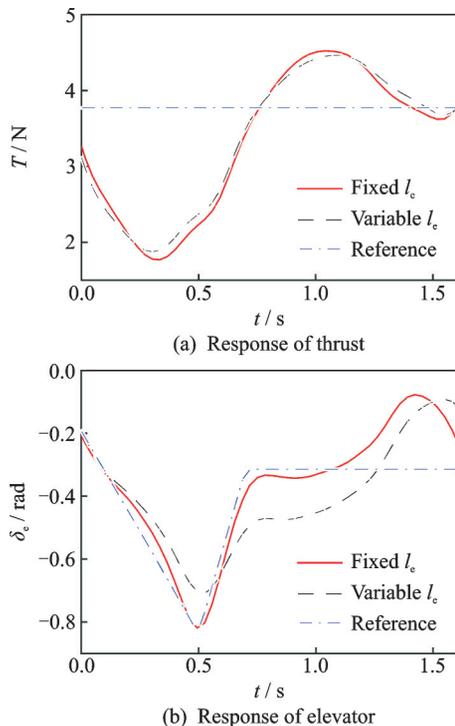
由图 3 可知,当 $k_2 = -5$ 时,6 变量多项式模糊控制器已经可以在 1.6 s 内跟踪上参考轨迹的纵向位置且不发生超调,而 4 变量多项式模糊控制器不能满足跟踪要求。此时,6 变量多项式模糊控制器的升降舵曲线仍在参考曲线附近,而 4 变量多项式模糊控制器的升降舵末端曲线则与参考曲线存在较大的偏差,6 变量多项式模糊控制器表现出了更强的调节能力。因此本文选用了 6 变量多项式模糊控制器作为非线性模型的内环控制器。

缓缓减小比例系数,当 $k_1 = -7.5$ 且 $k_2 = -6$ 时,仿真得到的位置变化曲线能较好贴合参考轨迹位置曲线的后半段,故将 $k_1 = -7.5$ 和 $k_2 = -6$ 确定为位置控制的比例系数。对接入状态反馈的 l_e 固定的模型与 l_e 时变的模型进行闭环仿真,并引入位置控制回路,得到的结果如图 4 所示。

图 4 所示的两种闭环控制系统在仿真中表现良好,在修正位置偏差控制落点的同时,末端姿态也基本符合参考轨迹要求。 l_e 固定时,无人机在栖落机动的末端实际的状态变量为:速度 $V = 3.7844$ m/s, 俯仰角 $\theta = 0.6973$ rad, 迎角 $\alpha = 0.7894$ rad, 俯仰角速率 $q = -1.6900$ rad/s, 完成了栖落机动快速拉大迎角实现大幅减速的目的,获得了基本符合参考轨迹要求的速度与姿态。同时,无人机最终到达了 $x = 10.9751$ m, $h = 1.4353$ m 的末端位置,相比参考轨迹的末端位置要求,水平位置偏差为 0.0120 m, 纵向位置偏差为 0.0000 m, 位置较为精确。 l_e 时变时,无人机在栖落机动的末

图4 l_e 固定与时变模型闭环状态曲线Fig.4 Close-loop simulation with fixed or variable l_e

端实际的状态变量为:速度 $V = 3.7833 \text{ m/s}$, 俯仰角 $\theta = 0.7027 \text{ rad}$, 迎角 $\alpha = 0.7903 \text{ rad}$, 俯仰角速率 $q = -1.6711 \text{ rad/s}$, 落点位置为 $x = 10.9738 \text{ m}$, $h = 1.4325 \text{ m}$, 具有较高的精度。图5显示了引入状态反馈的闭环系统在跟随参考轨迹时的控制输入量变化情况。推力与升降舵偏角全程均没有出现饱和,且变化趋势平缓,缓解了执行机构的调节压力。其中 l_e 时变的模型用更小的升降舵偏转角完成了参考轨迹的跟踪。

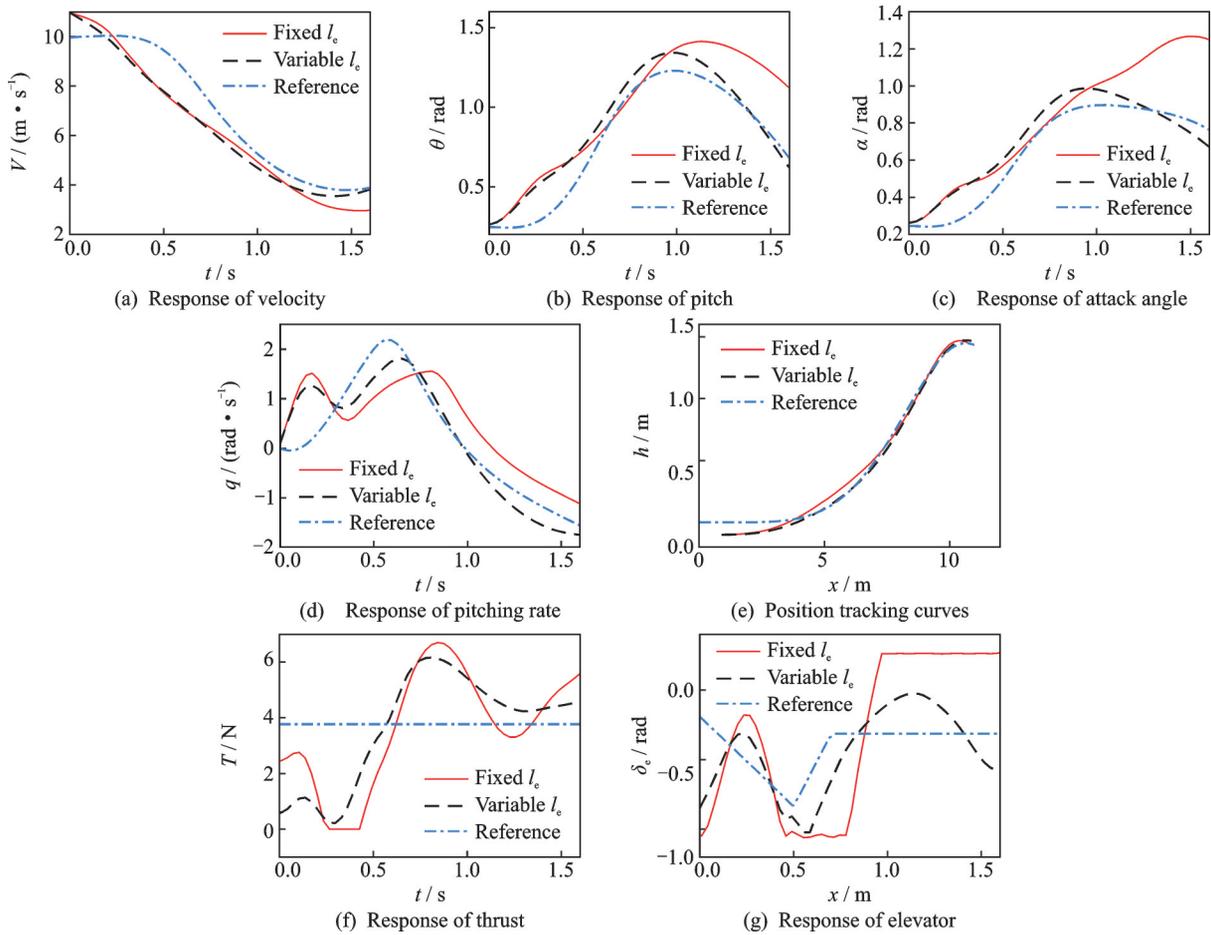
图5 l_e 固定与时变模型控制输入曲线Fig.5 Control inputs with fixed or variable l_e

假设无人机在栖落机动开始时不仅具有姿态偏差,还具有 $\Delta x = 0.9 \text{ m}$, $\Delta h = -0.1 \text{ m}$ 的位置偏差,即 $\Delta X = [1, \pi/180, \pi/180, 0.1, 0.9, -0.1]^T$,且由于能源控制和装配精度等问题,动力系统输出推力比给定值大 1 N 、升降舵偏转角比给定值大 0.1 rad 。仿真证明,这些扰动的存在会对控制系统和执行机构造成更大的压力。

如图6所示,在位置控制环的作用下,两种模型仍能保证一定的落点精度, l_e 固定模型出现了长时间的升降舵偏转角饱和,这极大限制了控制系统理论性能的发挥;而 l_e 时变模型的升降舵偏角仍能控制在机械行程范围内,保证了控制系统的效率。反映在末端姿态上, l_e 时变模型在栖落机动结束时,无人机的姿态 V 、 θ 、 α 、 q 能停留在参考轨迹值的附近,而 l_e 固定模型的姿态与参考轨迹值存在较大偏差,尤其是俯仰角 θ 与迎角 α 出现了明显的远离参考轨迹的趋势。推测两种模型表现出较大差异的原因在于, l_e 固定模型的升降舵操纵效率较低,由于偏转角饱和,实际输出的控制性能已经无法满足当前实验中偏差纠正的需求;而 l_e 时变模型增加了升降舵的操纵效率,减小了升降舵偏转角饱和的风险,保证了控制性能的发挥。

4 结 论

本文研究了无人机变体辅助纵向操纵在栖落机动中的作用。按照轨迹线性化的方法,根据 T-S 模糊理论和张量积模型变换,建立了 T-S 模糊模型。根据建立的栖落机动纵向动力学模型和并行

图6 l_e 固定与时变模型多重扰动闭环仿真Fig.6 Multi-disturbance close-loop simulation with fixed or variable l_e

分布补偿控制策略,设计了多项式模糊轨迹跟踪控制律,其控制增益可以通过基于多项式平方和分解原理的SOSTOOLS工具箱计算得到。对栖落机动的非线性模型与模糊模型的开环仿真结果表明,二者表现出的纵向动力学特性相似,体现了模糊模型的准确性。由此可见,以模糊模型为依据设计控制器,实现对非线性模型的控制是可行的。对闭环性能的仿真结果表明,基于模糊模型设计的控制器能以平缓的控制输入修正初始状态带来的偏差,并能在位置控制外环的作用下有效控制落点位置。对存在多重初始偏差与控制输入偏置的非变体与变体模型的闭环仿真,体现了变体部件的辅助操纵作用,以及减少控制饱和风险的作用。在栖落机动过程中,无人机在不足11m的水平距离内完成了大幅减速的机动任务,并且实现了控制落点的目标,减速后的无人机可以安全地停留在栖落平台或栖落杆上,也可实现悬挂功能^[22]。变体方案与传统非变体固定翼的对比试验中表明,变体部件对栖落机动起到了辅助操纵的作用。可变 l_e 的方案为升降舵提供了抗饱和作用,提高了极端情况下的操纵性能。文中的 l_e 变化是按照预先设计的策略进行

的,在面对多变的扰动情况时缺乏灵活性。后续研究可将 l_e 的变化作为控制输入,根据飞行状况进行主动操控,以充分利用变体部件的辅助功能,实现更快的减速、更短的栖落轨迹等目标。

参考文献:

- [1] ALIKHAN M, PEYADA N K, GO T H. Flight dynamics and optimization of three-dimensional perching maneuver[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2013, 36(6):1791-1797.
- [2] CORY R, TEDRAKE R. Experiments in fixed-wing UAV perching[C]//Proceedings of AIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit. Honolulu, USA: AIAA, 2008:7256.
- [3] RAO D V, GO T H. Optimization, stability analysis, and trajectory tracking of perching maneuvers[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2014, 37(3):879-888.
- [4] WICKENHEISER A M, GARCIA E. Optimization of perching maneuvers through vehicle morphing[J]. Journal of Guidance Control & Dynamics, 2008, 31(4):815-823.
- [5] 袁亮,何真,王月.变体无人机栖落机动建模与轨迹

- 优化[J]. 南京航空航天大学学报, 2018, 50(2): 266-275.
- YUAN Liang, HE Zhen, WANG Yue. Modeling and trajectory optimization of perching maneuvers for morphing UAV[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2018, 50(2):266-275.
- [6] 阙莹莹, 何真, 李达. 微型飞行器过失速降落轨迹跟踪控制设计[J]. 飞行力学, 2017(3):55-59.
- KAN Yingying, HE Zhen, LI Da. Trajectory tracking control design of micro aerial vehicle in post-stall landing[J]. Flight Dynamics, 2017(3):55-59.
- [7] HE Z, YIN M, LU Y P. Tensor product model-based control of morphing aircraft in transition process[J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part G Journal of Aerospace Engineering, 2016, 230(2):378-391.
- [8] BARANYI P. Tensor product model-based control of two-dimensional aeroelastic system[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2006, 29(2): 391-400.
- [9] BARANYI P. TP model transformation as a manipulation tool for QLPV analysis and design[J]. Asian Journal of Control, 2015, 17(2):497-507.
- [10] TANAKA K, YOSHIDA H, OHTAKE H, et al. A sum-of-squares approach to modeling and control of nonlinear dynamical systems with polynomial fuzzy systems[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2009, 17(4):911-922.
- [11] TAKAGI T, SUGENO M. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control [J]. Readings in Fuzzy Sets for Intelligent Systems, 1993, 15(1):387-403.
- [12] 刘湘崇, 梁彦, 潘泉, 等. T-S模糊模型建模方法研究[J]. 信息与控制, 2006, 35(1):6-11.
- LIU Xiangchong, LIANG Yan, PAN Quan, et al. An approach for building Takagi-Sugeno fuzzy models [J]. Information and Control, 2006, 35(1):6-11.
- [13] MANCHESTER Z R, LIPTON J I, WOOD R J, et al. A variable forward-sweep wing design for enhanced perching in micro aerial vehicles [C]//Proceedings of AIAA Aerospace Sciences Meeting. Grapevine, USA: AIAA, 2017.
- [14] 殷明. 变体飞行器变形与飞行的协调控制问题研究 [D]. 南京:南京航空航天大学, 2016.
- [15] ZHENG M M, HE Z, YIN M. Control-oriented modeling and analysis of the longitudinal dynamics of variable-sweep aircraft [C]//Proceedings of Guidance, Navigation and Control Conference (CGNCC). [S.l.]: IEEE, 2014:1793-1798.
- [16] 何真, 陆宇平, 郑曼曼. 变体无人机栖息机动的仿真与分析 [C]//中国控制会议. 南京: [s.n.], 2014: 6769-6774.
- HE Zhen, LU Yuping, ZHENG Manman. Simulation and analysis of perching maneuvers for morphing UAVs [C]//Proceedings of the 33rd Chinese Control Conference. Nanjing: [s.n.], 2014:6769-6774.
- [17] TANAKA K, YOSHIDA H, OHTAKE H, et al. Stabilization of polynomial fuzzy systems via a sum of squares approach [M]. [S.l.]: IEEE, 2007:160-165.
- [18] KIM H S, PARK J B, JOO Y H. Stabilization of polynomial fuzzy large-scale system: Sum-of-square approach [C]//Proceedings of International Conference on Control. [S.l.]: IEEE, 2011.
- [19] TANAKA K, WANG H O. Fuzzy control systems design and analysis: A linear matrix inequality approach [M]. [S.l.]: John Wiley & Sons, Inc., 2002.
- [20] PAPANICOLAOU A, ANDERSON J, VALMORBIDA G, et al. SOSTOOLS version 3.00 sum of squares optimization toolbox for Matlab [J]. Eprint Arxiv, 2013, 24(2):24-30.
- [21] SANJAYA B W, TRILAKSONO B R, SYAICHURROHMAN A. H_∞ control of polynomial fuzzy systems: A sum of squares approach [J]. Journal of Engineering and Technological Sciences, 2014, 46(2): 152-169.
- [22] MOORE J, TEDRAKE R. Powerline perching with a fixed-wing UAV [C]//Proceedings of the AIAA Infotech. Seattle, USA: AIAA, 2009:1959.

(编辑:刘彦东)