

DOI:10.16356/j.1005-2615.2020.04.017

基于指标比对串联排队系统平均排队时间的近似方法

吴登磊, 赵宁, 刘文奇

(昆明理工大学理学院, 昆明, 650500)

摘要: 串联排队系统是构成排队网络的基本结构,但是除了满足马尔可夫性或服务时间为常数的串联排队系统外,一般的串联排队系统的平均排队时间难以精确计算。为了刻画串联排队系统各个站之间的关联性,本文提出指标比的概念,基于指标比对系统的平均排队时间进行研究;通过分析指标比的数值特性,得到指标比的拟合表达式,进而对系统下游工作站的平均排队时间提出近似方法。数值实验结果显示,本文提出的近似方法对串联排队系统平均排队时间的估计效果较好。

关键词: 串联排队系统;排队时间;指标比

中图分类号:O226

文献标志码:A

文章编号:1005-2615(2020)04-0644-06

Mean Waiting Time Approximation of Tandem Queueing Systems Based on Performance Ratio

WU Denglei, ZHAO Ning, LIU Wenqi

(Faculty of Science, Kunming University of Science and Technology, Kunming, 650500, China)

Abstract: The tandem queueing system is a basic structure of queueing networks. However, it is hard to accurately calculate the mean waiting time of the general tandem queueing system except for the tandem queues with the Markov property or constant service times. To characterize the dependence among stations in the tandem queues, this paper proposes the concept of performance ratio to study the mean waiting time. By analyzing the numerical properties of performance ratio, the fitting function of the performance ratio is achieved with which the mean waiting time of the downward station in the tandem queue is approximated. As a result, numerical experiments show that the approximation method based on the performance ratio performs well.

Key words: tandem queueing system; waiting time; performance ratio

排队论是用来研究随机服务系统的一门学科,通常用于分析现实生活具有可变性或不规则流量的服务系统的性能,例如,交通^[1]、生产^[2]等各项资源共享的服务系统。研究排队系统的目的是正确设计和有效运行各个服务系统,使之发挥最佳效益。串联排队系统是排队网络的一种基本结构,各服务站之间相互关联,上游工作站的输出过程是下游工作站的输入过程。除了满足马尔可夫性或服

务时间为常数的串联排队系统外,其他串联排队系统的平均排队时间的解析表达式很难求解。目前,关于服务时间服从一般分布的串联排队系统的研究均采用近似分析的方法。

对于G/G/1排队系统,Kingman^[3]提出了平均排队时间的上限。Gelenbe^[4],Kimura^[5],Kobayashi^[6]基于到达时间和服务时间的分布提出了平均排队时间的二阶矩近似方法。Wu和Shen^[7]对GI/

基金项目: 国家自然科学基金(71501086)资助项目。

收稿日期: 2019-08-05; **修订日期:** 2020-05-25

通信作者: 赵宁,女,副教授,博士生导师,E-mail: zhaoning@kmust.edu.cn。

引用格式: 吴登磊,赵宁,刘文奇. 基于指标比对串联排队系统平均排队时间的近似方法[J]. 南京航空航天大学学报, 2020, 52(4): 644-649. WU Denglei, ZHAO Ning, LIU Wenqi. Mean waiting time approximation of tandem queueing systems based on performance Ratio[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2020, 52(4): 644-649.

G/1 排队系统的平均排队时间提出三阶矩近似方法。虽然近似分析方法不同,但大多数近似公式中都包含 M/M/1 排队系统的平均排队时间的表达式。

在 Jackson 网络中,外部到达过程为泊松过程,服务时间服从指数分布,每个站可以看成是独立的 M/M/1 排队系统,其排队时间存在解析表达式^[8]。当串联排队系统不满足马尔可夫性时,各个站的离去过程通常是非更新过程,这导致串联排队系统的性能很难用解析的方法来分析。串联排队系统平均排队时间的近似方法得到广泛研究^[9-15]。Whitt^[9]在 20 世纪 80 年代提出了排队网络分析方法(Queueing network analysis, QNA),Dai 等^[10]以及 Harrison 等^[11]提出了排队网络方法(Queueing network, QNET),Wu 等^[12]利用固有比率的近线性的特征提出了串联排队系统的近似方法。Wu 和 Zhao^[13]研究了串联排队系统各个站之间的依赖性。受文献[13]的启发,本文提出采用指标比(Performance ratio, PR)的方法分析串联排队系统上游工作站对下游工作站的影响。

1 问题描述

本文研究的串联排队系统如图 1 所示,系统由 2 个站串联而成,每站有一个服务器。作业的到达过程为泊松过程,平均速率为 λ ,到达时间间隔的平方变异系数(定义 1)等于 1($C_a^2 = 1$),作业依次由两个站完成服务。2 个站的平均服务时间分别为 S_1 和 S_2 (单位:min),第 1 站和第 2 站的服务时间的平方变异系数分别为 $C_{S_1}^2$ 和 $C_{S_2}^2$,每个服务器前的缓冲区为无限大。系统中第 i 个站的利用率为 $\rho_i = \lambda/\mu_i$,其中 $\mu_i = 1/S_i$,利用率高的工作站为瓶颈站,第 i 个站的平均排队时间为 $T_{Q_i}, i = 1, 2$ 。本文所研究的系统假设第 2 站为瓶颈站,作业遵循先到先服务(First come first serve, FCFS)的服务规则,且 $C_{S_i}^2 \leq 1, (i = 1, 2)$ 。

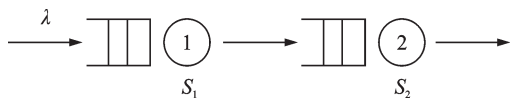


图 1 两个站的串联排队系统

Fig.1 Tandem queuing systems with two stations

定义 1 假设随机变量 X 的期望为 $E(X)$,方差为 $D(X)$,则随机变量 X 的平方变异系数为 $C^2 = \frac{D(X)}{E^2(X)}$ 。

在图 1 所示系统中,由于第 2 站的缓冲区为无

穷大,第 1 站的输出过程不受第 2 站的影响,所以第 1 站的排队时间可以通过单一服务器的排队系统分析。根据文献[14],第 1 站的平均排队时间等于 $\frac{C_a^2 + C_{S_1}^2}{2} \frac{\rho_1}{1 - \rho_1} \frac{1}{\mu_1}$ 。如果串联排队系统第 1 站的服务时间满足 $S_1 = 0$,则系统中第 1 站对第 2 站没有任何影响,第 2 站的输入过程为第 1 站的到达过程,其平均排队时间等于 $\frac{C_a^2 + C_{S_2}^2}{2} \frac{\rho_2}{1 - \rho_2} \frac{1}{\mu_2}$ 。然而,如果第 1 站的服务时间 $S_1 \neq 0$,且服从一般分布,第 2 站的输入过程一般是非更新过程,则难以用解析的方法求解第 2 站的平均排队时间。

下面使用指标比的方法刻画第 1 站对第 2 站的影响,PR 的定义如下。

定义 2 串联排队系统第 2 站的 PR 为

$$PR = \frac{T_{Q_2}}{\frac{C_a^2 + C_{S_2}^2}{2} \frac{\rho_2}{1 - \rho_2} \frac{1}{\mu_2}} \quad (1)$$

式中 T_{Q_2} 表示串联排队系统第 2 站的平均排队时间。

串联排队系统第 2 站的指标比为串联排队系统在 $S_1 \neq 0$ 情况下与 $S_1 = 0$ 的情况下第 2 站的平均排队时间之比。由 (1) 式知, $T_{Q_2} = PR \times \frac{C_a^2 + C_{S_2}^2}{2} \frac{\rho_2}{1 - \rho_2} \frac{1}{\mu_2}$ 。因此如果 PR 已知,则可以通过 PR 计算系统第 2 站的平均排队时间。下一节重点分析 PR 的值。

2 指标比的值

2.1 服务时间服从指数分布

假设系统中 2 个服务器的服务时间均服从指数分布(即 $C_{S_1}^2 = C_{S_2}^2 = 1$),外部到达过程为泊松过程,由文献[15]可知,第 1 站的离去过程为泊松过程,第 2 站的输入过程与系统的到达过程独立同分布,因此, $T_{Q_2} = \frac{C_a^2 + C_{S_2}^2}{2} \frac{\rho_2}{1 - \rho_2} \frac{1}{\mu_2}$ 。由式(1)得,当服务时间服从指数分布,第 2 站的 PR 为

$$PR = 1 \quad (2)$$

2.2 服务时间为常数

当系统中 2 个服务器的服务时间都是常数(即 $C_{S_1}^2 = C_{S_2}^2 = 0$)时,由于系统的平均排队时间只受瓶颈站影响^[16],故

$$T_{Q_1} + T_{Q_2} = \frac{C_a^2}{2} \frac{\rho_2}{1 - \rho_2} \frac{1}{\mu_2} \quad (3)$$

式中, $T_{Q_1} = \frac{C_a^2}{2} \frac{\rho_1}{1 - \rho_1} \frac{1}{\mu_1}, \rho_1 = \frac{\rho_2 \mu_2}{\mu_1}$ 。由式(3)得

$T_{Q2} = \frac{C_a^2}{2} \frac{\rho_2}{1-\rho_2} \frac{1}{\mu_2} - \frac{C_a^2}{2} \frac{\rho_1}{1-\rho_1} \frac{1}{\mu_1}$ 。将 T_{Q2} 及 $\mu_i = 1/S_i$ 代入式(1),得服务时间为常数时第2站的PR为

$$PR = \frac{T_{Q2}}{\frac{C_a^2}{2} \frac{\rho_2}{1-\rho_2} \frac{1}{\mu_2}} = 1 - \frac{S_1^2}{S_2^2} \frac{1-\rho_2}{1-\rho_2 \frac{S_1}{S_2}} \quad (4)$$

令 $S_1 \in \{5, 10, 15, 20, 25, 29\}$, $\rho_2 \in \{0.1, \dots, 0.95\}$, $S_2 = 30$ 。当系统的服务时间为常数时,PR与系统各参数的关系如图2所示。

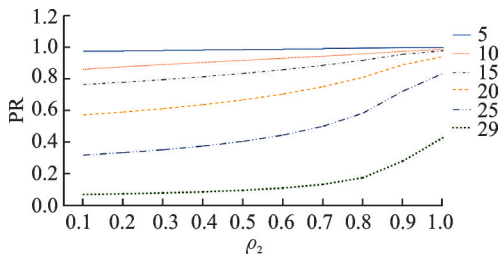


图2 PR与参数之间的关系

Fig.2 Relationship between PR and system parameters

由图2可知:当系统的服务时间为常数时,PR随 ρ_2 的增大而增大,随 S_1 的增大而减小,PR的取值均小于1。

2.3 服务时间服从一般分布

当系统中2个服务器的服务时间服从一般分布,很难求解指标比的解析表达式。为了分析指标比与各个参数之间的关系,模拟了4860种不同参数组合下的串联排队系统,这4860个系统的服务时间均服从Gamma分布,参数取值如下: $C_a^2 = 1$, $S_1 \in \{5, 10, 15, 20, 25, 29\}$, $S_2 = 30$, $C_{S_1}^2 \in \{0.1, 0.2, \dots, 0.9\}$, $C_{S_2}^2 \in \{0.1, 0.2, \dots, 0.9\}$, $\rho_2 \in \{0.1, 0.2, \dots, 0.9, 0.95\}$ 。

对于每组给定的参数,模拟运行30个样本,每个样本取第400001个至第600000个作业的平均排队时间,平均排队时间模拟值的置信水平大于95%,保证了模拟数据的可靠性。根据模拟得到的平均排队时间 T_{Q2} 计算PR的值,数值结果如图3所示。图3显示PR是 ρ_2 的单调增函数,且 $PR < 1$,PR的取值受如下系统参数的影响: $C_a^2, S_1, C_{S_1}^2, S_2, C_{S_2}^2, \rho_2$ 。

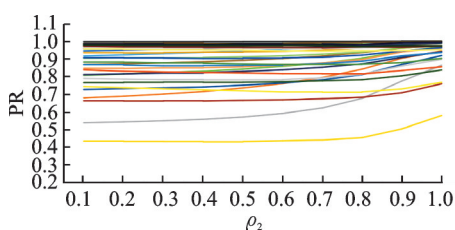
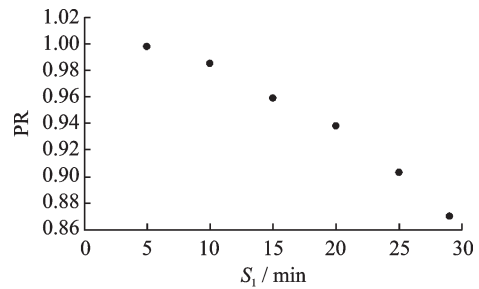


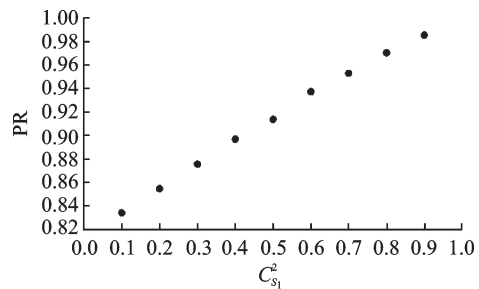
图3 不同参数下的指标比

Fig.3 Performance ratio with different parameters

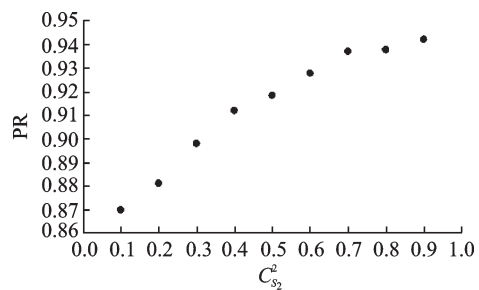
为了便于分析,将服务时间服从一般分布的串联排队系统的第2站的指标比记为 $PR = f(C_a^2, S_1, C_{S_1}^2, S_2, C_{S_2}^2, \rho_2)$ 。下面采用控制变量法,分别讨论如下4种情况下指标比与各参数的关系: $f(1, S_1, 0.5, 30, 0.9, 0.5)$, $f(1, 15, C_{S_1}^2, 30, 0.2, 0.1)$, $f(1, 15, 0.3, 30, C_{S_2}^2, 0.3)$, $f(1, 10, 0.1, 30, 0.5, \rho_2)$ 。4种情况下指标比的模拟数值结果如图4所示,PR具有以下特性:(1)PR随 S_1 的增大而减小;(2)PR关于 $C_{S_1}^2$ 近似线性递增,其中 $0 \leq C_{S_1}^2 \leq 1$;(3)PR随 $C_{S_2}^2$ 的增大而增大,且具有一定的上凸性;(4)PR随 ρ_2 的增大而增大,并且具有一定的下凸性。



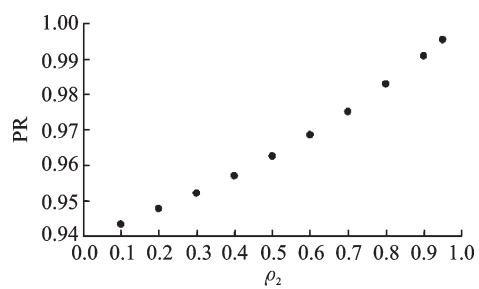
(a) Relationship between PR and S_1



(b) Relationship between PR and $C_{S_1}^2$



(c) Relationship between PR and $C_{S_2}^2$



(d) Relationship between PR and ρ_2

图4 PR与系统参数的关系

Fig.4 Relationship between PR and system parameters

由于 PR 关于 $C_{S_1}^2$ 近似线性递增 ($0 \leq C_{S_1}^2 \leq 1$), 且线段上任意一点可以由 2 个端点线性组合, 因此如果 $0 < C_{S_1}^2 < 1$, 其 PR 值可以表示为系统服务时间分别为常数 ($C_{S_1}^2=0$) 和指数分布 ($C_{S_1}^2=1$) 情况下 PR 的线性组合, 即式 (2) 和式 (4) 的线性组合。记 PR 的近似值为 PR', 则

$$PR' \cong k_1 \times \left(1 - \frac{S_1^2}{S_2^2} \frac{1 - \rho_2}{1 - \rho_2 \frac{S_1}{S_2}} \right) + k_2 \quad (5)$$

根据模拟得到的 4 860 个 PR 数据进行拟合, 得

$$k_1 = \frac{(1 - C_{S_1}^2)^{\frac{S_2}{S_1}}}{(1 + C_{S_2}^2)^{\frac{2S_1}{S_2}}}, k_2 = 1 - \frac{(1 - C_{S_1}^2)^{\frac{S_2}{S_1}}}{(1 + C_{S_2}^2)^{\frac{2S_1}{S_2}}}$$

因此, PR 的近似表达式为

$$PR' \cong 1 - \frac{S_1^2}{S_2^2} \frac{1 - \rho_2}{1 - \rho_2 \frac{S_1}{S_2}} \frac{(1 - C_{S_1}^2)^{\frac{S_2}{S_1}}}{(1 + C_{S_2}^2)^{\frac{2S_1}{S_2}}} \quad (6)$$

注: (1) 如果串联排队系统的服务时间服从指数分布或为常数, 则 $PR' = PR$ 。(2) 虽然式 (6) 是根据服务时间服从 Gamma 分布的串联排队系统的数值结果拟合而成, 但也适用于其他平方变异系数小于 1 的任意分布 (见 3.2 节)。

3 误差分析

3.1 指标比的误差分析

第 2.3 节给出了指标比 PR 的拟合表达式, 即式 (6), 下面通过模拟验证其有效性。令 $S_1 = 20, C_{S_1}^2 = 0.9, S_2 = 30, C_{S_2}^2 = 0.5, \rho_2 \in \{0.1, 0.2, \dots, 0.9\}$, 表 1 分别比较了不同 ρ_2 下第二个站的平均排队时间 T_{Q_2} 、指标比 PR、拟合指标比 PR', 及 PR 和 PR' 的相对误差。

表 1 PR 的相对误差
Table 1 Relative error of PR

ρ_2	T_{Q_2}	PR	PR'	$\frac{ PR' - PR }{PR} / \%$
0.1	2.5	0.981	0.992	1.076
0.2	5.5	0.982	0.992	1.090
0.3	9.5	0.981	0.993	1.201
0.4	14.7	0.983	0.993	1.051
0.5	22.1	0.982	0.994	1.191
0.6	33.2	0.984	0.995	1.103
0.7	51.6	0.984	0.995	1.172
0.8	88.8	0.987	0.996	0.947
0.9	200.5	0.990	0.998	0.774

如表 1 所示, 第 2 站的平均排队时间 T_{Q_2} 随 ρ_2 的增大而增大, 拟合指标比的相对误差均小于 2%, 拟合效果较好。此外, 针对 2.3 节中模拟得到的 4 860 个 PR 与拟合值 PR' 比较, 发现相对误差小于 5% 的拟合指标比达到 98.1%。

3.2 平均排队时间的误差分析

研究指标比的目的是求解第 2 站的平均排队时间。由式 (1) 和 (6) 得 T_{Q_2} 的近似值 T'_{Q_2} 如下:

$$T'_{Q_2} = \left[1 - \frac{S_1^2}{S_2^2} \frac{1 - \rho_2}{1 - \rho_2 \frac{S_1}{S_2}} \frac{(1 - C_{S_1}^2)^{\frac{S_2}{S_1}}}{(1 + C_{S_2}^2)^{\frac{2S_1}{S_2}}} \right] \frac{C_a^2 + C_{S_2}^2}{2} + \frac{\rho_2}{1 - \rho_2} S_2 \quad (7)$$

下面通过模拟服务时间服从 Gamma 分布、均匀分布和三角分布的串联排队系统, 验证 T'_{Q_2} 的准确性。

3.2.1 系统的服务时间服从 Gamma 分布

假设串联排队系统中 2 个站的服务时间均服从 Gamma 分布, 选取 34 组不同参数的串联排队系统 (见表 2), 分别比较不同参数下第 2 站的平均排队时间 T_{Q_2} 、近似值 T'_{Q_2} 及两者的相对误差, 如表 2 所示。表 2 中的 34 组数据结果显示近似值 T'_{Q_2} 的相对误差均小于 3%, 运用指标比 PR 的拟合表达式可以较准确地计算平均排队时间 T_{Q_2} 。

表 2 T_{Q_2} 的相对误差
Table 2 Relative error of T_{Q_2}

类别	ρ_2	S_1	$C_{S_1}^2$	S_2	$C_{S_2}^2$	T_{Q_2}	T'_{Q_2}	$\frac{ T'_{Q_2} - T_{Q_2} }{T_{Q_2}} / \%$
变 化	0.10	20	0.5	30	0.5	2.255	2.279	1.07
	0.20	20	0.5	30	0.5	5.090	5.150	1.17
	0.30	20	0.5	30	0.5	8.726	8.871	1.66
	0.40	20	0.5	30	0.5	13.606	13.877	1.99
	0.50	20	0.5	30	0.5	20.494	20.956	2.25
	0.60	20	0.5	30	0.5	30.917	31.691	2.50
	0.70	20	0.5	30	0.5	48.566	49.797	2.54
	0.80	20	0.5	30	0.5	84.368	86.470	2.49
	0.90	20	0.5	30	0.5	194.792	197.867	1.58
	0.95	20	0.5	30	0.5	416.534	422.165	1.35
变 化	0.80	5	0.5	30	0.5	89.283	89.992	0.79
	0.80	10	0.5	30	0.5	89.740	88.941	0.90
	0.80	15	0.5	30	0.5	88.181	88.750	0.65
	0.80	20	0.5	30	0.5	86.470	84.368	2.49
变 化	0.80	25	0.5	30	0.5	81.696	79.732	2.46
	0.80	29	0.5	30	0.5	73.458	73.213	0.33

续表

类别	ρ_2	S_1	$C_{S_1}^2$	S_2	$C_{S_2}^2$	T_{Q2}	T'_{Q2}	$\frac{ T'_{Q2} - T_{Q2} }{T_{Q2}} / \%$
	0.80	15	0.1	30	0.5	85.950	85.978	0.03
	0.80	15	0.2	30	0.5	86.800	86.779	0.02
$C_{S_1}^2$	0.80	15	0.3	30	0.5	87.550	87.739	0.22
	0.80	15	0.4	30	0.5	88.200	87.591	0.70
变	0.80	15	0.5	30	0.5	88.750	88.181	0.65
	0.80	15	0.6	30	0.5	89.200	87.950	1.42
化	0.80	15	0.7	30	0.5	89.550	87.931	1.84
	0.80	15	0.8	30	0.5	89.800	88.345	1.65
	0.80	15	0.9	30	0.5	89.950	88.090	2.11
	0.80	5	0.9	30	0.1	66.000	65.912	0.13
	0.80	5	0.9	30	0.2	72.000	72.098	0.14
$C_{S_2}^2$	0.80	5	0.9	30	0.3	78.000	78.253	0.32
	0.80	5	0.9	30	0.4	84.000	84.005	0.01
变	0.80	5	0.9	30	0.5	90.000	89.962	0.04
	0.80	5	0.9	30	0.6	96.000	95.560	0.46
化	0.80	5	0.9	30	0.7	102.000	101.519	0.47
	0.80	5	0.9	30	0.8	108.000	107.462	0.50
	0.80	5	0.9	30	0.9	114.000	113.971	0.03

3.2.2 系统的服务时间服从均匀分布

假设串联排队系统中第1站和第2站的服务时间分别服从均匀分布 $U(0.77, 29.23)$ 和 $U(1.54, 58.46)$, 则 $S_1=15, S_2=30, C_{S_1}^2=0.3, C_{S_2}^2=0.3$ 。

令 $\rho_2=0.1, 0.2, \dots, 0.9, 0.95$, 对串联排队系统进行仿真模拟, 从而得到第2站的平均排队时间的模拟值。将模拟值与式(7)计算得到的近似平均排队时间进行比较, 数值结果如图5所示。图5中平均排队时间的模拟值与拟合值几乎重合, 误差较小。

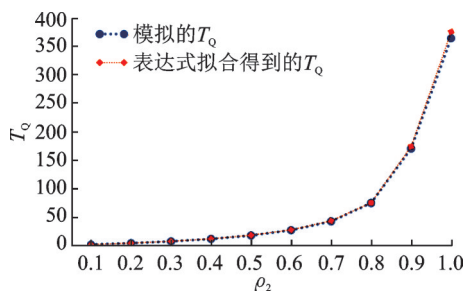


图5 服务时间为均匀分布情况下的误差分析
Fig.5 Error analysis for case with uniform distribution

3.2.3 系统的服务时间服从三角分布

假设串联排队系统中第1站和第2站的服务时间分别服从参数为 a_i, b_i, c_i 的三角分布 ($i=1, 2$), 其概率密度为

$$f(x|a_i, b_i, c_i) = \begin{cases} \frac{2(x-a_i)}{(b_i-a_i)(c_i-a_i)} & a_i < x \leq c_i \\ \frac{2(b_i-x)}{(b_i-a_i)(b_i-c_i)} & c_i < x \leq b_i \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

令 $a_1=1.83, b_1=38.17, c_1=5, a_2=3.67, b_2=76.33, c_2=10$, 则 $S_1=15, S_2=30, C_{S_1}^2=0.3, C_{S_2}^2=0.3$ 。

令 $\rho_2=0.1, 0.2, \dots, 0.9, 0.95$, 对服务时间服从三角分布串联排队系统进行仿真模拟, 得到第2站的平均排队时间的模拟值。图6对模拟值与式(7)计算得到的近似平均排队时间进行比较。图6显示通过仿真模拟得到的平均排队时间与拟合得到的平均排队时间误差较小, 从而验证了通过指标比近似计算串联排队系统平均排队时间方法的可靠性。

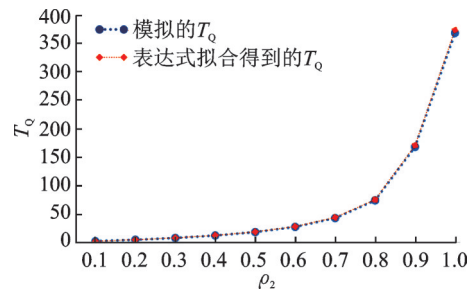


图6 服务时间为三角分布情况下的误差分析
Fig.6 Error analysis the case with triangular distribution

4 结 论

本文首次提出用指标比来刻画串联排队系统上游工作站对下游工作站的影响, 并基于指标比提出串联排队系统平均排队时间的近似方法。通过分析指标比与系统各参数之间的关系, 拟合得到指标比的近似表达式, 利用指标比可以较准确地估计串联排队系统瓶颈站的平均排队时间。本文运用指标比的方法分析了2个站的串联排队系统, 其中第2站为瓶颈站, 未来可以运用该方法研究其他排队网络, 例如: 瓶颈站在前的串联排队系统、缓冲区有限的串联排队系统、复杂网络等。

参考文献:

[1] 冯霞, 孟金双. 基于排队论的航班滑出时间预测[J]. 南京航空航天大学学报, 2016, 48(5): 772-780.
FENG Xia, MENG Jinshuang. Aircraft taxi-out time prediction based on queuing theory[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2016, 48(5): 772-780.

[2] 李蕊, 赵宁, 刘文奇, 等待时间有限的串行生产系统

- 的缓冲区优化[J]. 控制与决策, 2018, 33(2): 345-350.
- LI Rui, ZHAO Ning, LIU Wenqi. Optimization of buffer for series production systems with waiting time constraints[J]. Control and Decision, 2018, 33(2): 345-350.
- [3] KINGMAN J. On queues in heavy traffic[J]. Journal of the Royal Statistical Society, Series B (Methodological), 1962, 24(2): 383-392.
- [4] GELENBE E. On approximate computer system models[J]. Journal of the ACM, 1975, 22(2): 261-269.
- [5] KIMURA T. Refining diffusion approximations for GI/G/1 queues: A tight discretization method[C]// Proceedings of Teletraffic Issues in an Advanced Information Society. Netherlands: Elsevier Science Publishers B. V., 1985: 317-323.
- [6] KOBAYASHI H. Application of the diffusion approximation to queueing networks I: Equilibrium queue distributions[J]. Journal of the ACM, 1974, 21(2): 316-328.
- [7] WU Kan, SHEN Yichi. Three-moment approximation for the mean queue time of a GI/G/1 queue[J]. IIE Transactions, 2018, 50(2): 63-73.
- [8] JACKSON J R. Networks of waiting lines[J]. Operations Research, 1957, 5(4): 518-521.
- [9] WHITT W. The queueing network analyzer[J]. Bell System Technical Journal, 1983, 62(9): 2779-2815.
- [10] DAI J, HARRISON J M. Reflected Brownian motion in an orthant: Numerical methods for steady-state analysis[J]. The Annals of Applied Probability, 1992, 2(1): 65-86.
- [11] HARRISON J M, NGUYEN V. The QNET method for two-moment analysis of open queueing networks[J]. Queueing Systems, 1990, 6(1): 1-32.
- [12] WU Kan, MCGINNIS L. Interpolation approximations for queues in series[J]. IIE Transactions, 2013, 45(3): 273-290.
- [13] WU Kan, ZHAO Ning. Dependence among single stations in series and its applications in productivity improvement[J]. European Journal of Operational Research, 2015, 247(1): 245-258.
- [14] KINGMAN J. Some inequalities for the queue GI/G/1[J]. Biometrika, 1962, 49(3/4): 315-324.
- [15] BURKE P J. The output of a queueing system[J]. Operations Research, 1965, 4(6): 699-704.
- [16] FRIEDMAN H D. Reduction methods for tandem queueing systems[J]. Operations Research, 1965, 13(1): 121-131.

(编辑:张蓓)