

DOI:10.16356/j.1005-2615.2020.03.009

## 基于加权几何平均迭代的改进 BESO 法

余 威<sup>1</sup>, 韩艳彬<sup>2</sup>, 种永刚<sup>2</sup>, 鲁世红<sup>1</sup>

(1. 南京航空航天大学机电学院, 南京, 210016;

2. 航空工业西安飞机工业集团有限公司, 西安, 710089)

**摘要:** 为了解决传统双向渐进结构优化法中存在迭代历程易出现局部振荡现象、算法效率低的问题, 提出了一种基于加权几何平均迭代的改进双向渐进结构优化法。通过研究当前迭代步灵敏度权重因子和历史迭代步灵敏度权重因子对结构优化过程的影响程度, 与当前迭代步灵敏度权重因子对应的迭代历程变化趋势, 实现了最优当前迭代步灵敏度权重因子的优化选择。3 个经典算例验证了较原生过滤法与基于算术平均的过滤法两种处理方法, 本文方法在保持了同等刚度的同时, 减轻了迭代历程的震荡程度, 显著提高了迭代的稳定性, 减少了迭代次数, 效率提高了 10%~37.5%, 说明该方法的可行性与有效性。

**关键词:** 双向渐进结构优化法; 均化处理; 加权几何平均; 权重因子

**中图分类号:** TH11      **文献标志码:** A      **文章编号:** 1005-2615(2020)03-0416-06

## Improved BESO Method Based on Weighted Geometric Mean Iteration

YU Wei<sup>1</sup>, HAN Yanbin<sup>2</sup>, CHONG Yonggang<sup>2</sup>, LU Shihong<sup>1</sup>

(1. College of Mechanical and Electrical Engineering, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing, 210016, China; 2. AVIC Xi'an Aircraft Industry Group Company LTD, Xi'an, 710089, China)

**Abstract:** In order to solve the problem that the iterative process is prone to local oscillation and the algorithm is inefficient in the traditional BESO method, an improved BESO method based on weighted geometric mean iteration is proposed. By studying the influence degree of the current historical iterative step sensitivity weighting factor on the structural optimization process, and the iterative history change trend corresponding to the current iterative step sensitivity weighting factor, the optimal selection of current iterative step sensitivity weight is realized. It has been verified by three classical examples. Compared with the original filtering method and the filtering method based on arithmetic mean, the method presented can reduce the oscillation degree of the iterative process while maintaining the same stiffness, and significantly improve the stability of the iteration. The number of iterations is reduced, and the efficiency is increased by 10%—37.5%, which illustrates the feasibility and effectiveness of the method.

**Key words:** bidirectional evolutionary structure optimization algorithm; homogenization processing; weighted geometric mean; weighting factor

1993 年, Xie 等<sup>[1]</sup>提出了渐进结构优化法 (Evolutionary structure optimization, ESO), 即一种基于启发式规则的拓扑优化方法。这种方法起源于应力设计, 基本思想就是通过对结构上那些低应力或低应变能的材料进行去除来达到满足约束条件的

最优结构。Querin 等<sup>[2-3]</sup>在 ESO 法基础之上, 提出了双向渐进结构优化 (Bidirectional evolutionary structure optimization, BESO) 法, 对于找寻最优结构有着一定的灵活性。但对于这种设计变量变化剧烈的“硬杀”算法而言, 灵敏度计算会存在较大的

**收稿日期:** 2019-05-21; **修订日期:** 2019-10-31

**通信作者:** 鲁世红, 女, 教授, 博士生导师, E-mail: lush@nuaa.edu.cn。

**引用格式:** 余威, 韩艳彬, 种永刚, 等. 基于加权几何平均迭代的改进 BESO 法[J]. 南京航空航天大学学报, 2020, 52(3): 416-421. YU Wei, HAN Yanbin, CHONG Yonggang, et al. Improved BESO method based on weighted geometric mean iteration[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2020, 52(3): 416-421.

误差,从而导致优化结果不够理想。

针对BESO进化过程存在进化过程不够平稳的问题,引入了变密度法<sup>[4-5]</sup>中的连续惩罚方法,提出了改进BESO<sup>[6-7]</sup>。在BESO的基础之上,冯鹏升等<sup>[8]</sup>提出基于单元应力选择的BESO,利用APDL语言编写程序,完成了对深孔钻床刀杆箱的拓扑优化和重构设计,优化后的刀杆箱的应力与变形量均降低,同时整体质量减少了9.26%。Qu等<sup>[9-11]</sup>将遗传算法结合到BESO中,通过改进带有惩罚因子的交叉与变异操作,解决了优化过程中易出现的单元非连通现象。Picelli等<sup>[12]</sup>利用BESO可以让流体与固体单元之间完全切换的特性,将其应用于流体场中,解决了移动流体-结构边界的主要问题。针对进化过程中灵敏度过滤后结果收敛效果差的问题,Huang等<sup>[13]</sup>提出对灵敏度进行历史迭代均化处理,建立了本次迭代与历史迭代之间灵敏度的联系,使得结果收敛性好。范小南等<sup>[14]</sup>在考虑到历史迭代信息的引入对于结构刚度结果的影响后,引入了历史敏感度权重分割比这一概念,并对其进行了参数化研究,探讨了不同敏感度权重分割比对结果的不同影响。

目前对灵敏度均化处理都是基于算术平均算法,算术平均虽然具有简明易懂、计算简单等优点,但易受极端数据的影响。本文针对上述问题,提出使用加权几何平均算法来迭代处理,同时研究了权重因子与柔顺度之间的关系,结合具体权重因子对应的结构柔顺度随迭代历程的变化关系,能够较好地当前迭代历程权重因子的最优选择,并与其他两种迭代处理算法进行对比,验证基于加权几何平均迭代处理方法具有迭代历程更加稳定、优化效率更高的特点。

## 1 双向渐进结构优化法的模型

### 1.1 双向渐进结构优化的问题模型

基于双向渐进结构优化法的拓扑优化问题模型,服从于体积约束的最小柔顺度

$$\left\{ \begin{array}{l} \min: C = \sum_{i=1}^n C_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n F_i^T \delta_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \delta_i^T K \delta_i, \\ \forall i = 1, 2, \dots, n \\ \text{subjected to: } P = \{ \rho_1, \rho_2, \rho_3, \dots, \rho_i, \dots, \rho_n \}, \\ \forall i = 1, 2, \dots, n \\ F_i = K \delta_i \\ \sum_{i=1}^n \rho_i v_i - \alpha V_0 \leq 0 \\ \rho_{\min} \leq \rho_i \leq \rho_{\max} \quad i = 1, 2, \dots, n \end{array} \right. \quad (1)$$

式中: $C$ 为柔顺度; $C_i$ 表示第*i*个单元的柔顺度; $F_i$

表示第*i*组载荷向量; $\delta_i$ 表示第*i*组位移向量; $K$ 表示总体刚度矩阵; $\rho_i$ 表示单元*i*的材料相对体积密度,即优化中的设计变量; $v_i$ 为第*i*个单元的体积; $\alpha$ 为期望剩余材料的体积百分比,即容积率; $V_0$ 为结构初始设计域的总体积; $\rho_{\min}$ 与 $\rho_{\max}$ 分别为材料相对体积密度的上、下限,对于 $\rho_{\min}$ ,考虑到取0时会产生奇异单元刚度矩阵的情况,一般取值为小正数如 $10^{-3}$ ,表示其为空单元;对于 $\rho_{\max}$ ,一般取值为1,表示这个单元完全存在; $n$ 为结构总单元数目。

### 1.2 双向渐进结构优化法的灵敏度、过滤与更新策略

基于“软杀”的BESO使用了带惩罚指数的固体各向同性微结构模型(Solid isotropic material with penalization, SIMP)<sup>[15]</sup>,柔顺度为

$$C(\rho_i) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \rho_i^p \delta_i^T K_0 \delta_i \quad (2)$$

式中: $p$ 为惩罚因子, $K_0$ 为材料单元固有刚度矩阵。

单元灵敏度表征的是单元删除后,结构柔顺度的改变量。基于SIMP计算方法,推导出

$$\alpha_i = \frac{\partial C}{\partial x_i} = -\frac{p}{2} \rho_i^{p-1} \delta_i^T K_0 \delta_i \quad (3)$$

为了消除棋盘格现象与网格依耐性,使用一种灵敏度过滤策略

$$\alpha_e = \frac{\sum_j \omega(r_{ej}) \alpha_j}{\sum_j \omega(r_{ej})} = \sum_j \left( \frac{\omega(r_{ej})}{\sum_j \omega(r_{ej})} \alpha_j \right) = \sum_j \eta_j \alpha_j \quad (4)$$

$$\omega(r_{ej}) = \max(0, r_{\min} - r_{ej}) \quad (5)$$

式中: $r_{ej}$ 为单元*e*与单元*j*的中心距离; $\omega$ 为线性权重系数; $r_{\min}$ 为过滤半径; $\eta_j$ 为独立于灵敏度值的权重因子。

为了缓解迭代历程中出现的振荡现象,在灵敏度求解完成后使用历史迭代平均准则

$$\alpha_i = \frac{\alpha_i^k + \alpha_i^{k-1}}{2} \quad (6)$$

式中: $\alpha_i^k$ 和 $\alpha_i^{k-1}$ 分别为第*i*个单元的第*k*次和*k-1*次迭代步的灵敏度值, $\alpha_i$ 表示平均后第*i*个单元当前迭代步的灵敏度值。

在每一次迭代步中,下一次的目标体积 $V^{k+1}$ 是基于当前体积 $V^k$ 和进化率ER。

$$V^{k+1} = V^k (1 \pm ER) \quad (7)$$

当结构体积达到约束条件且满足式(8)时,迭代结束,结构达到收敛。

$$\text{change} = \frac{\left| \sum_{i=1}^N C_{k-i+1} - \sum_{i=1}^N C_{k-N-i+1} \right|}{\sum_{i=1}^N C_{k-i+1}} \leq \epsilon \quad (8)$$

式(8)中: $k$ 为当前迭代步; $N$ 一般设定为5,表示稳

定误差在10个连续迭代步内确定; $C_{k-i+1}$ 表示后5个迭代步中第 $k-i+1$ 迭代步的结构柔顺度; $C_{k-N-i+1}$ 表示后5个迭代步中第 $k-N-i+1$ 迭代步的结构柔顺度; $\epsilon$ 为许用收敛容差,本文中 $\epsilon=0.001$ 。

双向渐进结构优化法的一般流程如图1所示。

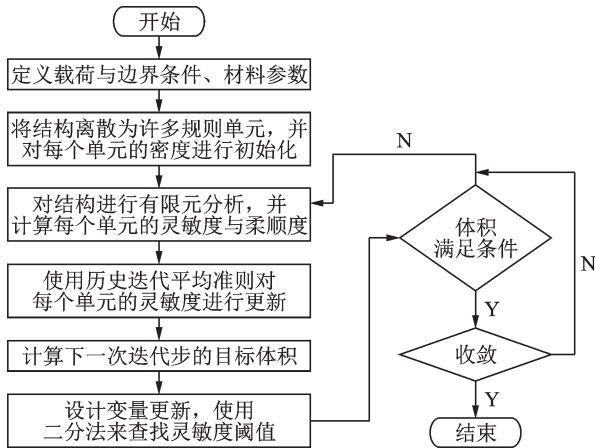


图1 BESO的一般流程

Fig.1 General process of BESO

## 2 基于几何平均历史迭代处理方法

在进化过程中,由于优化的结构易发生较大改变,单元的灵敏度值易发生大幅变化,导致结构单元对应的目标函数发生震荡,这样会使得结构迭代不稳定。因此就采用历史迭代处理方法,如式(6)所示。

一般历史迭代处理方法为了建立每次迭代之间灵敏度的联系,通常使用算术平均方法,算术平均具有反应灵敏、确定严密、简明易懂、计算简单、适合进一步演算和较小受抽样变化的影响等优点,但是易受极端数据的影响,这是因为平均数反应灵敏,每个数据或大或小的变化都会影响到最终结果。考虑到单元的灵敏度值易发生大幅变化,这会导致处理后的灵敏度值受到极端值影响,导致优化后的误差较大。因此采用基于几何平均历史迭代处理方法

$$\alpha_i = \sqrt{\alpha_i^k \cdot \alpha_i^{k-1}} \quad (9)$$

在式(9)基础之上,考虑到不同单元历程灵敏度对当前灵敏度的影响程度,引入权重因子 $a$ ,以表征不同历程灵敏度的作用。

$$\begin{cases} \alpha_i = (\alpha_i^k)^a \cdot (\alpha_i^{k-1})^b \\ b = 1 - a \end{cases} \quad (10)$$

式中: $a$ 为当前迭代步的灵敏度权重因子, $b$ 为历史迭代步的灵敏度权重因子,两个权重因子之和为1。 $\alpha_i^k$ 表示第 $i$ 个单元的第 $k$ 次迭代步的灵敏度值,

$\alpha_i^{k-1}$ 表示第 $i$ 个单元的第 $k-1$ 次迭代步的灵敏度值。

## 3 数值算例分析

### 3.1 MBB梁

MBB梁常被用于结构拓扑优化,如图2所示。考虑到对称性,取右边一半进行研究。 $L_1=200\text{ mm}$ , $L_2=30\text{ mm}$ ,外载荷 $F=1\text{ kN}$ 。材料杨氏模量 $E=70\text{ GPa}$ ,泊松比 $\nu=0.3$ ,容积率为60%。整体结构设计域采用 $100 \times 30$ 的4节点单元,进化率 $ER=0.02$ ,过滤半径 $r_{\min}=3$ 。

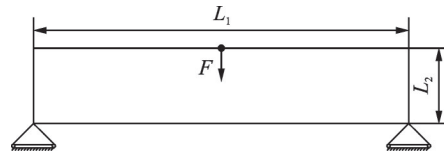


图2 MBB梁  
Fig.2 MBB beam

图3是取不同权重因子时目标函数对比结果和拟合曲线,具体权重因子对应的迭代历程如图4所示。结合图3,4分析可知,当权重因子 $a$ 大于0.65时,结构柔度虽减小(刚度增大),但迭代历程出现明显振荡现象,影响迭代历程的稳定;当权重因子 $a$ 在0.45~0.65取值时,结构柔度随着权重因子增大而先增大后减小,迭代历程还是有明显振荡现象;当权重因子 $a$ 在0.2~0.45取值时,柔度值更小(刚度更大),迭代历程也更稳定,而且迭代次数更少,效率更高。综上分析可知,权重因子最优取值范围为0.25~0.45。

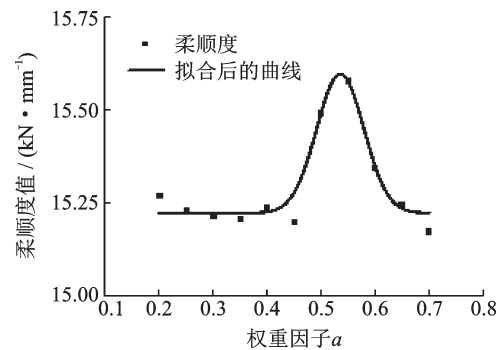


图3 不同权重因子对应的最终柔度(MBB梁)

Fig.3 Final compliance corresponding to different weighting factors (MBB beam)

分别采用原生过滤法(记为方法1)、基于算术平均的过滤法(记为方法2)、基于加权几何平均的过滤法(方法3,取最优权重因子 $a=0.3$ )进行优化,各项性能指标被列入表1中,3种方法优化后的结果对比如图5所示。根据图5可知本文方法优化

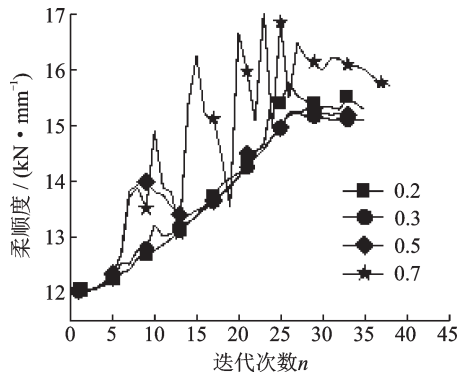


图 4 不同权重因子对应的迭代历程(MBB 梁)

Fig.4 Iterative process corresponding to different weighting factors(MBB beam)

后得到的结构更加稳定,由表 1 与图 5 分析可知,本



图 5 3 种方法优化结果(MBB 结构)

Fig.5 Optimization results of three methods

### 3.2 悬臂梁

长悬臂梁结构如图 6 所示。 $L_1$  为 200 mm,  $L_2$  为 40 mm。左侧固支,右下角垂直受力  $F = 1$  kN。杨氏模量  $E = 70$  GPa,泊松比  $\nu = 0.3$ ,容积率为 60%。整体结构设计域采用  $200 \times 40$  四节点单元,  $ER = 0.02, r_{\min} = 3$ 。

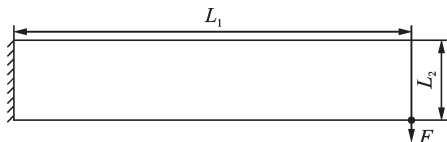


图 6 长悬臂梁

Fig.6 Long cantilever beam

图 7 表示短悬臂梁结构。 $L_1$  为 100 mm,  $L_2$  为 40 mm。左侧固支,外载荷  $F = 1$  kN 作用于右端中心,方向向下。杨氏模量  $E = 70$  GPa,泊松比  $\nu = 0.3$ ,容积率为 60%。整体结构设计域采用  $200 \times 40$  的 4 节点单元,进化率  $ER = 0.02$ ,过滤半径  $r_{\min} = 3$ 。图 8 是分别取不同权重因子时目标函数对比结果和拟合曲线,图 9 是不同具体权重因子

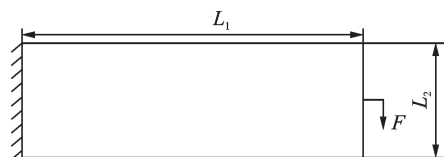


图 7 短悬臂梁

Fig.7 Short cantilever beam

文方法的结构应变能峰值与最终柔顺度值接近,表明本文方法在迭代历程中最为稳定,即本文方法的寻优能力更为稳定。本文方法优化后最终柔顺度与方法 1、2 接近,保证了结构的刚度,迭代次数最少,算法效率相较方法 1 提高了 30%,相较方法 2 则提高了 10.3%,表明本文方法算法效率更高。

表 1 3 种方法优化得到的各项性能指标

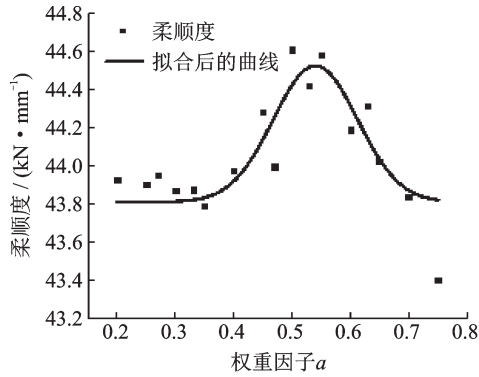
Table 1 Various performance indicators obtained by optimization of three methods

优化方法	最终柔顺度 值 $C_1$	结构应变能 峰值 $C_2$	迭代次数 $n$
方法 1	15.278 1	19.738 6	56
方法 2	15.108 1	18.204 7	39
本文方法	15.115 3	15.229 2	35

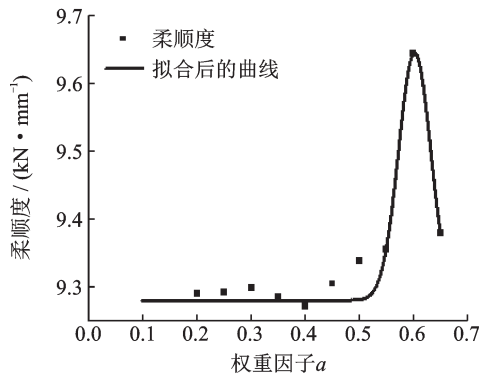
分别对应的迭代历程。

结合图 8、9 分析可知,对于长悬臂梁与短悬臂梁结构,纵观整个取值区间,当权重因子  $a$  取值大于 0.7 时,柔度都有下降,但迭代历程出现明显振荡现象,影响迭代历程的稳定。当权重因子  $a$  在 0.45~0.7 取值时,柔度都不是最小,而且迭代历程不够稳定,出现了振荡现象;只有当权重因子  $a$  在 0.2~0.45 取值时,两种结构柔度值都更小(刚度更大),迭代历程也都更稳定,而且迭代次数更少,效率更高。综上分析可知,权重因子最优取值范围选取为 0.25~0.45。

分别采用原生过滤法(记为方法 1)、基于算术平均的过滤法(记为方法 2)、基于加权几何平均的过滤法(记为方法 3,取最优权重因子  $a = 0.3$ )对长悬臂梁与短悬臂梁结构进行优化,3 种方法优化结果分别如图 10、11 所示,各项性能指标被列入表 2、3 中。结合图 10、11 分析可知,对于悬臂梁而言,本文方法优化后的结果相较其他 2 种方法而言最为稳定。结合图 10、11 和表 2、3 分析可知,对于长(短)悬臂梁而言,本文方法优化后的结构应变能峰值最为接近最终柔顺度值,而其余 2 种方法的结构应变能峰值与最终柔顺度值相差较大,表明本文方法的迭代历程最为稳定,说明本文方法的寻优能力更为稳定。本文方法对长、短悬臂梁优化后最终柔顺度与方法 1、2 接近,保证了结构的刚度,同时对



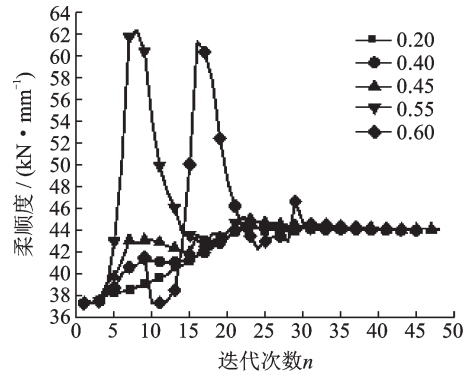
(a) Final compliance corresponding to different weighting factors (Long cantilever beam)



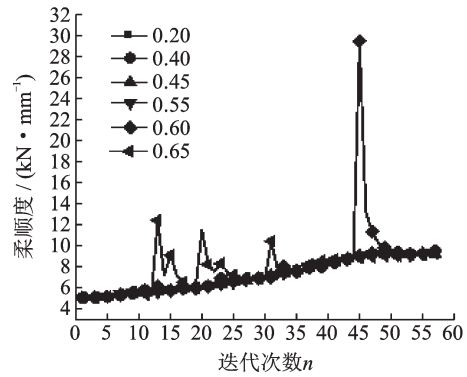
(b) Final compliance corresponding to different weighting factors (Short cantilever beam)

图8 悬臂梁下不同权重因子对应的最终柔顺度

Fig.8 Final compliance corresponding to different weighting factors of cantilever beam



(a) Iterative process corresponding to different weighting factors (Long cantilever beam)



(b) Iterative process corresponding to different weighting factors (Short cantilever beam)

图9 悬臂梁下不同权重因子对应的迭代历程

Fig.9 Iterative process corresponding to different weighting factors of cantilever beam

长悬臂梁优化的算法效率相较于方法1、2分别提升了29.2%、12.8%，而对短悬臂梁优化的算法效

率相较于方法1、2分别提升了33.3%、20.5%，表明本文方法算法效率更高。



(a) Method 1 (Long cantilever beam)



(b) Method 2 (Long cantilever beam)



(c) The proposed method (Long cantilever beam)

图10 3种方法优化结果(长悬臂梁)

Fig.10 Optimization results of three methods (Long cantilever beam)



(a) Method 1 (Short cantilever beam)



(b) Method 2 (Short cantilever beam)



(c) The proposed method (Short cantilever beam)

图11 3种方法优化结果(短悬臂梁)

Fig.11 Optimization results of three methods (Short cantilever beam)

表2 3种方法优化得到的各项性能指标(长悬臂梁)

Table 2 Performance indicators obtained by optimization of three methods (long cantilever beam)

优化方法	最终柔顺度 值 $C_1$	结构应变能 峰值 $C_2$	迭代次数 $n$
方法1	44.221 7	48.621 8	48
方法2	43.823 5	47.732 7	39
本文方法	43.562 0	43.721 4	34

表3 3种方法优化得到的各项性能指标(短悬臂梁)

Table 3 Performance indicators obtained by optimization of three methods (short cantilever beam)

优化方法	最终柔顺度 值 $C_1$	结构应变能 峰值 $C_2$	迭代次数 $n$
方法1	15.559 3	40.960 5	87
方法2	9.619 5	13.589	73
本文方法	9.298 0	9.305 4	58

## 4 结 论

提出了一种基于加权几何平均改进的BESO,能够较好地完成对当前迭代历程权重因子的最优选择,与当前常用的原生过滤法、基于算术平均的过滤法两种方法进行对比,在保持相同刚度的同时,基于加权几何平均改进的BESO明显减轻了震荡现象,提高了迭代历程的稳定性,具有寻优能力更稳定且迭代次数少的特点,对于MBB梁算法效率相较于原生过滤法、基于算术平均的过滤法分别提高了30%、10.3%;对于长悬臂梁算法效率分别提高了29.2%、12.8%;对于短悬臂梁算法效率分别提高了33.3%、20.5%。基于加权几何平均改进的BESO寻优能力更强且效率更高,具有好的参考和应用价值。

### 参考文献:

- [1] XIE Yimin, STEVEN G P. A simple evolutionary procedure for structural optimization[J]. *Comput Struct*, 1993,49(5): 885-96.
- [2] QUERIN O M, STEVEN G P, XIE Y M. Evolutionary structural optimisation (ESO) using a bidirectional algorithm[J]. *Engineering Computations*, 1998, 15(8): 1031-1048.
- [3] QUERIN O M, YOUNG V, STEVEN G P, et al. Computational efficiency and validation of bidirectional evolutionary structural optimisation[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics & Engineering*, 2000, 189(2): 559-573.
- [4] TALISCHI C, PAULINO G H, PEREIRA A, et al. PolyTop: A Matlab implementation of a general topology optimization framework using unstructured polygonal finite element meshes[J]. *Structural & Multidisciplinary Optimization*, 2015, 45(3): 329-357.
- [5] LAZAROV B S, WANG Fengwen, SIGMUND O. Length scale and manufacturability in densitybased topology optimization[J]. *Archive of Applied Mechanics*, 2016, 86(1/2): 189-218.
- [6] HUANG Xiaodong, XIE Yimin. Evolutionary topology optimization of continuum structures: Methods and applications[M]. Chichester, United Kingdom: John Wiley & Sons, Ltd, 2010.
- [7] PANESAR A, ASHCROFT I, BRACKETT D, et al. Design framework for multifunctional additive manufacturing: Coupled optimization strategy for structures with embedded functional systems[J]. *Additive Manufacturing*, 2017,16: 98-106.
- [8] 冯鹏升,薄瑞峰,鲁岩,等. 基于单元应力选择的BESO算法及其应用研究[J]. *机械设计*, 2018, 35(2): 23-27.  
FENG Pengsheng, BO Ruifeng, LU Yan, et al. Research on method and application of BESO based on element stress[J]. *Journal of Machine Design*, 2018, 35(2): 23-27.
- [9] QU Dongyue, HUANG Yangyang, SONG Jinyu. Structural topology optimization based on improved genetic algorithm[C]//*Proceedings of the 4th International Conference on Mechanical Engineering and Green Manufacturing*. Xi'an, China: [s.n.], 2015: 105-109.
- [10] QU Dongyue, HUANG Yangyang, SONG Jinyu. The periodic structure topology optimization using improved genetic algorithm[C]//*Proceedings of International Conference on Mechatronics, Manufacturing and Industrial Informatics*. Hohhot, China: [s.n.], 2015: 95-101.
- [11] QU Dongyue, HUANG Yangyang, SONG Jinyu. The three-dimensional unsteady numerical analysis of the internal flow field of the new control valve[C]//*Proceedings of Advance Materials Research*. China: Modern Technologies for Engineering, Applied Mechanics and Material Science, 2014: 112-116.
- [12] PICELLI R, VICENTE W M, PAVANELLO R. Evolutionary topology optimization for structural compliance minimization considering design-dependent FSI loads[J]. *Finite Elements in Analysis and Design*, 2017, 135: 44-55.
- [13] HUANG Xiaodong, XIE Yinmin. Convergent and mesh-independent solutions for the bidirectional evolutionary structural optimization method[J]. *Finite Elem Anal Des*, 2007,43: 1039-1049.
- [14] 范小南. BESO算法灵敏度权重分析与新型结构设计探讨[D]. 长沙:湖南大学, 2018.  
FAN Xiaonan. BESO algorithm sensitivity weight analysis and application to structural design[D]. Changsha: Hunan University, 2018.
- [15] BENDSOE M P. Optimal shape design as a material distribution problem[J]. *Struct Optim*, 1989, 1: 193-202.

(编辑:陈珺)