

DOI:10.16356/j.1005-2615.2020.01.007

一种计算复合材料层合板面外应力的新型线性分析方法

张元卿, 李锐, 赵直钦

(中国商飞上海飞机设计研究院, 上海, 201210)

摘要: 复合材料层合板壳结构的面外应力对于层间分层的起始和扩展具有重要意义。首先简要地给出了经典的非协调位移有限元列式, 然后基于修正的 H-R 变分原理导出了单元面外应力变量与位移变量的关系。面外应力的有限元线性系统为面外应力边界条件的引入提供了方便。同时, 通过该线性系统可直接获得节点上唯一且连续的面外应力结果。与非协调位移有限元的结果比较, 本文的方法可明显地提高数值结果的精度, 且计算效率及资源要求均优于非协调单元法和非协调广义混合元法。

关键词: 复合材料层合板; 修正的 H-R 变分原理; 有限元方法; 应力分析

中图分类号: TB33, O343

文献标志码: A

文章编号: 1005-2615(2020)01-0061-05

A New Linear Analysis Method for Calculating Out-of-Plane Stress of Composite Laminates

ZHANG Yuanqing, LI Rui, ZHAO Zhiqin

(China COMAC Shanghai Aircraft Design and Research Institute, Shanghai, 201210, China)

Abstract: The out-of-plane stress of composite laminated plates and shells is of great significance to the initiation and expansion of interlaminar delamination. Firstly, the formulation of classical non-compatible displacement finite element is given out briefly. And then, based on the modified Hellinger-Reissner (H-R) principle, the relationship between out-of-plane stress variables and displacement variables is derived. The finite element linear system of out-of-plane stress provides convenience for the introduction of out-of-plane stress boundary conditions. At the same time, the uniqueness and continuity of the out-of-plane stress at the node can be obtained directly by the finite element linear system. Compared with the results of non-compatible displacement finite element method, the proposed method can improve the accuracy of numerical results obviously, and the computational efficiency and resource requirements are superior to the non-compatible symplectic element method and the non-compatible generalized mixed element method.

Key words: composite laminates; modified H-R variational principle; finite element method; stress analysis

由于复合材料层合板壳结构的多种优异特性, 其在现代工程结构中的应用越来越广泛。复合材料层合板壳结构的面外应力对于层间分层的起始和扩展具有重要意义。为了模拟这类结构中面外应力沿厚度方向的非线性分布行为, 前人提出了许多分析方法。关于各类具有代表性的方法的综述

可参考文献[1-5]。文献[5]详细地分析并评估了常规的位移有限元法分析复合材料层合结构层间应力的优缺点。

就位移有限元法而言, 其应力恢复方案是: 根据节点的位移结果和本构关系计算单元内高斯点的应力, 然后采用外插值法计算节点的应力。这种

收稿日期: 2019-05-27; 修订日期: 2019-07-19

通信作者: 张元卿, 男, 研究员, E-mail: zhang_yuan_qing@yeah.net。

引用格式: 张元卿, 李锐, 赵直钦. 一种计算复合材料层合板面外应力的新型线性分析方法[J]. 南京航空航天大学学报, 2020, 52(1): 61-65. ZHANG Yuanqing, LI Rui, ZHAO Zhiqin. A new linear analysis method for calculating out-of-plane stress of composite laminates[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2020, 52(1): 61-65.

应力恢复方案势必导致相邻单元同一节点应力结果的不同,所以还需对不同单元同一节点的应力进行磨平处理。另外,根据本构关系逐个单元求解高斯点的应力不便引入应力边界条件,因而边界上节点的应力与已知的外载荷值不一致^[6]。

二维问题或三维问题的杂交应力元的应力精度较高^[6]。根据修正的H-R变分原理建立的三维部分杂交应力元^[5]表明,不需要假设所有应力分量的应力场。与传统杂交应力元相比,部分杂交应力元^[5]提高了计算效率,但是应力结果的精度仍然取决于良好应力模式的选择。

文献[4]的部分混合元包含3个位移分量和两个面外剪切应力分量。两类变量均采用相同的拉格朗日插值函数。这种部分混合元法能确保结构表面面外剪切应力与边界上已知的剪切应力一致,但是不能满足面外法向应力在界面上的连续性。

基于修正的H-R变分原理,可以直接建立半解析混合元^[7-11](也称为Hamiltonian混合元),这种部分混合元包含3个位移分量和3个面外应力分量。该单元最显著的优点是通过传递矩阵技术保证层间位移和面外应力的连续性,并能自动满足结构表面3个面外应力的边界条件。然而,由于半解析混合元是平面元,故不适合厚度不均匀的结构和大规模有限元问题。另外,当传递矩阵的操作涉及较多层数时,会出现误差积累问题,可能影响结果精度。

最近,文献[12]提出了一种8节点的非协调单元,与半解析混合元不同之处是不受结构几何形状和单元规模的限制。基于该单元模型可同时求解位移和面外应力,且在网格划分较稀疏的情况下节点的面外应力精度高。一般情况下,非协调单元的面外应力精度高于非协调杂交应力元的面外应力精度。但是,由于数学模型中包含了两类变量,与非协调混合元^[13]和含参数非协调单元^[14]类似,其对应的线性系统所占内存空间较大。

事实上,网格密度一定的情况下,非协调位移有限元法的位移结果比较精确。考虑到复合材料层合结构的特点,本文主要目的是为复合材料层合板的面外应力计算介绍一种可选的方法。

1 基本理论

1.1 势能原理及修正的H-R变分原理

为了简便,这里事先假设被分析对象的位移边界 $u - \bar{u} = 0$,并忽略体积力,则势能原理为

$$\Pi_P = \int_V \frac{1}{2} (\varphi u)^T C (\varphi u) dV - \int_{S_s} \bar{T}^T u dS \quad (1)$$

式中: φ 为微分操作矩阵; $u = [u_1 \ u_2 \ u_3]^T$ 为位

移向量; C 为材料矩阵; V 为结构的体积; S 为结构的表面积; $\bar{T} = [\bar{T}_1 \ \bar{T}_2 \ \bar{T}_3]^T$ 是作用在 S_s 上已知的表面力。

修正的H-R变分原理可表达为^[7-13]

$$\Pi_{MHR} = \int_V L_M dV - \int_{S_s} \bar{T}^T u dS \quad (2)$$

式中 L_M 为Reissner's能密度函数,表达式为

$$L_M = -\frac{1}{2} \sigma_o^T \Phi_{11} \sigma_o + \sigma_o^T [(\varphi_1 u) + \Phi_{21}^T (\varphi_2 u) + (\varphi_3 u)] + \frac{1}{2} (\varphi_2 u)^T \Phi_{22} (\varphi_2 u) \quad (3)$$

式中: $\sigma_o = [\sigma_{13} \ \sigma_{23} \ \sigma_{33}]^T$ 为面外应力; Φ_{11} , Φ_{21} 和 Φ_{22} 为材料参数矩阵; φ_1 , φ_2 和 φ_3 为算子矩阵。

面内应力、位移和面外应力的关系为^[7-13]

$$\sigma_i = \Phi_{21} \sigma_o + \Phi_{22} (\varphi_2 u) \quad (4)$$

式中 $\sigma_i = [\sigma_{11} \ \sigma_{22} \ \sigma_{12}]^T$ 。

1.2 插值函数

根据非协调位移元理论^[15],将位移插值表达式分为协调部分和非协调部分

$$u = Nq_e + N_r r_e \quad (5)$$

式中: q_e 为单元的位移向量; r_e 为单元内部节点位移向量; N 和 N_r 为插值函数矩阵。

面外应力可用式(5)中的插值函数 N 表达^[7-13]

$$\sigma_o = Np_e \quad (6)$$

式中 p_e 为单元节点的面外应力向量。

2 非协调位移元列式

将式(5)代入式(1),可得离散形式的泛函

$$\begin{aligned} \Pi_P(q_e, r_e) = & \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{2} q_e^T D_{qq} q_e + q_e^T D_{qr} r_e + \frac{1}{2} r_e^T D_{rr} r_e - f_q^T q_e - f_r^T r_e \right] \end{aligned} \quad (7)$$

式中: $D_{qq} = \int_{V_i} (\varphi N)^T C (\varphi N) dV$, $D_{qr} =$

$$\int_{V_i} (\varphi N)^T C (\varphi N_r) dV, D_{rr} = \int_{V_i} (\varphi N_r)^T C (\varphi N_r) dV,$$

$$f_q = \int_{S_i} \bar{T}^T N dS, f_r = \int_{S_i} \bar{T}^T N_r dS.$$

考虑式(7)中内部节点 r_e 的变分可得 r_e 和 q_e 的关系式

$$r_e = -Q_{rq} q_e (Q_{rq} = -D_{rr}^{-1} D_{qr}^T) \quad (8)$$

将式(8)代入式(7)消去 r_e ,再由 q_e 的变分有单元列式

$$(D_{qq} - D_{qr} D_{rr}^{-1} D_{qr}^T) q_e = f_q \quad (9)$$

根据式(9)对有限元模型单元进行组装,可得整个结构的有限元线性系统

$$Dq = f \quad (10)$$

式中: $D = \sum (D_{qq} - D_{qr} D_{rr}^{-1} D_{qr}^T)$, $q = \sum q_e$, $f = \sum f_q$ 。

3 面外应力与位移的关系

根据文献[12-13]的方法,将式(5)和式(6)代入式(2),并利用式(8)消去内部节点位移向量 r_e 后

$$\prod_{MHR} = \sum_n \left[-\frac{1}{2} p_e^T K_{pp} p_e + p_e^T R_{pq} q_e + \frac{1}{2} q_e^T R_{qq} q_e - f_q^T q_e \right] \quad (11)$$

式中: $K_{pp} = \int_{V_i} N^T \Phi_{11} N dV$, $R_{pq} = K_{pq} - K_{pr} Q_{rq}$, $R_{qq} = K_{qq} + Q_{qr}^T K_{rr} Q_{rq} - K_{qr} Q_{rq} + (K_{qr} Q_{rq})^T$, $K_{pq} = \int_{V_i} N^T [(\varphi_1 N) + \Phi_{21}^T (\varphi_2 N) + (\varphi_3 N)] dV$, $K_{pr} = \int_{V_i} N^T [(\varphi_1 N_r) + \Phi_{21}^T (\varphi_2 N_r) + (\varphi_3 N_r)] dV$, $K_{qq} = K_{qq}^T = \int_{V_i} (\varphi_2 N)^T \Phi_{22} (\varphi_2 N) dV$, $K_{qr} = \int_{V_i} (\varphi_2 N)^T \Phi_{22} (\varphi_2 N_r) dV$, $K_{rr} = K_{rr}^T = \int_{V_i} (\varphi_2 N_r)^T \Phi_{22} (\varphi_2 N_r) dV$ 。

由 $\delta \prod_{MHR} (p_e, q_e) = 0$ 可得到欧拉方程

$$K_{pp} p_e = R_{pq} q_e \quad (12)$$

$$R_{pq}^T p_e + R_{qq} q_e = f_q \quad (13)$$

式(12)和式(13)的联立形式是文献[13]中的非协调广义混合元。这类混合元与非协调单元^[12]类似,包含了两类变量,其求和后的有限元线性系统要求较大的内存资源。

4 面外和面内应力的求解

为了避免文献[12]非协调单元和文献[13]非协调广义混合元要求较大计算机资源的问题,本方直接采用式(10)首先求解结构的位移,然后根据面外应力与位移关系式(12)求解结构的面外应力。因此,式(13)对于本文方法而言没有实质的意义。

4.1 面外应力的线性系统

考虑到面外应力变量与位移变量在结构域内均是连续的特点,对式(12)求和后可得到关于整个结构所有节点面外应力变量的有限元线性系统

$$Kp = \psi \quad (14)$$

式中: $K = \sum K_{pp}$, $p = \sum p_e$, $\psi = \sum R_{pq} q_e$ 为已知的列向量。

通过式(14)可以直接获得整个结构面外应力

的结果,各节点上的面外应力是唯一且连续的,且式(14)的形式为引入结构表面面外应力边界条件提供了方便。

4.2 面内应力的计算

将式(5)和式(6)代入式(4),并利用式(8)消去单元内部节点的位移向量 r_e ,则计算各单元面内应力的表达式为

$$\sigma_{ie} = \Phi_{21} (Np_e) + \Phi_{22} Rq_e \quad (15)$$

式中 $R = [(\varphi_2 N) - (\varphi_2 N_r) D_{rr}]$ 。

与文献[7-11]中的方法相同,以上的面内应力计算是按单元逐一进行的。

5 数值算例

5.1 面外应力的收敛性

为了验证目前方法数值结果的收敛性,下面考虑几何尺寸(长为 a , 宽为 b) $a = b = 1.0$ 和厚度 $h = 0.10$ 的板。边界条件为:在 $x_1 = 0$ 和 $x_1 = a$ 处, $\sigma_{11} = u_2 = u_3 = 0$; 在 $x_2 = 0$ 和 $x_2 = b$ 处, $\sigma_{22} = u_1 = u_3 = 0$ 。假设上表面施加垂直向上的载荷 $p = 1.0 \sin(\pi x/a) \sin(\pi y/b)$, 下表面的 3 个面外应力分量为零。材料参数为: $E_{11} = 25E_{22} = 25E_{33}$, $G_{12} = G_{13} = 0.5E_{33}$, $G_{23} = 0.2E_{33}$, $\mu_{12} = \mu_{13} = \mu_{23} = 0.25$ 。

4 个有限元模型的网格分别为 $6 \times 6 \times 6$, $8 \times 8 \times 8$, $10 \times 10 \times 10$, $12 \times 12 \times 12$ 。

图 1 和图 2 中的横坐标为单元体积的对数,纵坐标为误差,其中符号 NC3D8 代表 ABAQUS® 的 8 节点非协调位移元的结果(通过外插值法求得节点应力后进行了磨平处理)。

图中的误差计算公式为

$$\text{Error} = \frac{|\text{Exact} - \text{Element}|}{|\text{Exact}|} \times 100\% \quad (16)$$

式中 Element 为有限元解,精确解取自文献[16]。

从图 1 可以看出,面外剪切应力 $\sigma_{13}(0, b/2, h/2)$ 的精度明显高于非协调位移元 NC3D8 的精度。即使在网格较稀疏的情况下, $\sigma_{13}(0, b/2, h/2)$ 的结果也比较理想。当然,这里没

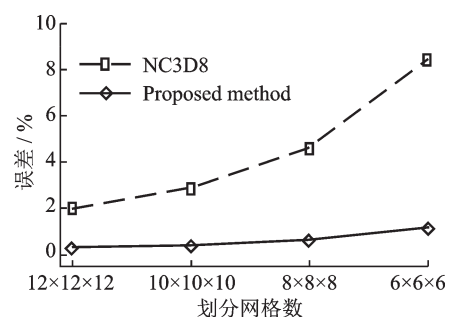


图 1 关于 $\sigma_{13}(0, b/2, h/2)$ 的比较

Fig.1 Comparison of $\sigma_{13}(0, b/2, h/2)$

有给出面外剪切应力 $\sigma_{23}(a/2, 0, h/2)$ 的收敛性图示。实际上, $\sigma_{23}(a/2, 0, h/2)$ 与 $\sigma_{13}(0, b/2, h/2)$ 收敛情况是类似的。

图2表明,由本文方法所得的 σ_{33} 的精度与 NC3D8 的精度基本一致。

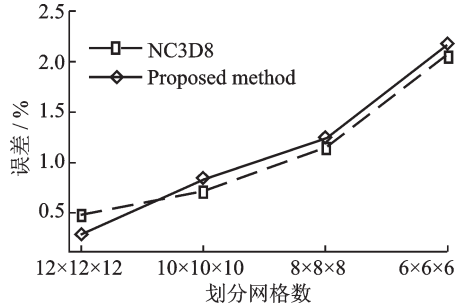


图2 关于 $\sigma_{33}(a/2, b/2, h/2)$ 的比较
Fig.2 Comparison of $\sigma_{33}(a/2, b/2, h/2)$

5.2 位移与应力的精度

考虑复合材料层合板 $[0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ]$, 几何尺寸 $b=2a=1.0$, 厚度 $h=0.10$, 每层厚度相同。材料参数、边界条件和加载情况与 5.1 节中的例子相同。模型的网格划分为 $8 \times 16 \times 8$ 。

各个变量沿厚度方向变化的结果分别如图 3—8 所示。图 3 及图 5—8 表明, 本文的位移结果 u_1 及应力 σ_{13}, σ_{11} 和 σ_{12} 的结果与精确解^[16] 和文献[12]的结果吻合良好。图 4 表明目前方法的位移 u_3 的结果虽然没有文献[12]更贴合精确解, 但误差在 0.48% 左右。通过图 6 可以看出, 目前方法的面外应力 σ_{33} 的精度略优于文献[12]。

由图 7 表明, 面内应力 σ_{11} 于不同材料层界面

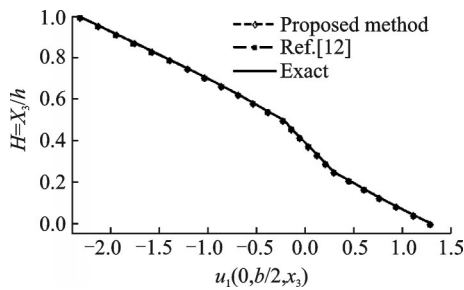


图3 u_1 沿厚度方向的分布

Fig.3 u_1 distribution along thickness direction

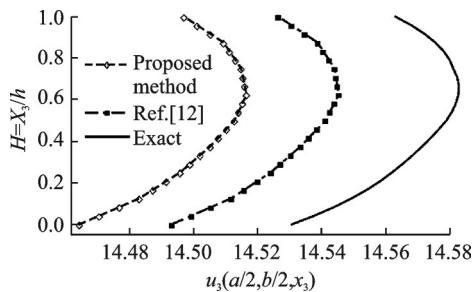


图4 u_3 沿厚度方向的分布

Fig.4 u_3 distribution along thickness direction

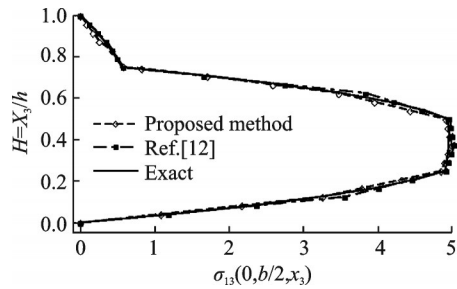


图5 σ_{13} 沿厚度方向的分布

Fig.5 σ_{13} distribution along thickness direction

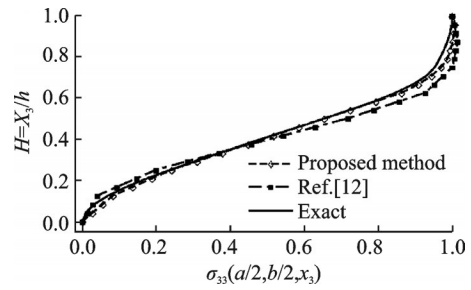


图6 σ_{33} 沿厚度方向的分布

Fig.6 σ_{33} distribution along thickness direction

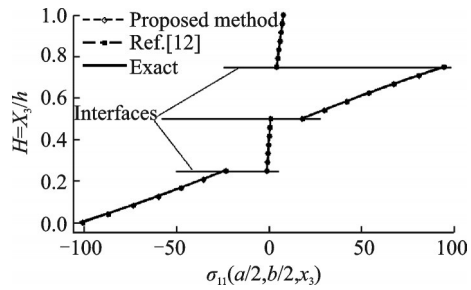


图7 σ_{11} 沿厚度方向的分布

Fig.7 σ_{11} distribution along thickness direction

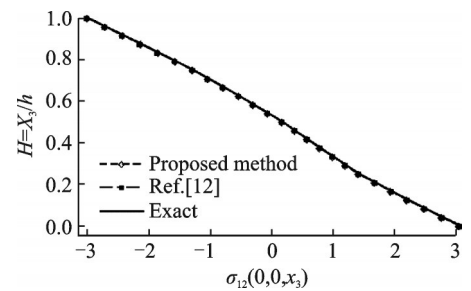


图8 σ_{12} 沿厚度方向的分布

Fig.8 σ_{12} distribution along thickness direction

是不连续的, 与客观事实相符。

另外, 本文方法与同时完成位移与面外应力计算的非协调单元^[12] 和非协调的广义混合元^[13] 在时间消耗方面有一定的优势(参见表 1)。

表 1 计算效率(5.2 节中的数值实例)

Table 1 Computational efficient (numerical example in section 5. 2)

方法	Ref.[12]	Ref.[13]	本文
Time/s	2.18	2.08	1.37

6 结 论

根据相关的文献,从修正的 H-R 变分原理出发,建立了单元面外应力与位移的关系,并进一步构建了整个结构面外应力与位移关系的有限元线性系统。该线性系统为面外应力的边界条件的引入提供了方便。

通过实例分别对本文提出的方法的收敛性和精度进行了数值分析。因为面外应力结果是通过有限元线性系统直接得到的,所以无须对相邻单元同一节点的不同应力进行磨平。另外,关于面外应力与位移关系的有限元线性系统中的应力形函数的阶次与位移形函数的阶次相同。这是目前方法中面外应力精确高的主要原因。

与半解析混合法^[7-11]比较,本文方法与非协调单元^[12]、非协调广义混合元^[13]或含参数单元^[14]相同,不受几何形状和单元的规模限制,具有广泛的适用性。另外,就数值计算所需要的内存资源而言,本文方法与常规的位移法相同,大约只需要非协调单元^[12]或非协调广义混合元^[13]的 1/4 的内存资源。

参考文献:

- [1] REDY J N. A simple higher-order theory for laminated composite plates[J]. Applied Mechanics, 1984, 51(4): 745-752.
- [2] NOOR AHMED K, SCOTT B W. Assessment of shear deformation theories for multilayered composite plates[J]. Applied Mechanics Review, 1989, 42(1): 1-13.
- [3] LIOU W J, SUN C T. A three-dimensional hybrid stress isoparametric element for the analysis of laminated composite plates[J]. Computers & Structures, 1987, 25(2): 241-249.
- [4] LIAO C L, TSAI J S. Partial mixed 3D element for the analysis of thick laminated composite structures[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1992, 35(7): 1521-1539.
- [5] HOA S V, FENG W. Hybrid finite element method for stress analysis of laminated composites[M]. US: Springer, 1998.
- [6] 田宗漱,卞学鑽. 多变量变分原理与多变量有限元方法[M]. 北京: 科学出版社, 2011.
- [7] 唐立民,褚致中,邹贵平,等. 混合状态 Hamiltonian 元的半解析解和叠层板的计算[J]. 计算力学学报, 1992, 9(4): 347-360.

- TANG Limin, CHU Zhizhong, ZOU Guiping, et al. The semi-analytical solution of mixed state Hamiltonian element and the computation of laminated plates[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 1992, 9(4): 347-360.
- [8] ZOU G P, TANG L M. A semi-analytical solution for laminated composite plates in Hamiltonian system[J]. Computer Methods in Applied Mechanics & Engineering, 1995, 128(3/4): 395-404.
- [9] 卿光辉,邱家俊,塔娜. 弹性体的正则方程和加筋板的固有频率分析[J]. 力学学报, 2004, 36(6): 749-756.
- QING Guanghui, QIU Jiajun, TA Na. Hamilton canonical equation for elastic bodies and natural frequencies analysis of integral stiffened plates[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2004, 36(6): 749-756.
- [10] QING G H, QIU J J, LIU Y. Free vibration analysis of stiffened laminated plates[J]. International Journal of Solids & Structures, 2006, 43(6): 1357-1371.
- [11] SHENG H, YE J. A state space finite element for laminated composite plates[J]. Computer Methods in Applied Mechanics & Engineering, 2002, 191(37/38): 4259-4276.
- [12] QING G H, TIAN J. Highly accurate symplectic element based on two variational principles [J]. Acta Mechanica Sinica, 2018, 34(1): 151-161.
- [13] 赵直钦,卿光辉. 改进的非协调广义混合单元及性能分析[J]. 应用数学和力学, 2019, 40(5): 519-526.
- ZHAO Zhiqin, QING Guanghui. Improved noncompatible generalized mixed elements and performance analysis[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2019, 40(5): 519-526.
- [14] 刘艳红,李锐. 含参数单元与热弹性复合材料层合板分析[J]. 复合材料学报, 2019, 36(5): 1306-1312.
- LIU Yanhong, LI Rui. Parametered symplectic element and analysis of thermoelastic composite laminates[J]. Acta Materiae Compositae Sinica, 2019, 36(5): 1306-1312.
- [15] 陈万吉. 一个高精度八结点六面体单元[J]. 力学学报, 1982, 18(3): 262-271.
- CHEN Wanji. A high-precision eight-node hexahedron element[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 1982, 18(3): 262-271.
- [16] PAGANO N J. Exact Solutions for rectangular bidirectional composites and sandwich plates[J]. Journal of Composite Materials, 1970, 4(1): 20-34.