

DOI:10.16356/j.1005-2615.2019.05.014

基于 L1 范数的 k 平面聚类算法设计

杨红鑫¹ 杨绪兵¹ 寇振宇¹ 业巧林¹ 张福全¹ 许等平²

(1. 南京林业大学信息科学技术学院, 南京, 210037; 2. 国家林业局调查规划设计院, 北京, 100714)

摘要: 基于 L2 范数度量的 k 平面聚类 (k -Plane Clustering, k PC) 设计思想, 本文提出了一种采用 L1 范数度量的聚类算法。由于在平面更新步骤中, 所导出的优化问题是非凸的, 文中给出了一种求解方法, 即将非凸问题转化为有限个子集上的凸问题, 为避免求解多个优化问题导致训练时间过长问题, 本文还设计了一种新的优选策略, 有限个子集的搜索任务可在线性时间内完成。本文所提出的方法只需要求解 k 个线性规划, 而不再是 k PC 的求解特征值问题。在人工和 UCI 数据集上的实验结果表明: 基于 L1 范数平面聚类算法的训练和测试时间更短, 且在大多数数据集上均表现出了更好的聚类性能。

关键词: L1 范数; 凸问题; 平面聚类; 线性规划

中图分类号: TP391 **文献标志码:** A **文章编号:** 1005-2615(2019)05-0681-06

k Plane Clustering Algorithm Based on L1 Norm

YANG Hongxin¹, YANG Xubing¹, KOU Zhenyu¹, YE Qiaolin¹, ZHANG Fuquan¹, XU Dengping²

(1. College of Information Science and Technology, Nanjing Forestry University, Nanjing, 210037, China;

2. State Forestry Administration Survey Planning Institute, Beijing, 100714, China)

Abstract: Inspiring by the k -plane clustering (k PC) on L2 norm metrics, a L1 norm clustering algorithm is proposed by introducing L1 metric into clustering, which is termed as L1 k PC (k -plane clustering using L1 norm). The plane-updating of L1 k PC can be characterized by a nonconvex optimization problem. An alternative strategy is provided to conquer such non-convexity. That is, the nonconvex problem can be transformed into a series of convex problems on a finite number of subsets. Meanwhile, in order to avoid solving multiple optimization problems on individual subsets thereby resulting in heavy training burden, a search strategy is also provided to seek suitable subset and this search task can be completed in a linear time. Thus the foresaid optimization problem only needs to solve k linear programming instead of solving the k eigenvalue problems in k PC. Experimental results on artificial and UCI datasets show that the proposed method has less training and testing time-consume, and comparable or even better clustering performance on the majority data sets.

Key words: L1 norm; convex problem; plane clustering; linear programming

聚类算法是分析高维数据的一种重要方法, 是进行数据整理和数据分析的关键技术, 被广泛应用于机器学习、模式识别^[1-3]和图像处理^[4-5]等领域。目前, 在这些领域存在很多聚类算法^[6-8], 其中针对

某一领域的具体研究问题, 多数研究者认为算法的选择主要取决于以下 3 个因素: (1) 数据分布; (2) 聚类目的; (3) 聚类的应用背景。根据上述 3 种因素, 可以将聚类算法分成如下几类: (1) 基于划分的

基金项目: 国家自然科学基金 (61472186, 50375057) 资助项目; 江苏省自然科学基金 (BK20161527, BK20171453) 资助项目; 江苏省研究生科研与实践创新计划 (SJKY19_0907) 资助项目。

收稿日期: 2018-09-30; **修订日期:** 2019-05-06

通信作者: 杨绪兵, 男, 博士, 副教授, E-mail: xbyang@njfu.edu.cn。

引用格式: 杨红鑫, 杨绪兵, 寇振宇, 等. 基于 L1 范数的 k 平面聚类算法设计[J]. 南京航空航天大学学报, 2019, 51(5): 681-686. YANG Hongxin, YANG Xubing, KOU Zhenyu, et al. k Plane Clustering Algorithm Based on L1 Norm[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2019, 51(5): 681-686.

方法,代表算法有 C -means, FCM (Fuzzy C -means), k -中心算法(k -medoids^[9-10])和 k PC 算法^[11];
(2)基于层次的方法,如 Fuzzy J -means 算法^[12-14];
(3)还有基于密度、网格和模型的聚类方法。本文仅关注基于划分的聚类方法。

设给定 n 个样本具有 k 个簇, k PC 算法采用“平面原型”代替 C -means 算法的“点原型”,训练过程主要包括两个步骤:(1)样本归簇。将样本聚类到距其最近的那个平面所在的簇;(2)平面更新。根据每一簇的样本,重新计算拟合超平面。重复步骤(1)和(2),直到所有样本所属簇不再发生变化。该算法对平面型分布数据的聚类效果尤为明显,自该算法提出以来,一直受到广泛学者的关注。与 C -means 一样, k PC 属于硬聚类算法,即样本只能严格属于某一类,受 FCM 算法的启发,王颖等^[15]引入模糊隶属度的概念,提出了模糊 k -平面聚类算法(Fuzzy k PC, FkPC),实验验证该算法一定程度上能够抵制噪声的影响。继续在 FkPC 基础上,引入正交约束条件,提出模糊正交 k PC 算法 OFkPC (Orthogonal FkPC)^[16]。模糊正交 OFkPC 算法仍以平面原型为出发点,该实验上表明这种引入模糊正交的方法较 FkPC 有更好的聚类效果,且具备特征降维的能力。文献[17-18]在 k PC 的基础上,引入样本邻域信息,提出了局部的 k -平面聚类算法,通过使平面局部化的方式来替代聚类平面的无限延伸性,实验验证这种方式大大提高了 k PC 的聚类效果。之后受到监督学习 TWSVM (Twin support vector machine)^[19-20]的启发,文献[21-23]提出了新的平面聚类算法,该算法在目标函数中引入类间信息进行优化,使得每类的样本点尽可能地靠近该类的拟合平面,同时远离其他类的拟合平面。然而,上述算法本质上均基于 L_2 范数设计的平面聚类算法。文献[23]提出的 FRTWSVC 算法 (Fast robust twin support vector clustering) 是目前唯一使用 L_1 范数度量的平面算法,该算法期望达到通过抑制野值影响来求解较为鲁棒的聚类平面,这种做法不是针对 k PC 算法本身,且牺牲了 k PC 算法原始的几何意义,即点到平面的距离。此外, k PC 算法的设计思想同样也应用在平面高斯人工神经网络中^[24]。单纯就聚类效果而言,上述文献的实验均说明, C -means 和 FCM 对球形或椭球形分布(高斯分布)的数据非常有效,而 k PC 比较适合平面子集分布的数据。为了保持 k PC 的几何意义,本文在 k PC 基础上,将 L_2 范数替换成 L_1 范数求解,避免了 k PC 算法中求解特征值和特征向量的问题,而且运算时

间也有所缩短,聚类精度有所提高,将此方法命名为 L_1k PC。

1 k PC 聚类

k PC 算法采用 k 个超平面代替 C -means 算法中的聚类中心,为表述方便,设待定的 k (k 为聚类个数) 个超平面,定义如下: $P_i = \{x | \mathbf{w}_i^T x - \gamma_i = 0\}$, $i = 1, 2, \dots, k$ 。给定样本集 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $x_j \in \mathbf{R}^d$, C_i 表示第 i 个聚类(Cluster, 亦可称之为簇)中的样本集,且 $C_i \cap C_j = \emptyset$, ($1 \leq i \neq j \leq k$), $\bigcup_{i=1}^k C_i = X$ 。

k PC 算法训练过程分为两步:(1)样本归簇(根据样本距 k 个超平面距离远近划分样本簇);(2)聚类更新(在每个划分好的簇点集上,重新计算该簇的拟合平面)。

k PC 算法的每个聚类平面,均需计算如下优化问题

$$\begin{aligned} \min_{(\mathbf{w}, \gamma \in \mathbf{R}^{d+1})} & \|\mathbf{A}\mathbf{w} - \mathbf{e}\gamma\|_2^2 \\ \text{s.t.} & \|\mathbf{w}\|_2^2 = 1 \end{aligned} \quad (1)$$

式中: \mathbf{A} 为簇样本, (\mathbf{w}, γ) 为拟合平面 $\mathbf{w}^T x - \gamma = 0$ 的法向量和阈值, \mathbf{e} 为分量全为 1 的列向量。如 k PC 文献所述,该问题求解可归结为计算特征值问题。

2 L_1k PC 聚类算法

如前所述, k PC 算法由于需要求解矩阵特征值问题,导致算法的时间复杂度较高。同时考虑到 L_1 范数较之 L_2 范数具有更好的性能,如鲁棒性、解的稀疏性等。本文借鉴 k PC 的设计思想,提出了基于 L_1 范数的 L_1k PC 算法,然而所导的问题是非凸的。为解决这一问题,本节给出一种将非凸问题转化为有限个子集上的凸问题,同时为避免求解多个子集上的凸问题,本文亦提供了一种优选策略,只需保证要在一个合适的子集上完成优化问题。

2.1 L_1k PC 设计思想

借鉴 k PC 的设计思想,采用 L_1 范数设计算法,所得 L_1k PC 的优化目标为

$$\begin{aligned} \min_{(\mathbf{w}, \gamma \in \mathbf{R}^{d+1})} & \|\mathbf{A}\mathbf{w} - \mathbf{e}\gamma\|_1 \\ \text{s.t.} & \|\mathbf{w}\|_1 = 1 \end{aligned} \quad (2)$$

式中: $\|\cdot\|_1$ 表示 L_1 范数。该问题的可行域 $\|\mathbf{w}\|_1 = 1$ 为 L_1 范数球壳(下文简称 L_1 球壳),集合形式记之为: $\Omega = \{\mathbf{w} | \sum_{i=1}^d |w_i| = 1, \mathbf{w} \in \mathbf{R}^d\}$, 由于不包括壳

内部的点,如原点,显然 Ω 是非凸的。其中图 1(a) 中的四边形、图 1(b) 中的由 8 个正三角形围成的正八面体的外表面,均表示 L1 球壳。

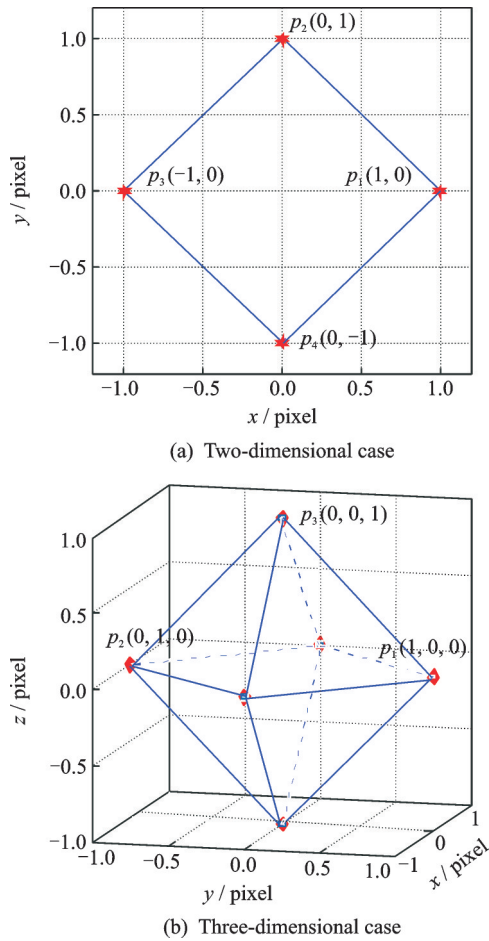


图 1 L1 球壳示意图

Fig. 1 Schematic diagram of L1 ball hull

受图 1 启发,如果将的 L1 球壳分解为各象限/卦限上的区域子集,区域子集上显然是凸集,则式 (2) 的优化问题有望解决。下文按此想法,设计转化策略。

2.2 模型转化策略

延续上文符号,线性空间 \mathbf{R}^d 中的 L1 球壳顶点集为 $\{(\pm 1, 0, \dots, 0), (0, \pm 1, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, \pm 1)\}$, 共有 d 对元素。每对元素中任取其一构成的含 d 个元素的子集,由球壳顶点生成的有界区域恰好是 \mathbf{R}^d 空间上的一个凸集,如图 1(a) 中线段 p_1p_2 , 图 1(b) 上的三角形 $p_1p_2p_3$ 区域(含边界)。该有界区域可用该区域上球壳顶点的凸线性组合线性表示。此外,有两个关键问题需要解决:(1)有界区域的个数问题;(2)为方便后期在该有界区域上解决形如式(2)的优化问题,须规定有界区域的搜索次序问题。本文拟借鉴 VC 维理论中生长函数的概念^[25],为行文方便,以引理形式描述

生长函数。

引理 点集 $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n, x_i \in \mathbf{R}^d, y_i \in \{-1, 1\}$, 生长函数 $B(n) = \max_{(x_1, \dots, x_n)} \{(h(x_1), h(x_2), \dots, h(x_n)) | h \in \mathbf{H}\}$, 如果任意大小的子集均可被皿打散, 则 $B(n) = 2^n$, 其中 $h(x_i) \in \{-1, 1\}, i = 1, 2, \dots, n, \mathbf{H}$ 为假设空间。

引理是说,对二分类问题, n 个样本所有可能的分类方法最多只有 2^n 种,即分类函数的假设空间大小为 2^n 。考虑上述 L1 球壳顶点集与生长函数对应关系,作映射有

$$f: (0, 0, \dots, \pm 1, \dots, 0) \rightarrow h(x_i) \quad (3)$$

式中 ± 1 是向量 $(0, 0, \dots, \pm 1, \dots, 0)$ 的第 i 个分量, $i = 1, 2, \dots, d$ 。易知 f 是双射。故有以下结论,以定理 1 记之。

定理 1 有界区域构成的集合同构于生长函数 $B(d)$, 且有界区域集合的基为 2^d 。

证明 由前文知,有界区域由 d 个线性无关的向量(其坐标是 L1 球壳顶点)张成的凸集,由于每个顶点中只有一个非 0 分量,由式(3)知,这 d 个顶点坐标恰好组成形如生成函数集合形式中的一个元素,且对应关系满足双射,故两者同构,且集合的基为 2^d 。证毕。

如前所述,有界区域所在的凸集共有 2^d 个,为方便搜索,需规定一个次序(该次序不唯一)。已知基为 d 的集合,其幂集共有 2^d 个元素,本文提供的搜索策略按幂集描述。事实上,在搜索过程中,只需要确定式(2)的解将出现在哪个凸的子集上,易知同子集任意两向量夹角不超过 90° (由该子集所在的 L1 球壳顶点组成的向量组,正是 1 组标准正交基),故可取子集的中心所在的向量代替,可大大简化计算。以二维为例,球壳上 4 个顶点分别为: $(1, 0), (-1, 0), (0, 1), (0, -1)$, 任取不共线的两向量所在区域的中心,记为 $(-0.5, -0.5), (0.5, -0.5), (-0.5, 0.5), (0.5, 0.5)$, 同样,根据中心亦可反推出表示该中心正交基。按中心出现的次序,可完成凸集搜索任务。 \mathbf{R}^d 中,记 L1 球壳顶点对集合 $S = \{z = (z_1, z_2, \dots, z_d) | z_i \in \{-1, 1\}\}$, 下标索引构成的集合 $I = \{1, 2, \dots, d\}$, 预置所有 $z_i = -1$, 根据 I 的幂集 2^I 中每个元素,将该元素中的下标对应的 z_i 置 1, 此时的 z/d 即为该凸集的中心。幂集遍历结束,即可得到全部的凸集中心,注意幂集的空集元素对应分量全为 -1 的中心。幂集计算方法很多,非本文重点,本文实验部分采用 Matlab 提供的函数 `combn` 计算幂集。最优凸集搜索算法描述如下。

输入:初始化 $d, z = (z_1, z_2, \dots, z_d)$, 且令每个 $z_i = -1$, 下标集 $I = \{1, 2, \dots, d\}$,

初始化 M , 如 $M = g(z/d)$; // 函数 $g(\cdot)$ 表示目标函数

输出: 最优凸集的中心 z_0

计算集合 I 的幂集, 记为 $2^I; z_0 = z/d$;

for $i = 1$ to $|2^I|$ // 遍历 2^I

取幂集第 i 个元素, 将 z 中对应此元素下标的分量全置 1, 重算 $g(z/d)$;

如果 $M > g(z/d)$, 则 $M = g(z/d), z_0 = z/d, i = i + 1$; 否则 $i = i + 1$;

重置 z 为初值, 即分量全为 -1 ;

返回 z_0

2.3 L1kPC 模型求解

由 2.2 节算法, 可得有界区域的中心, 继而可知张成该区域的 d 个球壳顶点, 记为 (p_1, p_2, \dots, p_d) , 是一组正交基, 不妨设式(2)的最优解所在的凸集的序为 i , 可得到

$$Q_i = \{w = \sum_{i=1}^d \alpha_i p_i | \alpha_i \geq 0, \sum \alpha_i = 1\} \quad (4)$$

对比式(2)的约束对应的可行域, 知 $\Omega = \cup Q_i$. 式(2)优化问题转化为

$$\begin{aligned} \min_{(w, \gamma \in \mathbb{R}^{d+1})} & \|Aw - e\gamma\|_1 \\ \text{s.t.} & w \in Q_i \end{aligned} \quad (5)$$

由 k PC 知, 拟合平面穿过簇中心, 可消去阈值 γ , 按此思想, 可令 $\gamma = -mw$, m 为簇中心, 行向量形式表示 (与簇 A 一致), 将其和式(4)一起代入式(5), 得

$$\begin{aligned} \min_{\alpha} & \|(A - em)P\alpha\|_1 \\ \text{s.t.} & \alpha \geq 0 \\ & e^T \alpha = 1 \end{aligned} \quad (6)$$

式中 $P = (p_1, p_2, \dots, p_d)$, e 定义同前, 下文不再赘述。

优化问题式(6)可通过线性规划求解, 以定理 2 描述之。

定理 2 模型式(6)可用如下线性规划求解

$$\begin{aligned} \min_{\eta} & e^T \eta \\ \text{s.t.} & D\eta \geq 0, \quad e^T B\eta = 1 \end{aligned} \quad (7)$$

式中 $B = P^T[(A - em)^T(A - em)]^{-1}[I \quad -I]$,

$D = \begin{bmatrix} B_{d \times 2n_i} \\ I_{2n_i \times 2n_i} \end{bmatrix}$, n_i 为该簇的样本数, I 是单位阵, 矩阵的下标表示矩阵的大小。

证明 令 $(A - em)P\alpha = r - s$, 记 $\eta = [r^T \quad s^T]^T$, 有 $\eta \geq 0$, 则

$$(A - em)P\alpha = [1 \quad -1]\eta \quad (8)$$

式中 I 是 $n_i \times n_i$ 阶单位阵。用 $(A - em)^T$ 左乘式(7)并整理, 得

$$\alpha = B\eta, B = P^T[(A - em)^T(A - em)]^{-1}[I \quad -I] \quad (9)$$

式(8)中计算矩阵 B 时, 需要计算一个 $d \times d$ 阶逆矩阵, 而 $(A - em)^T(A - em) \geq 0$ (Gram 矩阵), 仅当簇中样本数小于维数时, 有可能出现奇异。目前解决这种奇异性办法多种, 如: 适当增加扰动, 使其对角占优即可。将式(8)代入式(6)整理, 可得证。

联立式(4)和式(8), 得式(5)的解为

$$w = P\alpha = PB\eta \quad (10)$$

2.4 L1kPC 算法

定义算法 1 中 $g(\cdot)$ 如下

$$g(w) = \|(A - em)w\|_1 \quad (11)$$

为方便阅读, 上述 L1kPC 算法的求解过程如下。

输入: 样本 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, 簇数 k , 生成 k 个随机平面 $(w_i, \gamma_i), i = 1, 2, \dots, k$

输出: k 个簇 $C_i, i = 1, 2, \dots, k$

Step1 按 L1 距离, 将样本归为 k 个簇 C_i , 记簇 C_i 的样本为 A_i ; // 样本归簇

Step2 for $i = 1$ to k // 平面更新, 分以下几个步骤:

Step2.1 根据式(11), 取

$g(w_i) = \|(A_i - em_i)w_i\|_1$, 按表 1 的搜索算法, 返回 z_0 ;

Step2.2 根据 z_0 的分量符号, 确定其对应的标准正交基 P ;

Step2.3 计算式(9)的 B , 求解式(7)问题, 按式(10)计算 w_i ;

Step3 重复 Step1 和 Step2, 直到满足 k PC 的停机条件。

3 实验结果与分析

实验分为两个部分: (1) 采用人工数据集, 通过图表展示直观聚类效果; (2) 结合人工数据集和 UCI 数据集, 以 k PC 算法为比较对象, 从聚类时间和聚类精度两个方面, 记录 L1kPC 算法的实际性能。实验环境: 采用 Windows 7 旗舰版系统, CPU 主频 2.6 GHz, 处理器是 Intel(R) Core(TM) i5-3230M, 内存 4.0 GB。Matlab 编程实现, 版本 R2015b。

3.1 人工数据集

上述线性规划来求解聚类超平面, 采用 2 个二维人工数据 cross2D 和 iris12_linear。cross2D 是来

自数据集 Crossplane 加入 30% 的噪声生成的, iris12_linear 是通过主成分分析(Principle component analysis, PCA)对 iris 数据中第 1 和 2 类降维获得来展现,效果如图 2 所示。

图 2 的结果表明, L1kPC 继承了 kPC 的适合平面型分布数据的特性, 拟合效果亦符合直觉。

3.2 人工数据集和 UCI 数据集

本节将在人工数据集和 UCI 数据集上进行实验验证, 因 L1kPC 继承了 kPC 的设计思想, 故选择 kPC 算法为比较对象。计算时间采用 Matlab 提供 Cputime 函数计时, 单位为秒(s)。每个数据集独立运行 50 轮, 开始前均打乱样本次序, 留 10% 样本作为测试集, 其中数据集 iris23_noline 通过 PCA 对 Iris 数据中第 2 和 3 类降维获得。对比实验中, 通过 3 个指标: 训练和测试时间(单位为 s), 测试准确率(%) (比对聚类后的样本归属与原样本类别标号获得, 采用百分比%) 来反映性能, 结果取 50 次平均值, 如表 1 所示。两种算法中, 时间短或精度高者加粗显示。表 1 结果反映出, 整体结果而言, 绝大多数的数据集上, 在时间和精度两个方面, L1kPC 均表现优于 kPC。

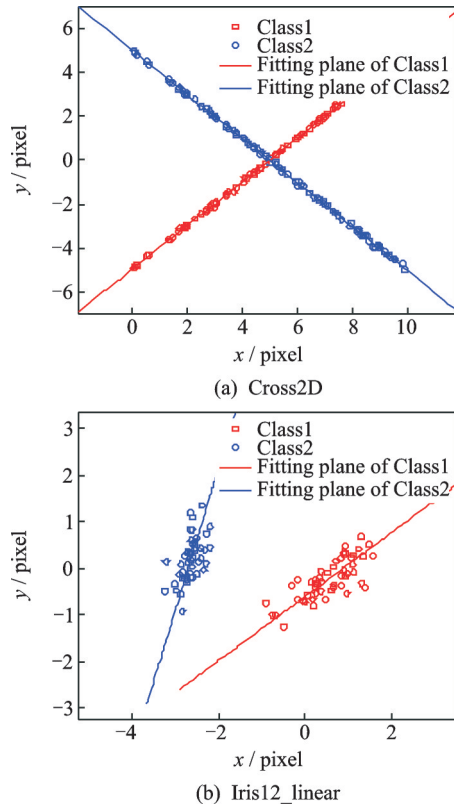


图 2 L1kPC 算法聚类效果图

Fig. 2 Clustering effect maps of L1kPC algorithm

表 1 kPC 算法与 L1kPC 算法的聚类效果比较

Tab. 1 Clustering effect comparison between kPC and L1kPC

数据集 样本数 × 维数	kPC			L1kPC		
	训练时间/s	测试时间/s	测试准确率/%	训练时间/s	测试时间/s	测试准确率/%
Iris23_noline 100 × 2	0.004 4	0.000 56	65.00	0.033 0	0.000 37	78.00
Cmc 1 473 × 8	30.950	39.030 0	59.51	0.019 0	0.000 56	58.29
Check 1 000 × 2	0.059 0	0.001 40	53.93	0.011 0	0.000 40	64.87
Iris12_linear 100 × 2	0.001 6	0.000 68	88.00	0.010 0	0.000 10	92.00
Glass 214 × 9	50.290	0.063 00	67.52	0.014 0	0.009 50	53.38
cross2D 200 × 2	0.002 6	0.000 6	56.00	0.007 0	0.000 40	73.33
Indiansdata 768 × 8	103.12	4.320 0	54.76	0.067 0	0.014 00	69.74
Class4cross 400 × 2	0.011 0	0.002 0	73.75	0.007 0	0.000 65	66.47
BUPA 345 × 6	71.390	673.85	51.98	0.008 0	0.000 45	73.99
Balance_scale 625 × 4	0.052 0	0.084 0	54.22	0.006 6	0.000 51	64.58
PID 768 × 8	0.049 0	0.006 9	56.00	0.017 0	0.000 73	50.00
Mushroom 8 124 × 22	340.55	65.830	64.25	124.23	71.320 0	58.75

4 结 论

本文借鉴 kPC 思想, 提出了基于 L1 范数的平面聚类算法 L1kPC, 由于导出的优化问题非凸, 无法直接进行优化, 文中提出一种新的解决策略, 即将非凸可行域分解为多个凸集, 从而在凸集上采用线性规划解决了该非凸问题。解决过程中, 发展出了一个在多个凸集上的优选算法, 有效避免了频繁求解线性规划问题, 这一解决策略, 为后继学者拓宽了解决此类问题的思路。实验效果上, 基于 L1

范数的平面聚类方法较之采用 L2 范数, 在时间和聚类效果上, 均表现出了优越性。

因需要将非凸可行域划分为 2^d 个凸集, 虽然文中给出了优选策略, 但随着样本空间的维数增长, 凸集个数呈指数级增长, 必然导致算法不可行。即使考虑了凸集的互相平行问题, 但优选问题的规模也至多减少一半, 即在 2^{d-1} 个凸集上进行优选。故目前的算法仅限于维数不太高情形, 或通过降维后使用。目前的研究成果有关于解决维数

灾难问题,如核方法,如何使之适合大规模问题,将是笔者下一步工作。

参考文献:

- [1] JAIN A K, DUIN R P W, MAO J. Statistical pattern recognition: A review[J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2000, 22(1): 4-37.
- [2] VEER K, SHARMA T. A novel feature extraction for robust EMG pattern recognition[J]. *Journal of Medical Engineering & Technology*, 2016, 40(4): 149-154.
- [3] WECKWERTH W, MORGENTHAL K. Metabolomics: From pattern recognition to biological interpretation[J]. *Drug Discovery Today*, 2005, 10(22): 1551-1558.
- [4] WANG Z, BOVIK A C. A universal image quality index[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2002, 9(3): 81-84.
- [5] GILBOA G, OSHER S. Nonlocal operators with applications to image processing[J]. *Multiscale Modeling & Simulation*, 2008, 7(3): 1005-1028.
- [6] ALI A, MING Y, SI T, et al. Enhancement of RWSN lifetime via firework clustering algorithm validated by ANN[J]. *Information*, 2018, 9(3): 60.
- [7] KANUNGO T, MOUNT D M, NETANYAHU N S, et al. An efficient k-means clustering algorithm: Analysis and implementation[J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2002, 24(7): 881-892.
- [8] CUTTING D R, KARGER D R, PEDERSEN J O, et al. Scatter/gather: A cluster-based approach to browsing large document collections [C]//*ACM SIGIR Forum*. [S.l.]: ACM, 2017, 51(2): 148-159.
- [9] PARK H S, JUN C H. A simple and fast algorithm for K-medoids clustering [J]. *Expert Systems with Applications*, 2009, 36(2): 3336-3341.
- [10] SHENG W, LIU X. A genetic k-medoids clustering algorithm [J]. *Journal of Heuristics*, 2006, 12(6): 447-466.
- [11] BRADLEY P S, MANGASARIAN O L. K-plane clustering[J]. *Journal of Global Optimization*, 2000, 16(1): 23-32.
- [12] BELACEL N, HANSEN P, MLADENOVIC N. Fuzzy J-means: A new heuristic for fuzzy clustering [J]. *Pattern Recognition*, 2002, 35(10): 2193-2200.
- [13] BELACEL N, ČUPERLOVIĆ-CULF M, LAFLAMME M, et al. Fuzzy J-means and VNS methods for clustering genes from microarray data [J]. *Bioinformatics*, 2004, 20(11): 1690-1701.
- [14] BEZDEK J C, EHRlich R, FULL W. FCM: The fuzzy C-means clustering algorithm[J]. *Computers & Geosciences*, 1984, 10(2/3): 191-203.
- [15] 王颖,陈松灿,张道强,等. 模糊k-平面聚类算法[J]. *模式识别与人工智能*, 2007, 20(5): 704-710.
WANG Ying, CHEN Songcan, ZHANG Daoqiang, et al. Fuzzy k-plane clustering algorithm[J]. *Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, 2007, 20(5): 704-710.
- [16] YING W H, WANG S T. Orthogonal fuzzy k-plane clustering algorithm [J]. *Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, 2011, 24(6): 783-791.
- [17] WANG Y, JIANG Y, WU Y, et al. Localized K-flats [C]//*Proceedings of the Twenty-Fifth AAAI Conference on Artificial Intelligence*. San Francisco, California: AAAI, 2011: 525-530.
- [18] ZHANG T, SZLAM A, WANG Y, et al. Randomized hybrid linear modeling by local best-fit flats [C]//*CVPR*. San Francisco, California: IEEE, 2010: 1927-1934.
- [19] SHAO Y H, ZHANG C H, WANG X B, et al. Improvements on twin support vector machines [J]. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2011, 22(6): 962-968.
- [20] KHEMCHANDANI R, CHANDRA S. Twin support vector machines for pattern classification [J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2007, 29(5): 905-910.
- [21] SHAO Y H, BAI L, WANG Z, et al. Proximal plane clustering via eigenvalues [J]. *Procedia Computer Science*, 2013, 17: 41-47.
- [22] LIU L M, GUO Y R, WANG Z, et al. k-proximal plane clustering [J]. *International Journal of Machine Learning and Cybernetics*, 2017, 8(5): 1537-1554.
- [23] YE Q, ZHAO H, LI Z, et al. L1-norm distance minimization-based fast robust twin support vector k-plane clustering [J]. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2018, 29(9): 4494-4503.
- [24] 冯哲,杨绪兵,张福全. 随机投影下的Plane-Gaussian人工神经网络[J]. *数据采集与处理*, 2017, 32(2): 354-362.
FENG Zhe, YANG Xubing, ZHANG Fuquan. Plane-Gaussian artificial neural network based on random projection[J]. *Journal of Data Acquisition and Processing*, 2017, 32(2): 354-362.
- [25] 李国正. 支持向量机导论[M]. 北京: 电子工业出版社, 2004: 49-50.
LI Guozheng. An introduction to support vector machine and other kernel-based learning methods[M]. Beijing: Electronic Industry Press, 2004: 49-50.