

DOI:10.16356/j.1005-2615.2019.04.007

基于旋转坐标系的高阶间断有限元方法非定常湍流数值模拟

张涛¹ 吕宏强¹ 秦望龙¹ 陈正武²

(1. 南京航空航天大学航空学院, 南京, 210016; 2. 中国空气动力研究与发展中心, 绵阳, 621000)

摘要: 基于高阶间断有限元方法(Discontinuous Galerkin method, DGM), 对旋转非惯性系下耦合了修正的一方程 S-A 模型的 RANS 方程进行了离散求解。为了在稀疏网格上获得更贴近真实的物面形状, 使用了多层高阶弯曲网格方法对物面进行拟合。非定常时间推进采用了隐式双时间步方法, 每个时间步产生的线性系统采用预处理的方法, 即广义最小残差方法(Generalized minimal residual method, GMRES)来求解。计算了旋转圆柱绕流以及经典翼型振荡算例的升力和力矩迟滞曲线, 与实验结果以及前人的计算结果对比验证了本文方法的正确性和有效性。

关键词: 间断有限元方法; 弯曲网格; S-A 模型; 旋转坐标系; 隐式双时间步

中图分类号: V211.3 **文献标志码:** A **文章编号:** 1005-2615(2019)04-0474-12

Numerical Simulations of Turbulent Flow Based on Rotating Reference Frame Using High-Order Discontinuous Galerkin Method

ZHANG Tao¹, LÜ Hongqiang¹, QIN Wanglong¹, CHEN Zhengwu²

(1. College of Aerospace Engineering, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing, 210016, China;

2. China Aerodynamics Research and Development Center, Mianyang, 621000, China)

Abstract: The RANS equations coupled with modified S-A model in a rotating reference frame are solved using the high-order discontinuous Galerkin method (DGM). In order to obtain more accurate wall boundaries on relatively coarse grids, a multilevel high-order curved mesh method is employed. An implicit dual time stepping method is adopted for the unsteady simulation, while generalized minimal residual method (GMRES) is deployed to solve the large linear system generated in each time step. The lift and moment hysteresis curves of rotating cylinder flow and classical airfoil oscillation are calculated. The correctness and validity of the proposed method are verified by comparing with the experimental results and previous calculation results.

Key words: discontinuous Galerkin method; curved mesh; S-A model; rotating reference frame; implicit dual time stepping

随着直升机、涡轮机和风力机等技术的发展, 研究具有越来越重要的工程意义。目前大多数对于俯仰振荡为代表的翼型非定常动态气动特性的研究, 通常采用传统的有限体积

基金项目: 国家高技术研究发展计划(“八六三”计划)(2015AA015303)资助项目; 国家自然科学基金(11272152)资助项目; 航空基金(20152752033)资助项目; 气动噪声控制重点实验室开放课题资助项目。

收稿日期: 2017-10-16; **修订日期:** 2018-03-12

通信作者: 吕宏强, 教授, 博士生导师, E-mail: hongqiang.lu@nuaa.edu.cn。

引用格式: 张涛, 吕宏强, 秦望龙, 等. 基于旋转坐标系的高阶间断有限元方法非定常湍流数值模拟[J]. 南京航空航天大学学报, 2019, 51(4): 474-485. ZHANG Tao, LÜ Hongqiang, QIN Wanglong, et al. Numerical Simulations of Turbulent Flow Based on Rotating Reference Frame Using High-Order Discontinuous Galerkin Method[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2019, 51(4): 474-485.

方法(Finite volume method, FVM)配合动网格、滑移网格或重叠网格技术^[1-4]。本文则尝试采用对复杂流动现象刻画更为有效^[5]的高精度空间格式来对以旋转圆柱和翼型的俯仰振荡为代表的旋转流场问题进行初步研究。

间断有限元方法(Discontinuous Galerkin method, DGM)作为一种高精度方法,吸收了有限元方法和有限体积法的优点,通过选取合适的基函数,轻易地延拓到高阶精度,在稀疏的网格上获得高精度的解。同时由于近似解的间断性假设,以及处理复杂物理和几何边界的能力,易于实现网格和阶数的自适应和并行计算。但是间断有限元方法对于物面形状的表达精度十分敏感^[6],一般采用物面高阶近似的方法来拟合物面,文中采用了多层弯曲网格方法^[7-8]。同时,采用高阶间断有限元方法来研究运动边界问题目前也并不多见,本文同样尝试在该方面拓展间断有限元方法的实用性。

如果将传统的动网格或滑移网格方法直接应用于间断有限元方法,由于网格会发生移动和变形,在间断有限元方法中必须在每个时间步重新对物面进行拟合、求解物面距、质量矩阵以及重新求解映射关系,这会带来额外的、极为巨大的计算量。因此本文采用了旋转坐标系方法^[9-11],将坐标系固连在旋转物体上,导出旋转非惯性系下耦合了修正的一方程 Spalart-Allmaras 湍流模型的雷诺平均 N-S 方程,再采用间断有限元对方程进行离散求解。旋转坐标系方法的另一个好处是,对于一些旋转周期性问题,如悬停旋翼问题,可以当作非惯性系中的定常问题求解,对于进一步的研究很有益处。

通过此方法,在整个非定常计算过程中,网格保持静止不动,规避了网格移动变形带来的计算复杂度。时间积分采用了隐式双时间步方法,每个伪时间步中产生的大型线性系统使用预处理的方法,即广义最小残差方法(Generalized minimal residual method, GMRES)进行求解。最后分别给出了低雷诺数旋转圆柱绕流和 NACA0012 翼型在两种不同工况下做俯仰振荡的数值模拟结果,并与实验数据和前人结果进行了对比,分析结果验证了本文方法的正确性和有效性。

1 旋转坐标系下的控制方程

旋转非惯性系中的流场控制方程在许多专著^[12-13]中已有很好的发展,也可以通过多种方式推导得到^[4,9-13],本文则采用了物理意义较为简单明晰的方式对含有绕 z 轴的旋转角速度的控制方程进

行了推导。

如图 1 所示,假定旋转非惯性笛卡尔坐标系 $o_r - xyz$ 与惯性静止笛卡尔坐标系 $o - xyz$ 重合, $o_r - xyz$ 有绕 z 轴逆时针转动的定常角速度 $\omega = (0, 0, \Omega)$ 。

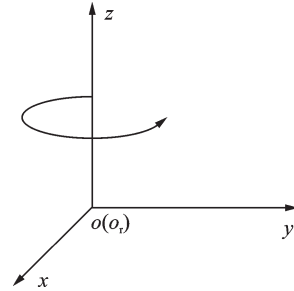


图1 旋转笛卡尔坐标系与惯性静止笛卡尔坐标系
Fig.1 Rotating Cartesian coordinate system and inertial stationary Cartesian coordinate system

在 $o - xyz$ 中观测到的绝对速度 V 与在 $o_r - xyz$ 中观测到的相对速度 V_r 间应存在关系

$$V = V_r + V_a \quad (1)$$

其中牵连速度 V_a 的定义为

$$V_a = \omega \times r \quad (2)$$

两个坐标系下,绝对加速度 a 与相对加速度 a_r 的关系为

$$a = a_r + a_e + a_c \quad (3)$$

其中牵连加速度 a_e 和科氏加速度 a_c 在旋转坐标系中定义为

$$a_e = \omega \times (\omega \times r) \quad (4)$$

$$a_c = 2\omega \times V_r \quad (5)$$

从以上可知,在非惯性系中考虑流动控制方程,可以将所谓惯性力视作一个体力项。因此,本文先从 Euler 方程出发,再通过叠加黏性项直接推广得到旋转坐标系下的 N-S 方程。

考虑惯性力及其所做的功,以旋转坐标系 $o_r - xyz$ 中变量来表达的 $x-y$ 平面内的二维 Euler 方程为

$$\frac{\partial U_r}{\partial t} + \frac{\partial F_r}{\partial x} + \frac{\partial G_r}{\partial y} = W_r \quad (6)$$

其中守恒变量及通量项为

$$U_r = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u_r \\ \rho v_r \\ \rho E \end{bmatrix} \quad F_r = \begin{bmatrix} \rho u_r \\ \rho u_r^2 + p \\ \rho u_r v_r \\ \rho u_r H \end{bmatrix} \quad G_r = \begin{bmatrix} \rho v_r \\ \rho u_r v_r \\ \rho v_r^2 + p \\ \rho v_r H \end{bmatrix} \quad (7)$$

右端源项为

$$W_r = \begin{bmatrix} 0 \\ \rho\Omega^2 x + 2\rho\Omega v_r \\ \rho\Omega^2 y - 2\rho\Omega u_r \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

式中: ρ, p 分别表示密度和压强; x, y 分别表示流场某点的两个坐标分量。由于坐标系重合,这些量在不同坐标系下的表达是相同的,因此不加以区分。 u_r, v_r 分别表示相对速度 V_r 在 x, y 方向的两个分量。

考虑到惯性力做功的影响,重新定义单位总能 E 和单位总焓 H 为^[11,13]

$$E = \frac{p}{(\gamma-1)\rho} + \frac{1}{2}(u_r^2 + v_r^2) - \frac{1}{2}(u_a^2 + v_a^2) \quad (9)$$

$$H = E + \frac{p}{\rho} \quad (10)$$

式中: γ 为理想气体比热比,文中取1.4。

式(6)通常采用绝对速度替换相对速度来重新表达。因为采用相对速度表达时,远场和物面的马赫数差距会进一步增大,如此会增加数值上的误差^[12],但也有学者采用相对速度配合特殊修改的插值方法来进行计算^[14]。本文采用绝对速度对式(6)重新进行表达。

易知绝对坐标系 $o-xyz$ 下的单位总能 e 、单位总焓 h 与旋转坐标系 o_r-xyz 下 E, H 的关系为

$$E = e - uu_a - vv_a, \quad H = h - uu_a - vv_a \quad (11)$$

将式(1,9)代入式(6),化简即可得到以绝对速度表达的旋转坐标系下的 Euler 方程

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = W \quad (12)$$

其中守恒变量以及通量项为

$$U = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho e \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} \rho(u + \Omega y) \\ \rho u(u + \Omega y) + p \\ \rho v(u + \Omega y) \\ \rho u h + \rho e \Omega y \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} \rho(v - \Omega x) \\ \rho u(v - \Omega x) \\ \rho v(v - \Omega x) + p \\ \rho v h - \rho e \Omega x \end{bmatrix} \quad (13)$$

右端源项为

$$W = \begin{bmatrix} 0 \\ \rho\Omega v \\ -\rho\Omega u \\ 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

式中: v 为绝对速度 V 在 x, y 方向的两个分量。至此便得到了在旋转非惯性系中建立的无黏可压缩流动的控制方程,该结果与文献[4,9-13]中的经典

结果一致。本文也利用振荡翼型的无黏流动模拟对该方程进行了验证。

在文中坐标系转换中,黏性应力张量 $\sigma_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij}$ 的作用在不同坐标系中仍然保持一致^[12-13]。添加黏性项后,旋转坐标系下耦合修正的一方程 Spalart-Allmaras^[8]湍流模型的可压缩雷诺平均 Navier-Stokes 方程可以写成如下的守恒形式

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F_c}{\partial x} + \frac{\partial G_c}{\partial y} - \frac{\partial F_v}{\partial x} - \frac{\partial G_v}{\partial y} = W + S \quad (15)$$

其中守恒变量和无黏通量项为

$$U = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho e \\ \tilde{v} \end{bmatrix} \quad F_c = \begin{bmatrix} \rho(u + \Omega y) \\ \rho u(u + \Omega y) + p \\ \rho v(u + \Omega y) \\ \rho u h + \rho e \Omega y \\ \tilde{v}(u + \Omega y) \end{bmatrix}$$

$$G_c = \begin{bmatrix} \rho(v - \Omega x) \\ \rho u(v - \Omega x) \\ \rho v(v - \Omega x) + p \\ \rho v h - \rho e \Omega x \\ \tilde{v}(v - \Omega x) \end{bmatrix} \quad (16)$$

黏性通量项为

$$F_v = \begin{bmatrix} 0 \\ \sigma_{xx} \\ \sigma_{yx} \\ u\sigma_{xx} + v\sigma_{yx} + kT_x \\ \frac{1}{\sigma}(\nu + \psi\nu)\tilde{v}_x \end{bmatrix}$$

$$G_v = \begin{bmatrix} 0 \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yy} \\ u\sigma_{xy} + v\sigma_{yy} + kT_y \\ \frac{1}{\sigma}(\nu + \psi\nu)\tilde{v}_y \end{bmatrix} \quad (17)$$

右端源项为

$$W = \begin{bmatrix} 0 \\ \rho\Omega v \\ -\rho\Omega u \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ c_{b1} \tilde{S} \Psi \nu + \frac{1}{\sigma} c_{b2} (\nabla \tilde{v})^2 - c_{w1} f_w \left(\frac{\Psi \nu}{d} \right)^2 \end{bmatrix} \quad (18)$$

为了进一步提高数值计算的稳定性,参照文献[8]对于S-A模型的参数进行了修正和选取,并采用类似的方法求解了物面距。由于在相对坐标下网格保持静止,因此非定常计算时只需计算一次物面距和质量矩阵,极大节约了计算量和计算时间需求。

S-A模型的湍流黏性系数输运对流项同样需要满足旋转坐标系下的几何连续要求。在振荡翼型问题中,流场中的主要流动为远场的来流,翼型的旋转效应相比之下一般较为微弱,处在相对次要的地位,因此在振荡翼型的实际计算中,不对S-A模型作任何修改也能得到较满意的结果^[4]。但对于强旋转问题,则需要对S-A模型进行进一步的修正。

2 数值方法

2.1 数值离散

旋转非惯性系下的流场控制方程与原方程相比,其特征值及特征向量系统只发生了线性改变。将计算域划分为互不重叠的单元集合 $\Omega = \cup_k \Omega_k$, Ω_k 为四边形或者三角形单元。定义 $\Phi_{h,p}$ 为单元 Ω_{vk} 上直到 p 阶的多项式函数张成的函数空间, $p \geq 0$,设单元内守恒变量的近似 $U_h \in \Phi_{h,p}$ 。对式(15)离散可得

$$\int_{\Omega} \varphi_h \frac{\partial U_h}{\partial t} d\Omega + \int_{\partial\Omega} \varphi_h F(U_h, \nabla U_h) \cdot \mathbf{n} d\sigma - \int_{\Omega} \nabla \varphi_h \cdot \mathbf{F}(U_h, \nabla U_h) d\Omega - \int_{\Omega} \varphi_h (\mathbf{W}(U_h, \nabla U_h) + \mathbf{S}(u_h, \nabla U_h)) d\Omega = 0 \quad \forall \varphi_h \in \Phi_{h,p} \quad (19)$$

式中: $\mathbf{F}(U_h, \nabla U_h) = F_c(U_h, \nabla U_h) - F_v(U_h, \nabla U_h)$, $\mathbf{G}_c(U_h, \nabla U_h) - \mathbf{G}_v(U_h, \nabla U_h)$ 。对于边界通量 $\mathbf{H} = F(U_h, \nabla U_h) \cdot \mathbf{n}$,文中采用LLF格式来求解无黏通量项,采用BR2格式^[15]来离散黏性项。

在采用间断有限元方法时,过密的网格会带来巨大的计算量和冗余的自由度,然而稀疏网格对于物面形状的表达很不精确,因此文中参照文献[7]提出的多层弯曲网格方法构造高阶曲线来拟合物面。同时通过引入人工耗散项^[6]的方法来抑制间断解附近的数值振荡,对激波进行捕捉。

2.2 边界条件

鉴于在旋转非惯性系下重新推导了流场控制方程,相应地,其边界条件也应当在相同的非惯性系下重新给定,并与式(12)进行相同形式的变量代换。

在物面,对于滑移壁面,由于没有黏性,物面无法沿其切向对流体产生作用力,但流体也无法穿透物面,流体沿物面某点法向的速度应与此点处物面

的法向速度相一致,即

$$(\mathbf{V}_n)_{\text{fluid}} = (\mathbf{V}_n)_{\text{wall}} \quad (20)$$

或者在文中的相对坐标系下表达为

$$\begin{aligned} (\mathbf{V}_m)_{\text{fluid}} &= (\mathbf{V}_m)_{\text{wall}} = 0 \\ U_{rh}^+ &= \\ &\left[\begin{array}{c} \rho^- \\ \rho^- (u_r^- - V_m n_x) \\ \rho^- (v_r^- - V_m n_y) \\ E_b^- + \frac{1}{2} \rho^- ((u_r^- - V_m n_x)^2 + (v_r^- - V_m n_y)^2) \end{array} \right] \end{aligned} \quad (21)$$

再通过与前文中相同的变量代换得到绝对坐标系速度变量表示的物面边界条件为^[16]

$$U_h^+ = \left[\begin{array}{c} \rho^- \\ \rho^- u^+ \\ \rho^- v^+ \\ E_b^- + \frac{1}{2} \rho^- ((u^+)^2 + (v^+)^2) \end{array} \right] \quad (22)$$

式中:带有“-”上标的变量取自计算域内,带有“+”上标的变量则表示边界值,此外 $V_m = \mathbf{V}_r \cdot \mathbf{n}$, $u^+ = u^- - V_m n_x$, $v^+ = v^- - V_m n_y$, $E_b^- = (\rho e)^- - 0.5 \rho^- ((u^-)^2 + (v^-)^2)$ 。

而对于无滑移绝热壁面边界条件,在壁面处流体速度应与物面速度相同,热通量为0。同理,采用绝对速度替换相对速度后,无滑移绝热壁面边界条件的表达为^[17]

$$U_h^+ = \left[\begin{array}{c} \rho^- \\ \rho^- u_w \\ \rho^- v_w \\ E_b^- + \frac{1}{2} \rho^- (u_w^2 + v_w^2) \\ 0 \end{array} \right] \quad (23)$$

式中: u_w, v_w 表示绝对坐标下壁面运动速度的分量。

对于远场边界,在相对坐标系下建立无反射边界条件并用绝对速度代换后其形式与传统的无反射边界条件一致。但在计算非定常旋转流场时,远场来流与物体间的相对几何位置关系(如迎角、侧滑角)将会随着时间步的推进而改变。当坐标系固连在旋转物体上时,应当在每个时间步对远场来流的方向作出修改。

2.3 时间积分

进行数值离散后,式(19)最终可以写为一个关于物理时间 t 的常微分方程系统

$$\mathbf{M} \frac{d\mathbf{u}_h}{dt} + \mathbf{R}(\mathbf{u}_h) = 0 \quad (24)$$

式中: \mathbf{M} 为质量矩阵; \mathbf{u}_h 为未知变量向量; $\mathbf{R}(\mathbf{u}_h)$ 为残值向量。

对于上述常微分系统,采用隐式双时间步方法

来进行求解。对式(24)的时间项进行二阶向后差分离散

$$\frac{3M^{n+1}u_h^{n+1} - 4M^n u_h^n + M^{n-1}u_h^{n-1}}{2\Delta t} + R(u_h^{n+1}) = 0 \quad (25)$$

令

$$R^*(u_h^*) = \frac{3M^{n+1}u_h^* - 4M^n u_h^n + M^{n-1}u_h^{n-1}}{2\Delta t} + R(u_h^*) \quad (26)$$

$$M^{n+1} \frac{du_h^*}{dt^*} + R^*(u_h^*) = 0 \quad (27)$$

式中: t^* 为伪时间; Δt 为物理时间步长; u_h^* 为对 u_h^{n+1} 的近似, 本文中采用线性插值的方式来构造其迭代初值 u_h^{*0}

$$u_h^{*0} = u_h^n + \frac{3u_h^n - 4u_h^{n-1} + u_h^{n-2}}{2} \quad (28)$$

式(27)为一个关于近似变量 u_h^* 和伪时间 t^* 的常微分方程系统, 可以看作一个传统的定常问题进行求解。对于式(27), 采用Newton方法进行迭代求解

$$\left(\frac{M^{n+1}}{\Delta t^*} + \frac{\partial R^*}{\partial u_h^*}(u_h^{*m}) \right) \Delta u_h^* = -R^*(u_h^{*m}) \quad (29)$$

$$\left(\left(\frac{1}{\Delta t^*} + \frac{3}{2\Delta t} \right) M^{n+1} + \frac{\partial R}{\partial u_h^*}(u_h^{*m}) \right) \Delta u_h^* = -R^*(u_h^{*m})$$

$$u_h^{*m+1} = u_h^{*m} + C\Delta u_h^* \quad (30)$$

式中: Δt^* 为伪时间步长, 松弛迭代系数 $C \in [0, 1]$ 。

对于式(29)产生的大型线性系统, 文中采用预处理的GMRES方法进行求解。

3 数值结果与分析

本节中分别对旋转效应较强的低雷诺数旋转圆柱绕流以及旋转效应较弱的跨声速翼型振荡进行了模拟, 以此验证本文方法的正确性和有效性。

3.1 低雷诺数旋转圆柱绕流模拟

为了验证本文方法的正确性, 首先对低雷诺数强旋转问题进行了模拟。计算来流 $Ma=0.3$, $Re=200$, 圆柱直径 $D=1$, 转速比 $\alpha^* = \frac{\Omega D}{2V_\infty} = 0.5$ 。

计算用网格如图2所示, 由于圆柱处在稳定旋转状态, 网格采用了各向同性的O型网格, 同时尽管雷诺数较低, 但是由于实际流动的涡系结构较为复杂, 因此物面附近的网格划分较正常情况更密一些, 总计包含960个四边形单元, 物面布置40个网格点, 网格第一层高度约为0.01, 使用了修正的S-A湍流模型, 计算采用分区并行技术进行。

图3给出了典型时刻4阶精度($p=3$)计算得到的马赫云图、流线, 以及同实验结果^[18]的对比。可

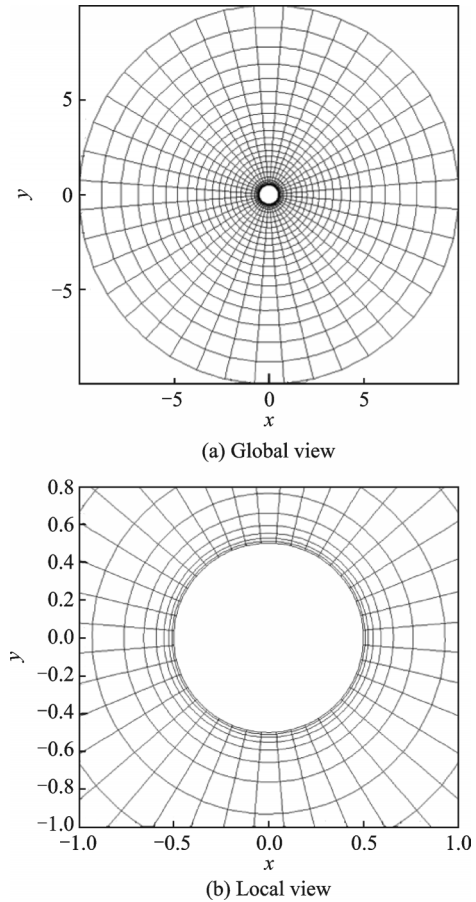


图2 旋转圆柱绕流模拟计算用网格

Fig.2 Computational grid for rotating cylinder simulation

见, 计算结果在粗糙网格上清晰地捕捉到了由于旋转效应等造成的复杂的涡系结构, 典型时刻计算得到的流线分布与实验值保持高度一致, 展现了高阶方法在涡捕捉方面较好的性能。图4给出了不同时间步时水平速度沿 x 轴方向的空间分布曲线, 数值结果与实验值^[18]总体吻合良好, 但局部仍有差距, 计算网格等有待改进。但总的来说该简单算例初步验证了本文发展的旋转坐标系间断伽辽金方法以及双时间方法的总体有效性和正确性。但由于流动雷诺数较低, 对湍流问题的进一步验证将在下文中通过高雷诺数翼型振荡问题进行。

3.2 跨音速翼型振荡模拟

本文对NACA0012翼型在两种经典工况下做周期性俯仰振荡的弱旋转非定常问题进行了数值模拟, 并与AGARD的实验数据^[19]以及参考数据^[4]进行了对比。

翼型的俯仰振荡运动规律为

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \alpha_m \sin(\omega t) \quad (31)$$

式中: α_0 为平均迎角; α_m 为最大振幅迎角; ω 为俯仰振荡角速度, 由无量纲的减缩频率 k 定义

$$k = \frac{\omega c}{2V_\infty} \quad (32)$$

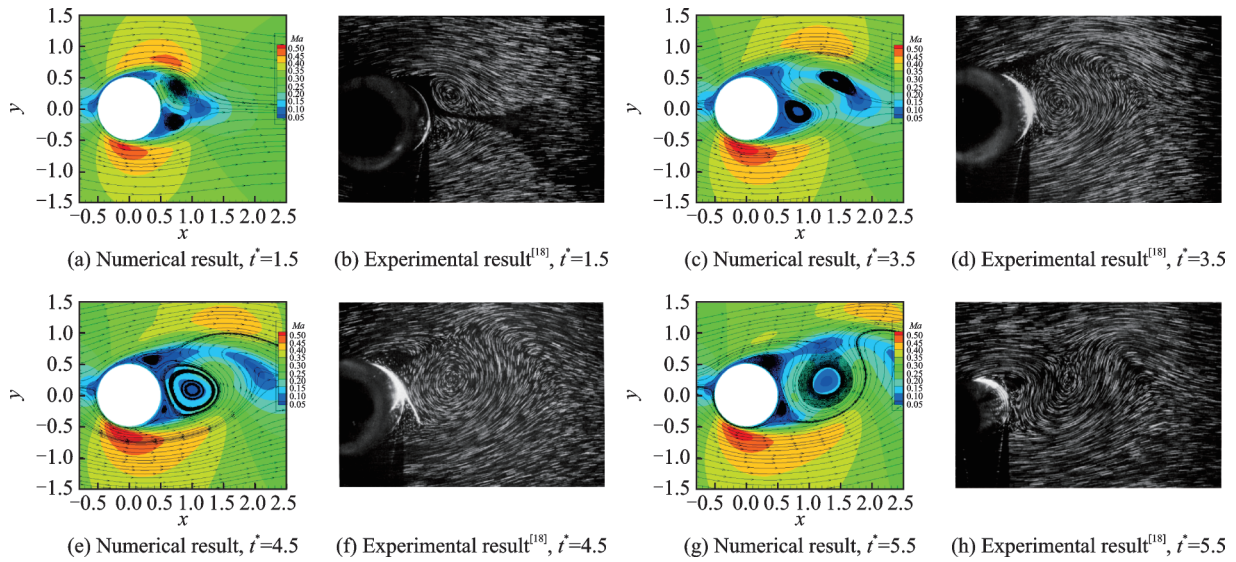


图 3 典型时刻计算值与实验值的对比($p=3$)

Fig.3 Comparison between numerical and experimental results at certain time-steps($p=3$)

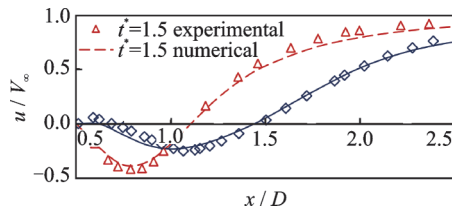


图 4 不同时刻沿 x 轴水平速度 u 的分布曲线($p=3$)

Fig.4 Distributions of the u velocity component along the x axis at different time-steps

式中: c 为翼型弦长, V_∞ 为远场自由来流速度。表 1 给出了两个算例的实验条件。

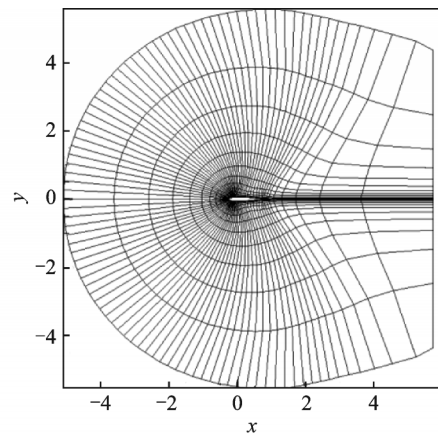
表 1 Case 1 和 Case 2 的计算条件

Tab. 1 Configurations of Case 1 and Case 2

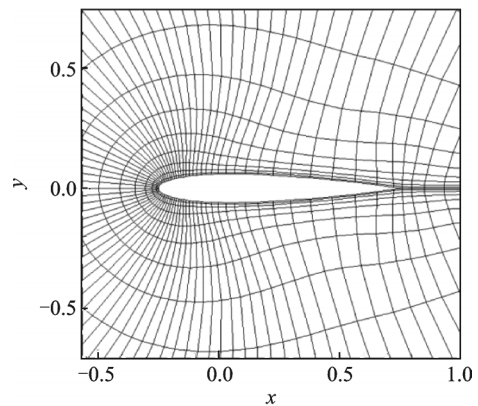
Test case	Ma	Re	$\alpha_0/$ ($^\circ$)	$\alpha_m/$ ($^\circ$)	k	Pitching-axis/ (% in chord)
1	0.6	4.8×10^6	4.86	2.44	0.081 0	25.0
2	0.6	4.8×10^6	2.89	2.41	0.080 8	25.0

为了对旋转坐标系下的控制方程和时空离散进行进一步快速验证,首先采用Euler方程在较为粗糙的网格和较低阶数下($p=2$)对振荡翼型的无黏流动进行了模拟。文中 Case 1 和 Case 2 的计算都将 1 个周期划分为 100 步来进行。无黏模拟计算用网格如图 5 所示,网格为 C 型结构,网格单元数为 1 344,物面第一层网格高度 5×10^{-3} 。

图 6 给出了对 Case 1 采用 Euler 方程($p=2$,三阶精度)进行测试计算得到的升力系数对时间步长的变化曲线。可以看到,20 个周期的计算结果呈现出了良好的周期性和正弦规律。



(a) Global view



(b) Local view

图 5 用于无黏流动模拟的计算网格

Fig.5 Computational grid for inviscid simulations

图 7 展示了用于湍流模拟的计算网格,单元数为 2 592,物面第一层网格高度为 5×10^{-6} ,选取较为保守,参考了传统有限体积方法,但远离物面后迅速放宽。网格与无黏计算网格具有相近的 C 型拓扑结构,但在物面附近大大加密,并适当放宽了其远场距离。

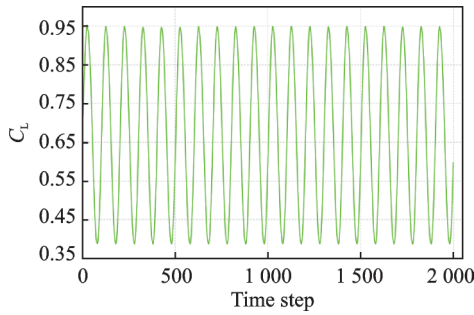


图6 Case 1无黏模拟20T内升力系数随物理时间步变化曲线

Fig.6 Lift coefficient C_L variation curve with physical time step within 20T in inviscid simulation of Case 1

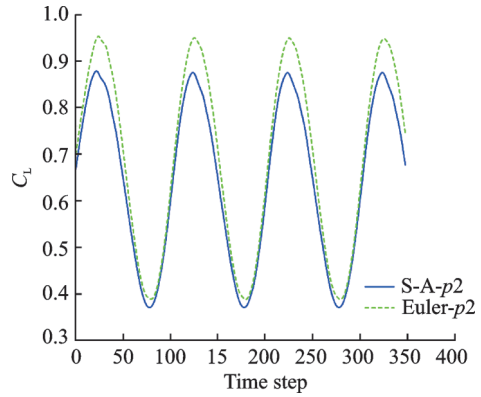
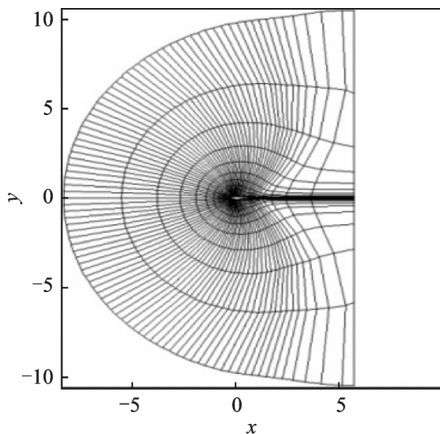
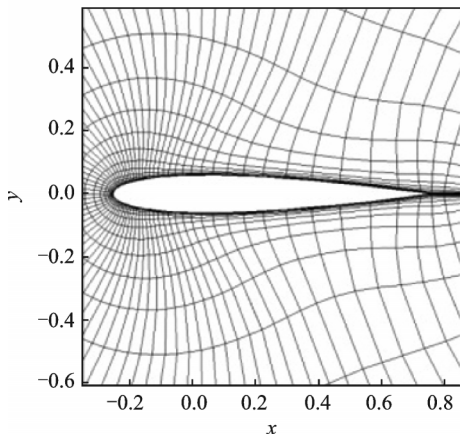


图8 初始3.5T无黏模拟与湍流模拟的升力系数变化对比
Fig.8 Comparison of lift coefficient C_L between inviscid and turbulent simulations within initial 3.5T



(a) Global view



(b) Local view

图7 用于湍流模拟的计算网格

Fig.7 Computational grid for turbulent simulations

图8给出了初始350个时间步(3.5T)内,无黏模拟和湍流模拟的升力系数的变化趋势对比($p=2$)。两条升力曲线在第一个波峰附近的形状与之后波峰的形状都略有差别,然而从平衡位置振动到第一个波谷的曲线形状则与都与之保持一致,说明无黏模拟和湍流模拟中振荡的周期性在0.5T内都可以得到稳定。

图9(a)和图10(a)给出了Case 1和Case 2升力系数随迎角变化的迟滞曲线。图中的迟滞曲线形

状都与实验一致。无黏模拟中,Case 2的迟滞曲线整体与实验值吻合较好,而Case 1在翼型上仰阶段升力系数与实验值吻合较好,在下俯阶段数值解则略大于实验值。湍流流动模拟得到的升力系数迟滞曲线在较大迎角时都处在实验值下方,与无黏模拟相比同实验值的差别稍大,但是与前人采用有限体积方法以及S-A模型得到的结果^[1,4]高度一致。

图9(b)和图10(b)展示了Case 1和Case 2力矩系数随迎角变化的迟滞曲线。两图中无黏模拟的力矩系数迟滞曲线都整体处于实验值下方,差距非常明显。湍流模拟的迟滞曲线相比之下与实验值和参考值吻合较好。这说明尽管升力系数结果与实验值较为一致,但无黏模拟对于阻力的预测能力远不如湍流模拟。

需要指出的是,本节中翼型俯仰运动的角速度是随时间连续变化的,而文中采用的方法忽略了角加速的影响,但是减小时间步长可以有效地减弱忽略角加速度带来的误差。另外,本节中模拟的空间精度达到了4阶精度,而采用双时间方法的时间精度只有2阶,DeBonis等^[20]的研究表明:低阶时间离散可能会抵消高阶空间离散的高精度特性并成为整体截断误差的主导项,但减小时间步长可以有效地减小低阶时间离散带来的总体误差(尽管可能会带来更多的计算量)。为了探讨角加速度和时间离散精度对本文振荡翼型模拟结果的影响,将Case 2的一个周期分别划分为50, 100, 150个时间步分别进行模拟,并对结果进行了对比分析(图11)。

图11显示,3种不同时间步长下计算得到的升力和力矩系数迟滞曲线重合度很高,仅力矩系数在最大迎角附近略有不同,这说明对于Case 2角加速度对模拟结果的影响整体而言是比较微弱的。另外文献[4]同样采用忽略了角加速的旋转坐标系方

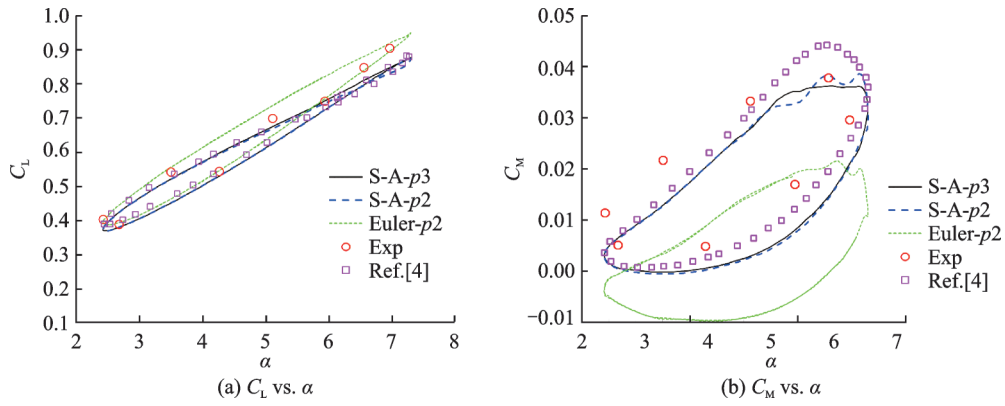


图 9 Case 1 升力系数与力矩系数迟滞曲线

Fig.9 Hysteresis curve of lift coefficient C_L and torque coefficient C_M in Case 1

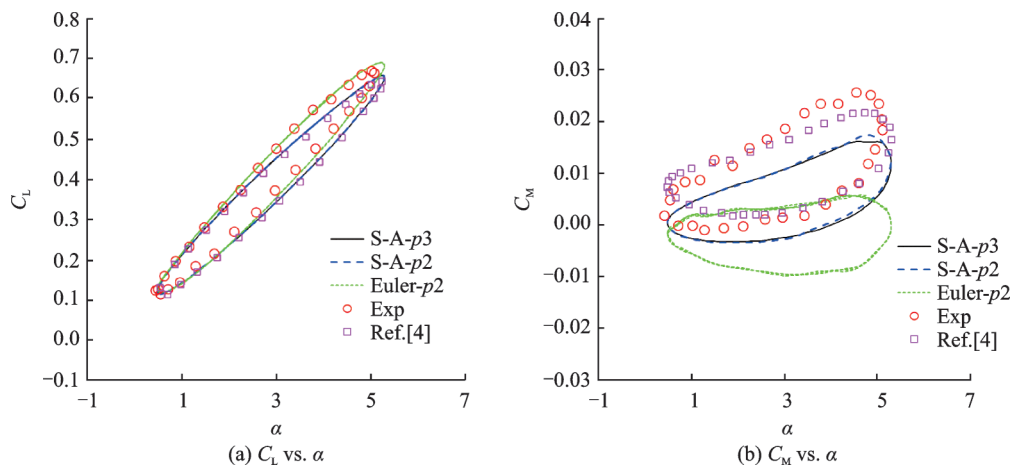


图 10 Case 2 升力系数与力矩系数迟滞曲线

Fig.10 Hysteresis curve of lift coefficient C_L and torque coefficient C_M in Case 2

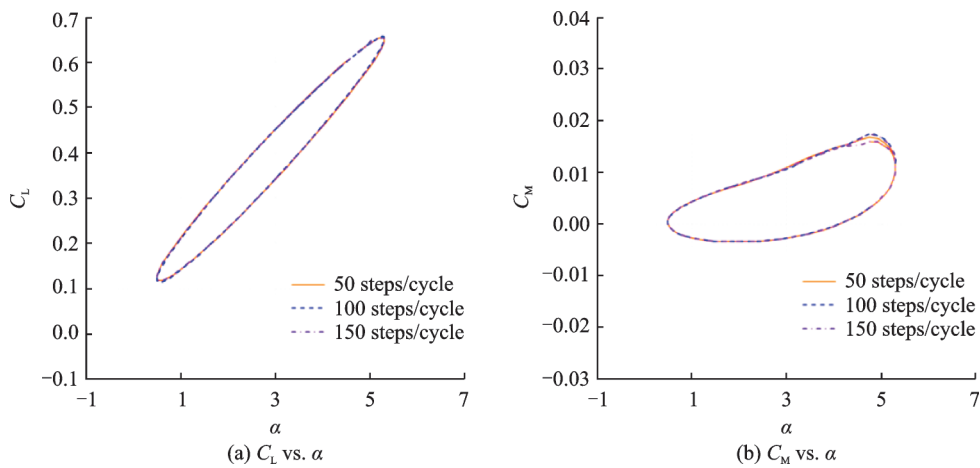


图 11 Case 2 不同时间步长升力系数与力矩系数迟滞曲线

Fig.11 Hysteresis curves of lift coefficient C_L and torque coefficient C_M with different time steps in Case 2

法在 100, 200 和 400 步每周期的情形下对 Case 1 进行了模拟, 3 种时间步长得到的结果曲线几乎一致, 说明角加速度在文中小迎角翼型俯仰振荡问题中的影响是有限的。另外图 11 同样也说明文中双时间方法的时间离散精度对本文振荡翼型算例的总体结果影响也十分有限, 采用 100 步每周期足够对物理过程进行模拟。

在自由度比较方面, 采用有限体积方法和 S-A 模型的参考值^[4]的自由度为 156 513, 采用 NUMECA 软件(同样为 S-A 模型)的参考值^[1]的自由度约为 10 万个。而本文中采用图 7 中的网格进行 4 阶精度 ($p=3$) 的湍流模拟时, 其自由度为 25 920。相比之下, 本文采用了远小于参考值的自由度, 获得了整体与参考值相近或者局部比参考值更好的数值结果,

对激波等结构的捕捉也较好,验证了文中方法的高精度特性以及高精度方法在自由度方面的优势。

图12和图13给出了Case 1和Case 2在不同相位时的压力系数分布。由于网格过于稀疏且计算阶数较低,无黏模拟的压力系数曲线在激波附近都存在数值色散现象,图13(b)靠近前缘部位还存在一些毛刺。湍流模拟的压力系数曲线同无黏流动基本重合,在激波附近也没有出现震荡现象。两条曲线都整体较为光滑,与实验值整体吻合较好,局

部与实验值存在差距,其中图12(a)和图13(b)中在吸力峰附近与实验值差距较大,文献[3-4]中的相关算例也出现了非常类似的误差,但具体的原因需要进一步研究。不过所有无黏模拟得到的压力系数在尾缘处的分布都存在一定程度的下垂,略微低于实验值和湍流模拟结果。从下文的流场云图中也可以清楚地看出,由于黏性缺失导致无黏模拟对尾缘低速区的模拟不足。

图14—17分别给出了Case 1和Case 2不同相

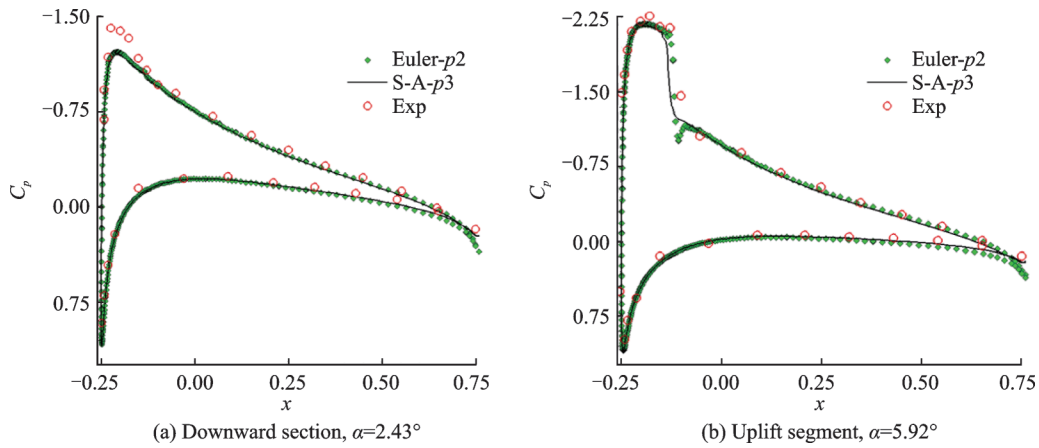


图12 Case 1不同相位翼型表面压力分布

Fig.12 Surface pressure C_p distributions of airfoils with different phases in Case 1

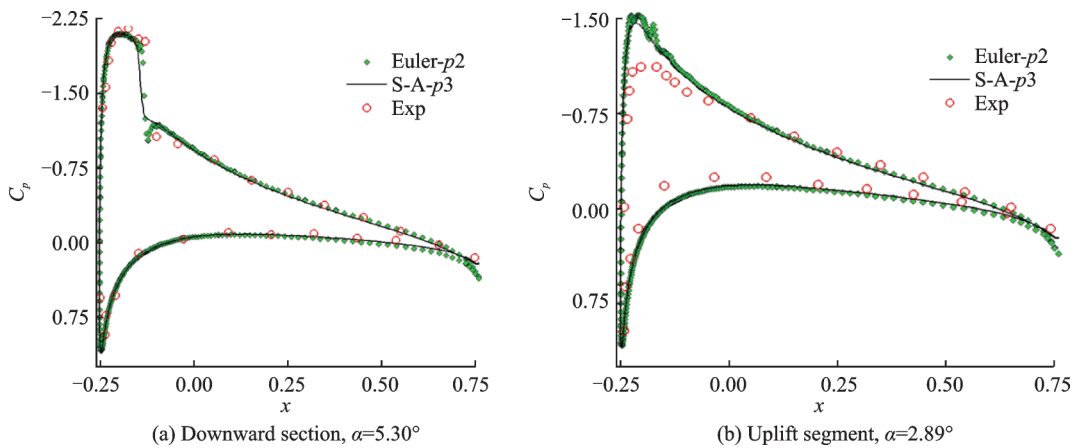


图13 Case 2不同相位翼型表面压力分布

Fig.13 Surface pressure C_p distributions of airfoils with different phases in Case 2

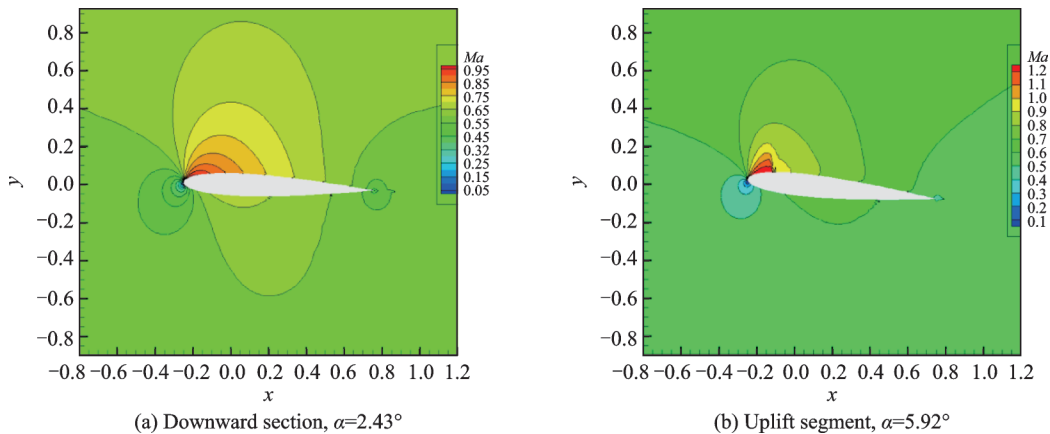


图14 Case 1无黏模拟马赫云图

Fig.14 Mach contours of inviscid simulation in Case 1

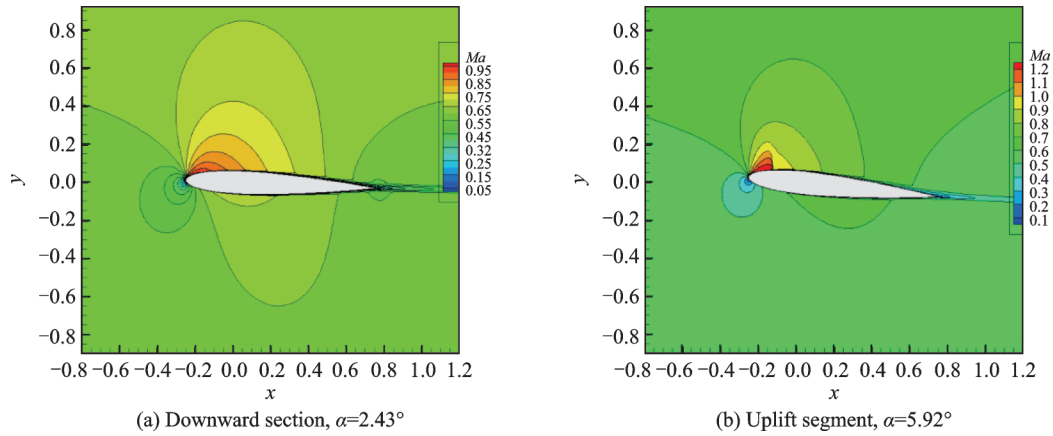


图 15 Case 1 湍流模拟马赫云图

Fig.15 Mach contours of turbulent simulation in Case 1

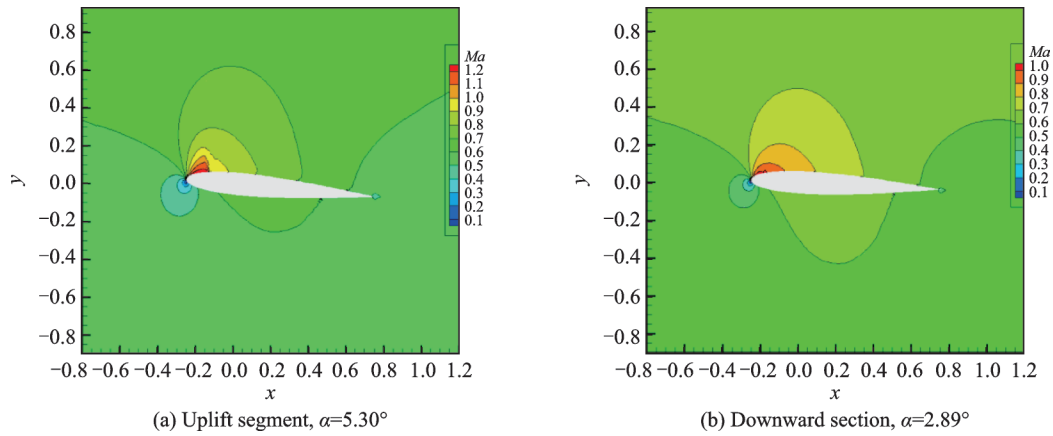


图 16 Case 2 无黏模拟马赫云图

Fig.16 Mach contours of inviscid simulation in Case 2

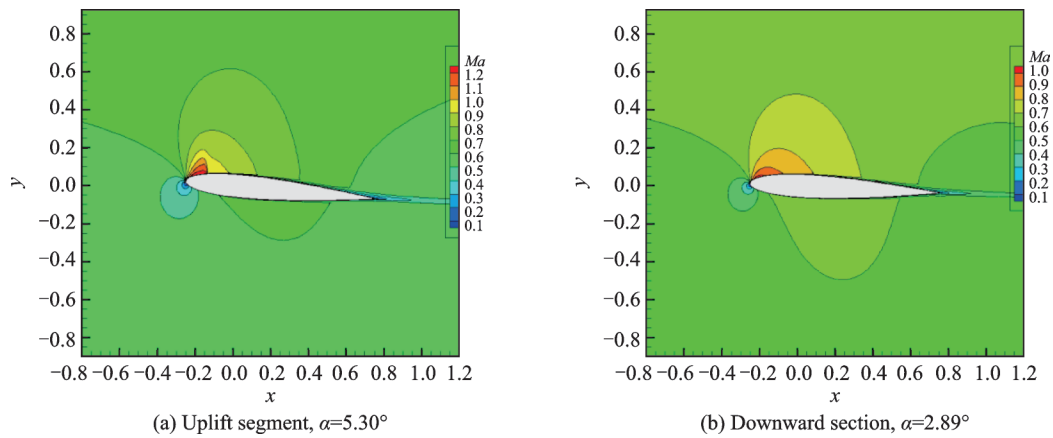


图 17 Case 2 湍流模拟马赫云图

Fig.17 Mach contours of turbulent simulation in Case 2

位时的马赫数云图。除物面附近外,无黏模拟和湍流模拟的马赫数分布非常相近。尽管无黏模拟使用的网格较为稀疏且阶数较低,但计算得到的马赫数分布仍然相当光滑,只是在激波附近存在一些毛刺。而湍流模拟得到的马赫数分布在激波附近则

非常光滑,并且可以清晰地看到物面附近的低速流动,尤其在尾缘附近,低速流动更为明显。图 18 给出了 Case 1 和 Case 2 的湍流黏性系数云图,湍流黏性系数集中分布在自尾缘开始的尾迹区内,一直发展到远场,与文献[8]中的定常结果类似。

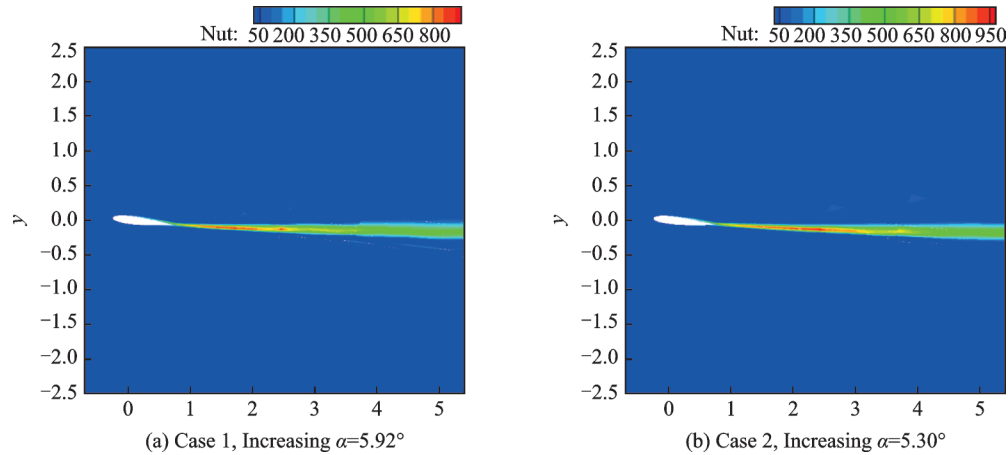


图18 湍流黏性系数分布

Fig.18 Contours distribution of turbulence viscosity coefficient

4 结 论

本文将高阶间断伽辽金方法和旋转坐标系方法相结合,应用隐式双时间方法对旋转坐标系中耦合修正的一方程S-A模型的RANS方程进行了离散求解,对二维旋转圆柱非定常绕流和二维翼型俯仰振荡问题进行了模拟。在采用较少的总体自由度的前提下,数值结果对旋涡、激波等流动结构实现了较好的捕捉,总体结果与前人计算结果及实验值吻合较好,验证了文中发展的方法的正确有效,以及高精度方法在处理非定常复杂流动方面的优势。总的来说,本文的研究拓展了高阶间断伽辽金方法的实际应用,对高精度方法的进一步应用推广具有一定的参考价值。

参考文献:

- [1] 李媛,康顺. 振荡翼型非定常气动特性数值模拟[J]. 工程热物理学报, 2012, 33(9): 1505-1508.
LI Yuan, KANG Shun. Numerical simulation of oscillating airfoil unsteady aerodynamic performance [J]. Journal of Engineering Thermophysics, 2012, 33(9): 1505-1508.
- [2] 张正秋,邹正平,刘火星. 振荡翼型非定常流动数值模拟研究[J]. 燃气涡轮试验与研究, 2009, 22(3): 1-8.
ZHANG Zhengqiu, ZOU Zhengping, LIU Huoxing. Numerical study of two dimensional flow on an oscillating airfoil [J]. Gas Turbine Experiment and Research, 2009, 22(3): 1-8.
- [3] 程苏堃,杨小权,杨爱明. 基于时间谱方法的振荡翼型非定常黏性绕流数值模拟[J]. 空气动力学学报, 2013, 31(5): 670-675.
CHENG Sukun, YANG Xiaoquan, YANG Aiming. Time spectral method for unsteady viscous flow around an oscillating airfoil [J]. Acta Aerodynamica Sinica, 2013, 31(5): 670-675.
- [4] 肖中云. 旋翼流场数值模拟方法研究[D]. 绵阳:中国空气动力研究与发展中心, 2007.
- [5] WANG Z J. High-order methods for the Euler and Navier-Stokes equations on unstructured grids [J]. Progress in Aerospace Sciences, 2007, 43(1/2/3): 1-41.
- [6] BASSI F, REBAY S. High-order accurate discontinuous finite element solution of the 2D Euler equations [J]. Journal of Computational Physics, 1997, 138(2): 251-285.
- [7] 秦望龙,吕宏强,伍贻兆. 基于混合网格的高阶间断有限元黏流数值解法[J]. 力学学报, 2013, 45(6): 987-991.
QIN Wanglong, LÜ Hongqiang, WU Yizhao. High-order discontinuous Galerkin solution of N-S equations on hybrid mesh [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2013, 45(6): 987-991.
- [8] 秦望龙,吕宏强,伍贻兆. 弯曲网格上的间断有限元湍流数值解法研究[J]. 空气动力学学报, 2014, 32(5): 581-586.
QIN Wanglong, LÜ Hongqiang, WU Yizhao. Discontinuous Galerkin solution of RANS equations on curved mesh [J]. Acta Aerodynamica Sinica, 2014, 32(5): 581-586.
- [9] GHOSH A R. Solutions to three-dimensional thin-layer Navier-Stokes equations in rotating coordinates for flow through turbomachinery [D]. Stackville, Mississippi: Mississippi State University, 1997.
- [10] CHEN J, GHOSH A, SREENIVAS K, et al. Comparison of computations using Navier-Stokes equations in rotating and fixed coordinates for flow through turbomachinery [C]// Aerospace Sciences Meeting and Exhibit. Reno, NV: [s.n.], 2013.
- [11] AGARWAL R K, DEESE J E. Euler calculations for flowfield of a helicopter rotor in hover [J]. Journal of

- Aircraft, 1987, 24(4): 231-238.
- [12] 易家训. 流体力学与应用数学讲座[M]. 北京: 科学出版社, 1983.
- [13] BLAZEK J. Computational fluid dynamics: Principles and applications[M]. [S.l.]: Elsevier, 2005.
- [14] ZHONG B, QIN N. Non-inertial multiblock Navier-Stokes calculation for hovering rotor flowfields using relative velocity approach[J]. The Aeronautical Journal, 2001, 105(1049): 379-389.
- [15] BASSI F, SAVINI M L, REBAY S, et al. Discontinuous Galerkin solution of the Reynolds-averaged Navier-Stokes and $k-\omega$ turbulence model equations [J]. Computer & Fluids, 2005, 34 (4/5) : 507-540.
- [16] MODISETTE J M. An output-based adaptive and high-order method for a rotor in hover [D]. Cambridge, Massachusetts: Massachusetts Institute of Technology, 2008.
- [17] BURGESS N K. An adaptive discontinuous galerkin solver for aerodynamic flows[D]. [S.l.]: University of Wyoming, 2011.
- [18] COUTANCEAU M, MENARD C. Influence of rotation on the near-wake development behind an impulsively started circular cylinder [J]. Journal of Fluid Mechanics, 1985, 158: 399-446.
- [19] LANDON R H. NACA0012 oscillation and transient pitching: AGARD-R-702[R]. [S.l.]: Compendium of Unsteady Aerodynamic Measurements 1982.
- [20] DEBONIS J R, SCOTT J N. Study of the error and efficiency of numerical schemes for computational aeroacoustics [J]. AIAA Journal, 2002, 40(2): 227-234.

(编辑:孙静)