

DOI:10.16356/j.1005-2615.2019.04.005

## 基于区域极点配置的航空发动机全包线 $H_\infty$ /LPV 控制

王 宁 潘慕绚 黄金泉

(南京航空航天大学能源与动力学院江苏省航空动力系统重点实验室, 南京, 210016)

**摘要:** 根据发动机相似工作原理以及平方和(Sun of squares, SOS)规划, 基于发动机全飞行包线的换算线性变参数(Linear parameter varying, LPV)模型, 提出了一种基于区域极点配置的航空发动机全包线切换  $H_\infty$ /LPV 控制方法。根据发动机相似换算参数, 建立换算状态变量模型。以高压换算转速为调度参数, 利用多项式拟合得到全包线慢车以上的换算 LPV 模型。考虑基于区域极点配置的  $H_\infty$ /LPV 控制问题, 将 LPV 闭环系统的极点配置在复平面上一个期望的区域内, 并将 LPV 闭环系统稳定性条件转化为 SOS 约束, 进行控制器求解。基于 Lyapunov 理论, 设计全包线的切换 LPV 控制器, 保证切换闭环系统 Lyapunov 意义下稳定。仿真结果表明, 设计的切换 LPV 控制器能保证全包线内系统稳定且具有较好的鲁棒性能和动态响应性能。

**关键词:** 航空发动机; 线性变参数; 全飞行包线; 区域极点配置;  $H_\infty$  控制; 切换控制

**中图分类号:** V233.7      **文献标志码:** A      **文章编号:** 1005-2615(2019)04-0456-10

## $H_\infty$ /LPV Control for Aero-engine in Full Flight Envelope Based on Guardian Maps Theory

WANG Ning, PAN Muxuan, HUANG Jinquan

(Jiangsu Province Key Laboratory of Aerospace Power System, College of Energy and Power Engineering, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing, 210016, China)

**Abstract:** Based on the similarity theory and the SOS (sum of squares) programming, taking into account a corrected piecewise LPV (linear parameter varying) model of aero-engine in the whole flight envelope, a switching  $H_\infty$ /LPV control based on the guardian maps theory is proposed. According to the corrected variables, the state space model is converted to the corrected state space model. The corrected high-pressure speed is adopted as the scheduling variable and to fit a corrected LPV model. By incorporating  $H_\infty$  technique and the guardian maps theory, a set of controllers are designed such that the closed loop poles of LPV system lie in a desired area. The stability conditions of the closed loop LPV system are converted to SOS constraints and the controllers are obtained by solving the problem of SOS programming. A switching LPV control for aero-engine in the full envelope is proposed based on the Lyapunov theory. The switching LPV controller can ensure the stability of the closed-loop. The validity and performance of the theoretical results are demonstrated through the numerical simulation.

**Key words:** aero-engine; linear parameter varying (LPV); full flight envelope; guardian maps theory;  $H_\infty$  control; switching control

**基金项目:** 南京航空航天大学研究生创新基地(实验室)开放基金(kfj20160211)资助项目; 中央高校基本科研业务费专项资金资助项目。

**收稿日期:** 2017-12-03; **修订日期:** 2018-04-08

**通信作者:** 黄金泉, 男, 教授, 博士生导师, E-mail: jhuang@nuaa.edu.cn。

**引用格式:** 王宁, 潘慕绚, 黄金泉. 基于区域极点配置的航空发动机全包线  $H_\infty$ /LPV 控制[J]. 南京航空航天大学学报, 2019, 51(4): 456-465. WANG Ning, PAN Muxuan, HUANG Jinquan.  $H_\infty$ /LPV Control for Aero-engine in Full Flight Envelope Based on Guardian Maps Theory[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2019, 51(4): 456-465.

航空发动机是一个典型的非线性系统,飞行条件和内部参数在较大范围内进行变化,而且变化速率较快。较为成熟和完善的发动机控制方法仍是线性控制方法,单一的控制策略很难保证发动大范围内系统稳定性。目前,航空发动机大多采用变增益控制方法,根据发动机状态进行控制器切换,保证控制系统具有较好的性能<sup>[1]</sup>。随着变增益控制理论不断发展,基于LPV系统的增益调度控制方法得到迅速发展和完善。该方法一经提出,便广泛应用于航空发动机控制系统的设计研究中<sup>[2]</sup>。LPV模型的系数矩阵根据可测量或可估计调度参数实现增益调度,能够反映系统的非线性特性。可将随飞行状态和飞行条件变化的航空发动机非线性系统描述为LPV形式,直接设计对应运行范围内的控制器,从而从理论上保证系统稳定性。

由于航空发动机很难用一个显式方程进行描述,通常采用插值或拟合的方法,建立发动机小范围内的LPV模型<sup>[3-6]</sup>。随着航空发动机飞行包线不断扩大,为了分析全包线内发动机的特性以及设计控制器,需要针对发动机进行全包线建模。文献[7]根据飞行高度和马赫数插值得到状态变量模型的系数矩阵,建立发动机全包线仿真模型。文献[8]将飞行包线划分为若干个区域,选取每个区域的质心点模型代替区域的小偏差动态模型,建立发动机全包线小偏差模型。文献[9]建立了航空发动机全包线内中间状态的多胞形LPV模型。文献[10-11]分别建立了分段实时线性动态模型和全包线换算平衡流型模型。但是这些方法需要手动划分飞行包线,工作量巨大且费时费力。

针对LPV系统鲁棒变增益控制问题,大多利用 $H_\infty$ 控制理论,Lyapunov稳定性理论以及凸优化理论将控制系统的稳定性条件转换为有限个线性矩阵不等式(Linear matrix inequality, LMI)约束条件,通过求解LMI得到控制器<sup>[2]</sup>。常用控制方法主要有LPV- $H_\infty$ 控制<sup>[12]</sup>,LPV- $H_2$ 控制<sup>[13]</sup>以及切换LPV控制<sup>[14-17]</sup>等。随着航空发动机控制系统性能要求越来越高,多个控制性能难以用一个性能指标保证,多目标控制器的研究受到广泛关注<sup>[18-19]</sup>。其中, $H_\infty$ 控制在LPV控制领域已得到了广泛的应用<sup>[12,15-17]</sup>。 $H_\infty$ 控制可以保证系统具有一定鲁棒稳定性,但系统动态响应性能难以保证。区域极点配置最早由Saydy等<sup>[20]</sup>提出,利用LMI描述一个复平面区域,通过将闭环系统极点配置在选定的LMI区域内,保证系统具有一定的动态和稳态特性。

由于本文建立的LPV模型为分段多项式形式,因此需要考虑分段LPV控制系统之间的切换问题,保证控制器间切换的稳定性。针对LPV系

统切换控制问题,用于保证切换稳定性的理论多以Lyapunov理论为基础,通过子系统内的能量衰减来保证切换稳定性<sup>[21]</sup>。文献[22]将Lyapunov函数与平均驻留时间相结合,得到时间依赖切换律保证系统切换稳定性,但是切换时间受切换率影响严重。文献[16]以参数依赖Lyapunov函数为基础,推导出切换时Lyapunov函数非增条件,为基于Lyapunov函数的切换控制提供了理论基础。但是以上切换方法只能实现单向切换,当切换方向变化时,切换系统稳定性难以保证,需要重新设计控制器。

本文针对航空发动机全包线控制问题,提出了一种基于相似原理的全包线LPV控制方法,根据发动机相似工作原理,在状态空间模型的基础上,利用相似参数分析换算状态空间模型,建立某型涡扇发动机慢车状态以上的全包线换算LPV模型。考虑基于区域极点配置约束的 $H_\infty$ /LPV控制问题,将LPV闭环系统的极点配置在复平面上一个期望的区域内,将LPV闭环系统稳定性条件转化为SOS约束,进行控制器求解,保证闭环LPV系统具有一定的动态特性和鲁棒稳定性。

## 1 航空发动机LPV模型

### 1.1 换算LPV模型

LPV系统是一类可以反映对象非线性特性的系统,系统模型的状态空间系数矩阵是在线可测量或可估计的调度参数的确定函数,可以随着调度参数实现增益调度。在实际应用中,通常采用合理的插值或拟合的方法求解系数矩阵,构造多项式依赖的航空发动机LPV模型。

设某型涡扇发动机在飞行条件一定的条件下,其非线性数学模型可以描述为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u) \\ y &= g(x, u) \end{aligned} \quad (1)$$

式中: $x \in \mathbb{R}^n$ 为发动机状态量; $u \in \mathbb{R}^m$ 为发动机输入变量; $y \in \mathbb{R}^p$ 为发动机输出变量。

发动机在某一稳态平衡点 $(u_0, x_0, y_0)$ 有 $\dot{x}_0 = f(x_0, u_0) = 0, y_0 = g(x_0, u_0)$ 。在平衡点 $(u_0, x_0, y_0)$ 附近,利用文献[23]中方法得到小偏差状态变量模型为

$$\begin{aligned} \Delta \dot{x} &= A \Delta x + B \Delta u \\ \Delta y &= C \Delta x + D \Delta u \end{aligned} \quad (2)$$

式中: $\Delta x = x - x_0; \Delta u = u - u_0; \Delta y = y - y_0; A, B, C, D$ 为适维常数矩阵。

选择涡扇发动机低压转速 $n_L$ 和高压转速 $n_H$ 为状态量,燃油量 $W_f$ 为输入量,选取低压和高压转速

为输出量,输出方程已知,其状态方程为

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{n}_L \\ \Delta \dot{n}_H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta n_L \\ \Delta n_H \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \Delta W_f \quad (3)$$

对于喷口不可调的涡扇发动机,当发动机满足相似工作条件时,由相似原理可知,其对应点上同名物理量比值不变,相似参数也保持不变。

将式(3)中各变量转化为相似参数,如式(4—6)所示。

$$n_{Lc} = \frac{n_L}{\sqrt{T_2^*}}, n_{Hc} = \frac{n_H}{\sqrt{T_2^*}} \quad (4)$$

$$\dot{n}_{Lc} = \frac{\dot{n}_L}{P_2^*}, \dot{n}_{Hc} = \frac{\dot{n}_H}{P_2^*} \quad (5)$$

$$W_{fc} = \frac{W_f}{P_2^* \sqrt{T_2^*}} \quad (6)$$

式中  $P_2^*$ ,  $T_2^*$  分别表示发动机进口气流总压和总温。得到换算状态空间模型

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{n}_{Lc} \\ \Delta \dot{n}_{Hc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{c11} & a_{c12} \\ a_{c21} & a_{c22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta n_{Lc} \\ \Delta n_{Hc} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{c1} \\ b_{c2} \end{bmatrix} [\Delta W_{fc}] \quad (7)$$

式中:  $a_{cij} = a_{ij} \frac{\sqrt{T_2^*}}{P_2^*}$ ;  $b_{ci} = b_i \sqrt{T_2^*}$ ;  $i, j = 1, 2$ 。

由于航空发动机高压转子转速更能反映发动机机械载荷以及热载荷变化情况,高压转速能够直接、快速地反映发动机动态特性变化,以高压换算转速为调度参数,针对式(7)描述的飞行包线内慢车状态以上的换算状态空间模型系数矩阵及其元素进行多项式拟合,最终合成全包线换算 LPV 模型,即有

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{n}_{Lc} \\ \Delta \dot{n}_{Hc} \end{bmatrix} = A_c(n_{Hc}) \begin{bmatrix} \Delta n_{Lc} \\ \Delta n_{Hc} \end{bmatrix} + B_c(n_{Hc}) \Delta W_{fc} \quad (8)$$

$$\Delta n_{Hc} = C_c(n_{Hc}) \begin{bmatrix} \Delta n_{Lc} \\ \Delta n_{Hc} \end{bmatrix} + D_c(n_{Hc}) \Delta W_{fc}$$

式中:  $A_c(n_{Hc}) = A_c n_{Hc}^i$ ;  $B_c(n_{Hc}) = B_{ci} n_{Hc}^i$ ;  $C_c(n_{Hc}) = [0 \ 1]$ ;  $D_c(n_{Hc}) = [0 \ 0]$ 。

## 1.2 增广 LPV 模型

考虑航空发动机系统存在的外部干扰,则式(8)的航空发动机多项式依赖 LPV 系统为

$$\begin{aligned} \dot{x}_p &= A_p(\theta) x_p + B_{p1}(\theta) w_p + B_p(\theta) u_p \\ y_p &= C_p(\theta) x_p + D_{p1}(\theta) w_p + D_p(\theta) u_p \end{aligned} \quad (9)$$

式中:  $\theta = n_{Hc}$ ;  $x_p = [\Delta n_{Lc} \ \Delta n_{Hc}]^T$ ;  $u_p = \Delta W_{fc}$ ;  $y_p = \Delta n_{Hc}$ ;  $w_p \in R^q$  为外界干扰信号;  $A_p, B_p, C_p$  和  $D_p$  同式(8)中  $A_c, B_c, C_c$  和  $D_c$ ;  $B_{p1}$  和  $D_{p1}$  分别为干扰输入矩阵和传递矩阵。

设输出控制指令为  $r \in R^p$ , 则输出偏差为  $e = r - y_p$ , 为了使系统的输出不存在稳态误差, 将偏差的积分增广为系统状态, 即  $x_c(t) = \int_0^t e(\tau) d\tau$ 。

选择输出偏差  $e$  和偏差积分  $x_c$  作为系统的评

价输出, 则广义被控对象的状态方程为

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= A(\theta) \bar{x} + B(\theta) u + B_1(\theta) w \\ z &= C(\theta) \bar{x} + D(\theta) u + D_1(\theta) w \end{aligned} \quad (10)$$

$$\text{式中: } A(\theta) = \begin{bmatrix} A_p(\theta) & 0 \\ -C_p(\theta) & 0 \end{bmatrix}; \quad B_1(\theta) = \begin{bmatrix} B_{p1}(\theta) & 0 \\ -D_{p1}(\theta) & I \end{bmatrix}; \quad B(\theta) = \begin{bmatrix} B_p(\theta) \\ -D_p(\theta) \end{bmatrix}; \quad C(\theta) = \begin{bmatrix} -C_p(\theta) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}; \quad D(\theta) = \begin{bmatrix} -D_p(\theta) \\ 0 \end{bmatrix}; \quad D_1(\theta) = \begin{bmatrix} -D_{p1}(\theta) & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} x_p \\ x_c \end{bmatrix}; \quad z = \begin{bmatrix} e \\ x_c \end{bmatrix}; \quad u = u_p; \quad w = \begin{bmatrix} w_p \\ r \end{bmatrix}。$$

考虑燃油计量装置为惯性环节, 传递函数为

$$\frac{\Delta W_{fc}}{\Delta W_{fcr}} = \frac{1}{T_{wfs} s + 1} \quad (11)$$

最终得到发动机广义被控系统对象

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= \hat{A}(\theta) \hat{x} + \hat{B}(\theta) \hat{u} + \hat{B}_1(\theta) \hat{w} \\ \hat{z} &= \hat{C}(\theta) \hat{x} + \hat{D}(\theta) \hat{u} + \hat{D}_1(\theta) \hat{w} \end{aligned} \quad (12)$$

式中:  $\hat{x} = [\Delta n_{Lc} \ \Delta n_{Hc} \ \Delta W_{fc} \ x_c]^T$ ;  $\hat{u} = \Delta W_{fcr}$ ;

$$\hat{z} = z; \quad \hat{w} = [w \ \Delta n_{Hc}]^T; \quad \hat{A} = \begin{bmatrix} A_p & B_p & 0 \\ 0 & -1/T_{wfs} & 0 \\ -C_p & -D_p & 0 \end{bmatrix};$$

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/T_{wfs} \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \hat{B}_1 = \begin{bmatrix} B_{p1} & 0 \\ 0 & 0 \\ -D_{p1} & 1 \end{bmatrix}; \quad \hat{C} = \begin{bmatrix} -C_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\hat{D}_1 = \begin{bmatrix} -D_{p1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}。$$

## 2 基于区域极点配置切换 $H_\infty$ /LPV 控制

### 2.1 基于区域极点配置 $H_\infty$ /LPV 控制

针对式(12)所描述被控对象, 设计状态反馈控制器

$$\hat{u} = K \hat{x} \quad (13)$$

使得转速闭环系统满足如下控制目标

(1) 高压转子转速对外界干扰具有指定的抑制度  $\gamma_\infty$ , 即  $H_\infty$  性能指标达到  $\gamma_\infty$ ;

(2) 高压转子转速能较快跟踪给定指令信号, 且系统闭环极点位于复平面上一个合适的区域内。

将式(13)代入式(12)可得闭环 LPV 系统为

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= \bar{A}(\theta) \hat{x} + B_1(\theta) \hat{w} \\ \hat{z} &= \bar{C}(\theta) \hat{x} + D_1(\theta) \hat{w} \end{aligned} \quad (14)$$

式中:  $\bar{A}(\theta) = \hat{A}(\theta) + \hat{B}(\theta) K$ ;  $\bar{C}(\theta) = \hat{C}(\theta) + \hat{D}(\theta) K$ 。

**定理 1** 对于一个多项式矩阵变量  $E(\theta)$ , 如果存在一组 SOS 矩阵  $S_1(\theta), S_2(\theta), \dots, S_l(\theta)$ , 使得多

项式矩阵  $E(\theta) - S_1(\theta)g_1(\theta) - \dots - S_l(\theta)g_l(\theta)$  是 SOS 矩阵,那么对于所有的  $\theta \in \Theta$ ,

$$E(\theta) > 0 \quad (15)$$

是成立的,其中  $\Theta = \{\theta | g_i(\theta) \geq 0, i = 1, \dots, l\}$ 。

**证明** 根据文献[24]中 SOS 矩阵的定义可知,若  $S_1(\theta), S_2(\theta), \dots, S_l(\theta)$  为 SOS 矩阵,则  $S_i(\theta) > 0, i = 1, \dots, l$ , 此时如果多项式矩阵  $E(\theta) - S_1(\theta)g_1(\theta) - \dots - S_l(\theta)g_l(\theta)$  为 SOS 矩阵,利用推广到多项式矩阵的弱对偶理论<sup>[25]</sup>,所以多项式矩阵  $E(\theta) > 0$ 。

**定理 2** 针对系统(14), 给定  $H_\infty$  性能指标  $\gamma_\infty > 0$ , 以及区域极点配置性能指标  $\alpha > 0, 0^\circ < \beta < 90^\circ$ , 若存在 SOS 矩阵  $X$  以及  $S_i(\theta) (i = 1, \dots, l)$ , 矩阵  $W$ , 使得

$$L_1(\theta) = - \begin{bmatrix} \hat{A}(\theta)X + \hat{B}(\theta)W + X\hat{A}^T(\theta) + W^T\hat{B}^T(\theta) & \hat{B}_1(\theta) & (\hat{C}(\theta)X + \hat{D}(\theta)W)^T \\ \hat{B}_1(\theta)^T & -\gamma_\infty I & \hat{D}_1(\theta)^T \\ \hat{C}(\theta)X + \hat{D}(\theta)W & \hat{D}_1(\theta) & -\gamma_\infty I \end{bmatrix}$$

$$L_2(\theta) = - \begin{bmatrix} \sin\beta(\hat{A}(\theta)X + \hat{B}(\theta)W + X\hat{A}^T(\theta) + W^T\hat{B}^T(\theta)) & \cos\beta(\hat{A}(\theta)X + \hat{B}(\theta)W - X\hat{A}^T(\theta) - W^T\hat{B}^T(\theta)) \\ \cos\beta(X\hat{A}^T(\theta) + W^T\hat{B}^T(\theta) - \hat{A}(\theta)X - \hat{B}(\theta)W) & \sin\beta(\hat{A}(\theta)X + \hat{B}(\theta)W + X\hat{A}^T(\theta) + W^T\hat{B}^T(\theta)) \end{bmatrix}$$

$$L_3(\theta) = -\hat{A}(\theta)X - \hat{B}(\theta)W - X\hat{A}^T(\theta) - W^T\hat{B}^T(\theta) - 2\alpha X \quad (17)$$

**证明** 根据式(16)以及定理 1, 式(17)等价于

$$\begin{bmatrix} \hat{A}(\theta)X + \hat{B}(\theta)W + X\hat{A}^T(\theta) + W^T\hat{B}^T(\theta) & \hat{B}_1(\theta) & (\hat{C}(\theta)X + \hat{D}(\theta)W)^T \\ \hat{B}_1(\theta)^T & -\gamma_\infty I & \hat{D}_1(\theta)^T \\ \hat{C}(\theta)X + \hat{D}(\theta)W & \hat{D}_1(\theta) & -\gamma_\infty I \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} \sin\beta(\hat{A}(\theta)X + \hat{B}(\theta)W + X\hat{A}^T(\theta) + W^T\hat{B}^T(\theta)) & \cos\beta(\hat{A}(\theta)X + \hat{B}(\theta)W - X\hat{A}^T(\theta) - W^T\hat{B}^T(\theta)) \\ \cos\beta(X\hat{A}^T(\theta) + W^T\hat{B}^T(\theta) - \hat{A}(\theta)X - \hat{B}(\theta)W) & \sin\beta(\hat{A}(\theta)X + \hat{B}(\theta)W + X\hat{A}^T(\theta) + W^T\hat{B}^T(\theta)) \end{bmatrix} < 0$$

$$\hat{A}(\theta)X + \hat{B}(\theta)W + X\hat{A}^T(\theta) + W^T\hat{B}^T(\theta) + 2\alpha X < 0 \quad (18)$$

令  $W = KX$ , 代入式(18), 则有

$$\begin{bmatrix} \bar{A}(\theta)X + X\bar{A}^T(\theta) & \hat{B}_1(\theta) & \bar{C}(\theta)X^T \\ \hat{B}_1^T(\theta) & -\gamma_\infty I & \hat{D}_1(\theta)^T \\ \bar{C}(\theta)X & \hat{D}_1(\theta) & -\gamma_\infty I \end{bmatrix} < 0 \quad (19)$$

$$\begin{bmatrix} \sin\beta(\bar{A}(\theta)X + X\bar{A}^T(\theta)) & \cos\beta(\bar{A}(\theta)X - X\bar{A}^T(\theta)) \\ \cos\beta(X\bar{A}^T(\theta) - \bar{A}(\theta)X) & \sin\beta(\bar{A}(\theta)X + X\bar{A}^T(\theta)) \end{bmatrix} < 0$$

$$\bar{A}(\theta)X + X\bar{A}^T(\theta) + 2\alpha X < 0$$

由于  $X$  为 SOS 矩阵, 所以  $X > 0$ , 根据有界实定理<sup>[2]</sup>以及区域极点配置理论<sup>[20]</sup>可知, 则闭环系统(14)渐近稳定, 并满足给定  $H_\infty$  性能指标  $\gamma_\infty$ , 以及闭环系统极点落在如图 1 所示的复平面区域  $S(\alpha, \beta)$  内。

$$L_j(\theta) = \sum_{i=1}^l S_i(\theta)g_i(\theta), j = 1, \dots, 3 \quad (16)$$

为 SOS 矩阵, 则闭环系统渐近稳定, 并满足给定  $H_\infty$  性能指标  $\gamma_\infty$ , 以及闭环系统极点落在如图 1 所示的复平面区域  $S(\alpha, \beta)$  内, 且  $K = WX^{-1}$ , 其中:

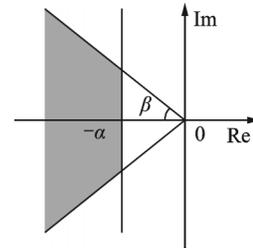


图 1 复平面区域  $S(\alpha, \beta)$

Fig.1 Classical regions  $S(\alpha, \beta)$

## 2.2 切换 LPV 控制

考虑到航空发动机动态特性随调度参数变化, 且调度参数变化范围较大, 按定理 1 设计的鲁棒控制器, 虽然可以保证闭环系统的鲁棒稳定性, 若只

设计一个LPV控制器实现航空发动机整个飞行包线内的控制,全包线范围内的闭环控制系统性能难以保证。

本文将调度参数划分成多个子区域,各子区域相互接触,即

$$\Theta = \cup \Theta_i \quad (20)$$

针对上述调度参数分区的LPV切换系统,为保证航空发动机闭环系统切换下的稳定性,动态响

$$\begin{bmatrix} \bar{A}(\bar{\theta})X_i + X_i\bar{A}^T(\bar{\theta}) & \hat{B}_1(\bar{\theta}) & \bar{C}(\bar{\theta})X_i^T \\ \hat{B}_1^T(\bar{\theta}) & -\gamma_\infty I & \hat{D}_1(\bar{\theta})^T \\ \bar{C}(\bar{\theta})X_i & \hat{D}_1(\bar{\theta}) & -\gamma_\infty I \end{bmatrix} < 0 \quad (22)$$

$$\begin{bmatrix} \sin\theta(\bar{A}(\bar{\theta})X_i + X_i\bar{A}^T(\bar{\theta})) & \cos\theta(\bar{A}(\bar{\theta})X_i - X_i\bar{A}^T(\bar{\theta})) \\ \cos\theta(X_i\bar{A}^T(\bar{\theta}) - \bar{A}(\bar{\theta})X_i) & \sin\theta(\bar{A}(\bar{\theta})X_i + X_i\bar{A}^T(\bar{\theta})) \end{bmatrix} < 0$$

$$\bar{A}(\bar{\theta})X_i + X_i\bar{A}^T(\bar{\theta}) + 2aX_i < 0, X_i = X_j$$

式中: $\bar{A}(\bar{\theta}) = \hat{A}(\bar{\theta}) + \hat{B}(\bar{\theta})W_iX_i^{-1}$ ,  $\bar{C}(\bar{\theta}) = \hat{C}(\bar{\theta}) + \hat{D}(\bar{\theta})W_iX_i^{-1}$ 。对于 $\forall \bar{\theta} \in \Theta_i \cup \Theta_j (i, j \in Z)$ 都成立,则航空发动机闭环系统在飞行包线内渐近稳定,以及闭环系统极点落在如图1所示的复平面区域 $S(\alpha, \beta)$ 内,且 $K_i = W_iX_i - 1$ 。

**证明** 定义Lyapunov函数为

$$V_\sigma(x(t)) = x(t)^T X x(t) \quad (23)$$

式中 $\sigma$ 表示 $t$ 时刻被激励的子区域序号。

假设运行时间长度 $[0, T]$ 内切换的时刻序列为 $t_0, t_1, \dots, t_N$ ,并且 $t_0 = 0$ 。假设在某一切换时刻 $t_k$ 时, $\sigma(t_k) = i, \sigma(t_k^+) = j$ ,由式(22)可以得到

$$X_{\sigma(t_k^+)} = X_{\sigma(t_k)} = X \Rightarrow V_{\sigma(t_k^+)}(x) = V_{\sigma(t_k)}(x) \quad (24)$$

由定理1可知,当 $t \in [t_k^+, t_{k+1}]$ , $\sigma(t) = j$ ,以及 $\bar{\theta} = \theta_j$ 时,有

$$\begin{aligned} \dot{V}_\sigma(x(t)) &= \bar{A}(\bar{\theta})X + X\bar{A}^T(\bar{\theta}) < 0 \Rightarrow \\ V_\sigma(x(t_{k+1})) &< V_\sigma(x(t_k^+)) \end{aligned} \quad (25)$$

结合式(24)和式(25),有

$$V_\sigma(x(t_{k+1})) < V_\sigma(x(t_k)) \quad (26)$$

可以看出,在发动机运行时间 $[0, T]$ 内,

$$\begin{aligned} a_{c11} &= \begin{cases} -253.86n_{Hc}^3 + 384.51n_{Hc}^2 - 141.54n_{Hc} - 4.2389 & (0.70 \leq n_{Hc} \leq 0.92) \\ 496.00n_{Hc}^3 - 2388.6n_{Hc}^2 + 3287.9n_{Hc} - 1398.1 & (0.92 < n_{Hc} \leq 1.10) \end{cases} \\ a_{c12} &= \begin{cases} -1595.6n_{Hc}^3 + 3958.2n_{Hc}^2 - 3258.9n_{Hc} + 892.82 & (0.70 \leq n_{Hc} \leq 0.92) \\ 768.58n_{Hc}^3 - 2392.7n_{Hc}^2 + 2471.2n_{Hc} - 844.31 & (0.92 < n_{Hc} \leq 1.10) \end{cases} \\ a_{c21} &= \begin{cases} -279.46n_{Hc}^3 + 672.85n_{Hc}^2 - 540.70n_{Hc} + 144.91 & (0.70 \leq n_{Hc} \leq 0.92) \\ -431.92n_{Hc}^3 + 1144.4n_{Hc}^2 - 995.16n_{Hc} + 282.27 & (0.92 < n_{Hc} \leq 1.10) \end{cases} \\ a_{c22} &= \begin{cases} 881.41n_{Hc}^3 - 2198.3n_{Hc}^2 + 1812.1n_{Hc} - 495.59 & (0.70 \leq n_{Hc} \leq 0.92) \\ -551.58n_{Hc}^3 + 1652.0n_{Hc}^2 - 1648.4n_{Hc} + 544.84 & (0.92 < n_{Hc} \leq 1.10) \end{cases} \\ b_{c1} &= \begin{cases} -23.495n_{Hc}^3 + 61.641n_{Hc}^2 - 51.488n_{Hc} + 13.889 & (0.70 \leq n_{Hc} \leq 0.92) \\ -149.36n_{Hc}^3 + 420.01n_{Hc}^2 - 384.01n_{Hc} + 114.39 & (0.92 < n_{Hc} \leq 1.10) \end{cases} \end{aligned}$$

应性能和鲁棒性,设计状态反馈切换控制律,即有

$$\hat{u} = K_i \hat{x} \quad i = 1, 2, \dots, Z \quad (21)$$

式中 $Z$ 为调度参数子区域个数。

**定理3** 针对航空发动机切换系统(20),给定实数 $\{\gamma_{\infty, i} > 0, \alpha_i > 0, 0^\circ < \beta_i < 90^\circ\}, i \in z$ ,参数集合 $\Theta$ 及其子集 $\{\Theta_i\}, i \in z$ 。对于任意两相邻的子区域 $S_i, S_j (i, j \in Z)$ ,如果存在实数矩阵 $\{W_i\}, i \in z$ 和SOS矩阵 $\{X_i\}, i \in z$ ,使得

$$\begin{bmatrix} \bar{A}(\bar{\theta})X_i + X_i\bar{A}^T(\bar{\theta}) & \hat{B}_1(\bar{\theta}) & \bar{C}(\bar{\theta})X_i^T \\ \hat{B}_1^T(\bar{\theta}) & -\gamma_\infty I & \hat{D}_1(\bar{\theta})^T \\ \bar{C}(\bar{\theta})X_i & \hat{D}_1(\bar{\theta}) & -\gamma_\infty I \end{bmatrix} < 0 \quad (22)$$

Lyapunov函数值随时间而下降,即系统能量逐渐降低,根据文献[26]中定理2.3可知,切换闭环系统在Lyapunov意义下稳定,且闭环系统极点落在如图1所示的复平面区域 $S(\alpha, \beta)$ 内。此外,控制器切换方向发生改变时,Lyapunov函数值仍随时间而下降,系统能量仍是降低的,切换系统同样是Lyapunov意义下稳定的。

### 3 仿真实验与分析

#### 3.1 模型仿真

在飞行包线范围内,选取足够多个飞行包线点,建立慢车状态以上的换算状态空间模型,各换算状态空间模型系数矩阵元素随高压换算转速 $n_{Hc}$ 的变化如图2所示。

从图2可以发现,全包线换算状态空间模型系数矩阵元素随着高压换算转速呈现较好变化规律,说明在全包线范围内,利用相似换算参数分析的可行性。

飞行包线内慢车状态以上的换算状态空间模型系数矩阵元素多项式拟合结果如下

$$b_{e2} = \begin{cases} -6.6125n_{Hc}^3 + 17.662n_{Hc}^2 - 13.844n_{Hc} + 3.3918 & (0.70 \leq n_{Hc} \leq 0.92) \\ -59.371n_{Hc}^3 + 180.21n_{Hc}^2 - 178.06n_{Hc} + 57.985 & (0.92 < n_{Hc} \leq 1.10) \end{cases} \quad (27)$$

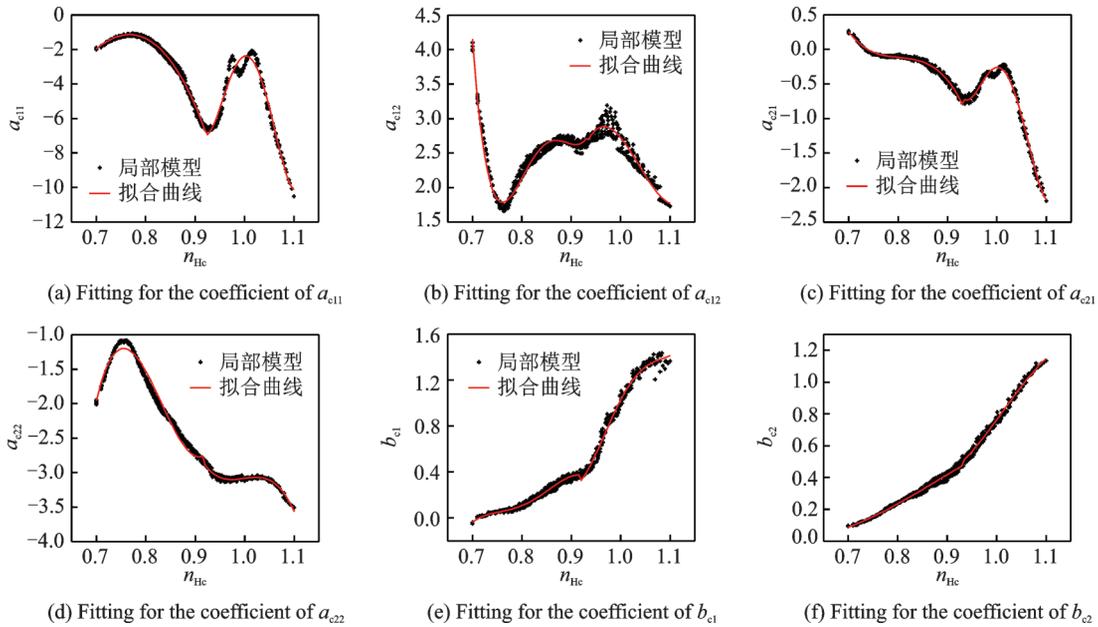


图 2 换算系数矩阵元素随 $n_{Hc}$ 的变化关系

Fig.2 Fitting for the coefficient of corrected system matrix upon  $n_{Hc}$

为验证本文建立的全包线 LPV 模型的有效性,与相应涡扇发动机非线性部件级模型进行比较。在包线内任意选取慢车状态以上的状态点,进行燃油阶跃的小偏差仿真。本文在包线内任意选取 2 个状态点进行小偏差仿真验证,分别如图 3—4 所示。

通过对模型进行小偏差仿真验证发现,全包线

LPV 模型仿真结果与非线性仿真结果一致性较好,其动态和稳态误差小于 1%,可以较好反映发动机动态特性,具有较好的精度。

为验证本文全包线 LPV 模型大范围内的有效性,在飞行包线内给定发动机运行轨迹(飞行高度和马赫数),通过开环供油实现与非线性部件级模

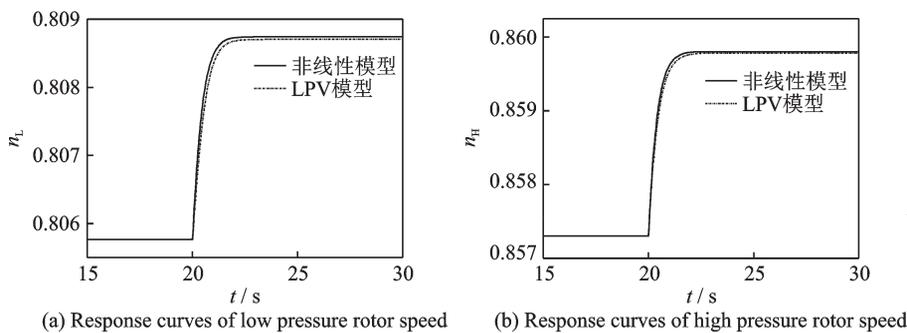


图 3  $H = 3 \text{ km}, Ma = 0.3$ 处模型仿真比较

Fig.3 Simulation at  $H = 3 \text{ km}, Ma = 0.3$

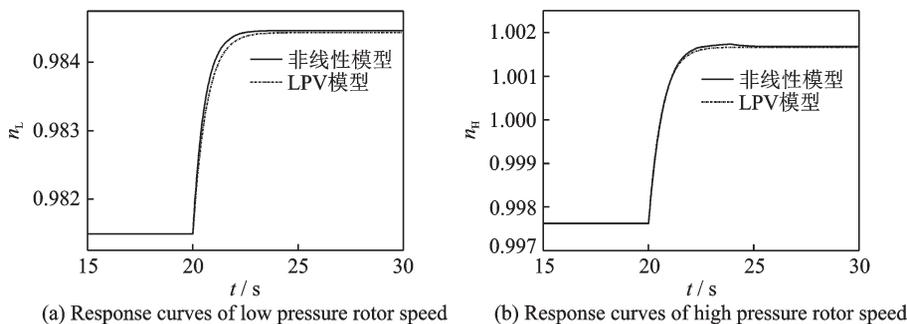


图 4  $H = 15 \text{ km}, Ma = 1.8$ 处模型仿真比较

Fig.4 Simulation at  $H = 15 \text{ km}, Ma = 1.8$

型慢车状态以上的加/减速大偏差仿真对比验证, 分别如图5—6所示。

通过对模型进行慢车状态以上的大偏差加/减

速仿真验证发现, 全包线LPV模型仿真相对于非线性模型动态输出, 跟踪的一致性较好, 其相对误差小于1.5%, 具有较好的动态响应品质和精度。

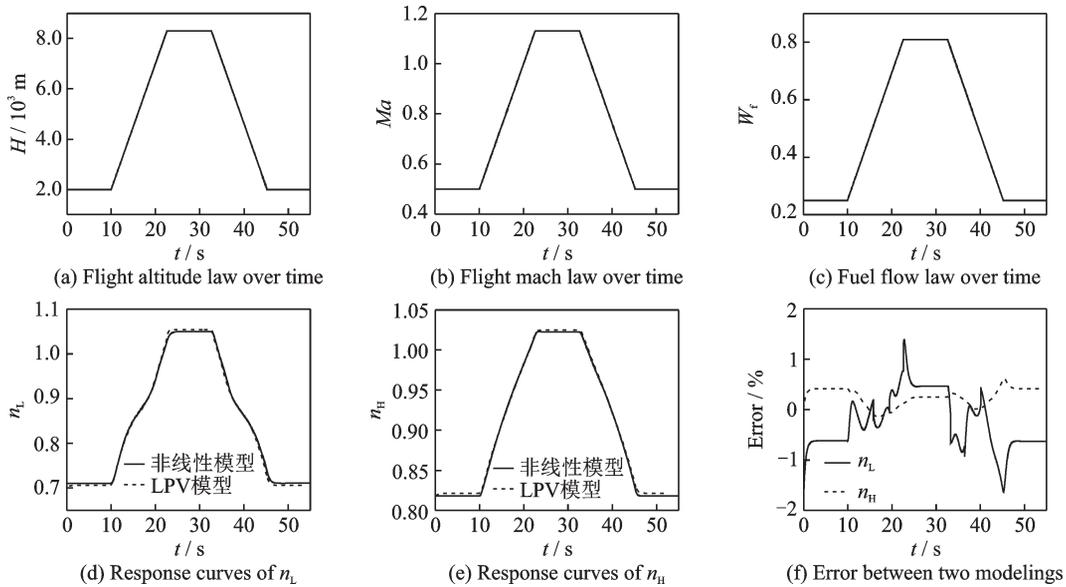


图5 全包线模型仿真 I

Fig.5 The first modeling simulation in the full envelope

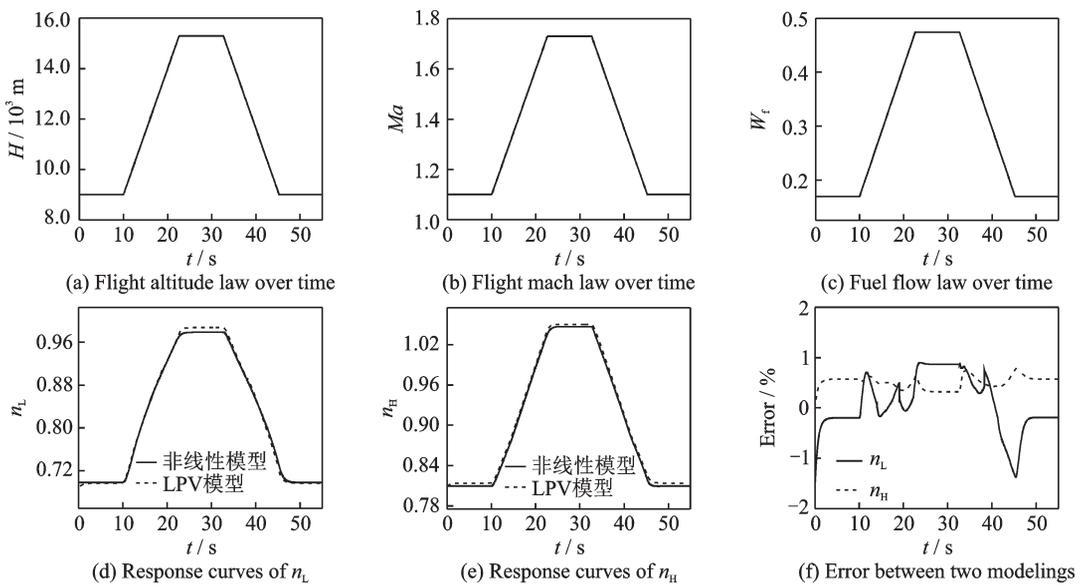


图6 全包线模型仿真 II

Fig.6 The second modeling simulation in the full envelope

### 3.2 LPV 控制

针对2.1节介绍的LPV控制方法, 分别选取不同的复平面LMI区域参数 $\alpha$ , 设计控制器, 分别作线性闭环系统的小阶跃仿真, 系统响应输出如图7所示。闭环系统极点以及闭环系统响应的调节时间如表1所示。

根据图7和表1可以发现, 当 $\alpha=0$ , 系统被控输出响应最慢, 是因为此时控制器仅考虑 $H_\infty$ 范数以及闭环极点与实轴夹角的约束, 并没有考虑系统动态响应速度的约束, 较之于基于区域极点配置的 $H_\infty$ /LPV控制器, 闭环系统动态特性难以保证。

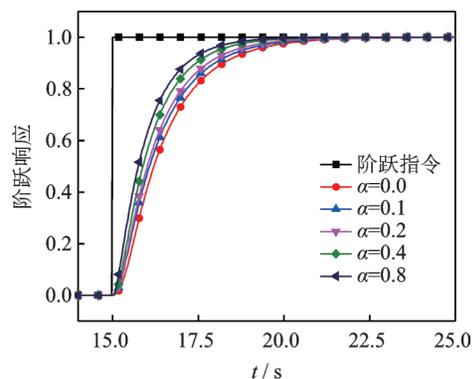


图7 不同LMI区域参数, 闭环系统小阶跃仿真

Fig.7 Closed-loop simulation with different LMI regions parameters

表 1 不同区域极点配置参数,控制系统参数分析

Tab.1 Analysis of controllers with different LMI regions parameters

区域极点配置参数 $\alpha$	调节时间/s	闭环主导极点
$\alpha=0$	4.05	$(-0.7914, 0)$
$\alpha=0.1$	3.84	$(-0.8430, 0)$
$\alpha=0.2$	3.52	$(-0.9044, 0)$
$\alpha=0.4$	3.10	$(-1.0365, 0)$
$\alpha=0.8$	2.71	$(-1.1325, 0)$

此外,随着 $\alpha$ 的增大,即极点约束区域离复平面原点越远,闭环系统响应越快。主要原因是选取的LMI区域离原点越远,即约束闭环系统极点的实部离虚轴越远,则闭环系统响应越快。

选取控制器参数( $\gamma_\infty=3, \alpha=0.8, \beta=45^\circ$ ),采用2.1节的控制方法设计LPV控制器,LPV闭环系统的极点分布图如图8所示,仅考虑 $H(\gamma_\infty=3)$ 性能指标的LPV控制器对应的极点分布图如图9所示。

从图8和图9可以发现,仅考虑 $H_\infty$ 性能指标的LPV控制器,即不考虑闭环系统极点配置约束时,闭环系统主导极点距原点的距离较基于区域极点配置 $H_\infty$ /LPV控制的距离远,区域极点配置将闭环系统极点约束在复平面上的一个合适的位置,

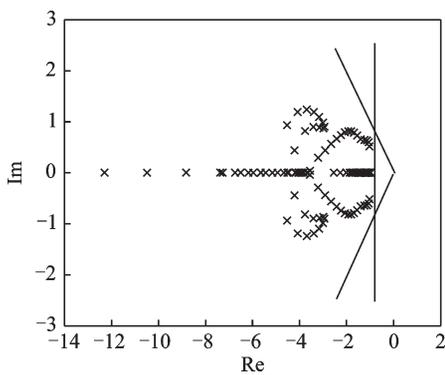


图8 基于区域极点配置 $H_\infty$ /LPV控制器,闭环系统极点分布图

Fig.8 Closed-loop poles with  $H_\infty$ /LPV controller based on guardian maps theory

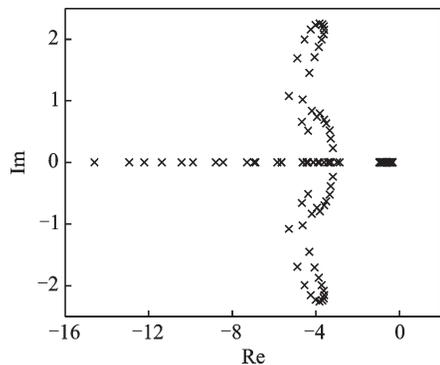


图9  $H_\infty$ /LPV控制器,闭环系统极点分布图

Fig.9 Closed-loop poles with  $H_\infty$  controller

从而保证系统具有理想的鲁棒稳定性的同时,还具有较好的系统动态特性。

利用设计的LPV控制器对部件级非线性模型进行高压涡轮转速控制,选取飞行包线点( $H=5\text{ km}, Ma=0.5$ )和( $H=15\text{ km}, Ma=1.5$ )作为验证点,控制效果分别如图10—11所示。

从图10和图11可以发现,本文设计的基于区域极点配置的 $H_\infty$ /LPV控制器显示出了较好的动态特性和稳态特性,闭环系统响应的调节时间不超过3s,超调量小于0.5%,稳态误差小于1%。

### 3.3 切换LPV控制

采用2.2节的切换控制方法设计基于区域极点配置的 $H_\infty$ /LPV切换控制器,并在全包线范围内选取发动机飞行轨迹两种场景如图12和图13所示,发动机工作在节流状态,给定功率杆变化规律,两种场景发动机转速响应分别如图14和图15所示。

从图13和图15中仿真结果可以发现,发动机在全包线范围内,随着运行条件(高度、马赫数以及功率杆)发生变化,发动机高压转速能够很好的跟踪控制计划设定的转速控制目标,具有较好的动态响应特性,调节时间不超过3s,超调量小于0.5%,稳态误差小于1%。当控制器发生切换时,控制器能够稳定工作,且可以实现控制器双向切换稳定。

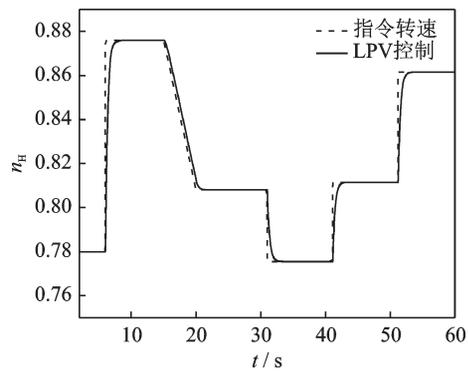


图10 ( $H=5\text{ km}, Ma=0.5$ )处转速控制仿真

Fig.10 Simulation of compressor speed at  $H=5\text{ km}, Ma=0.5$

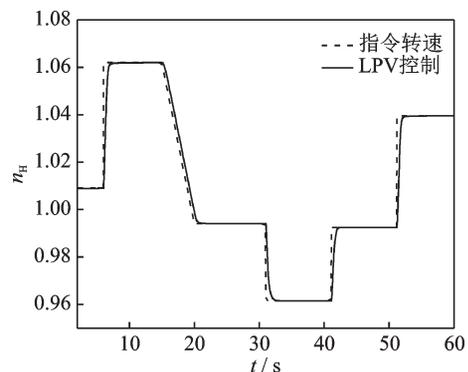


图11 ( $H=15\text{ km}, Ma=1.5$ )处转速控制仿真

Fig.11 Simulation of compressor speed at  $H=15\text{ km}, Ma=1.5$

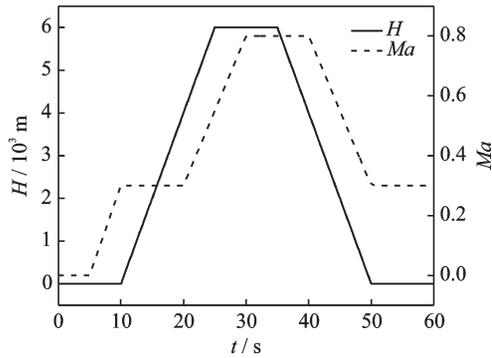


图12 飞行高度和马赫数变化(I)

Fig.12 Variation of flight altitude and mach number during simulation ( I )

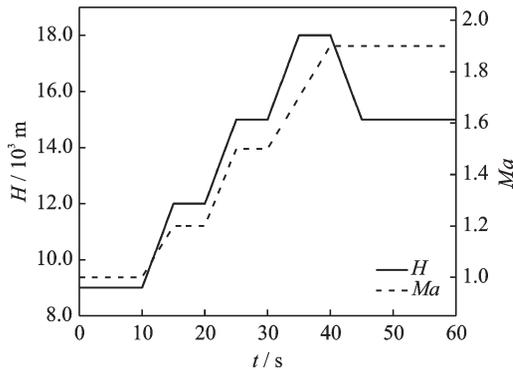


图13 飞行高度和马赫数变化(II)

Fig.13 Variation of flight altitude and mach number during simulation ( II )

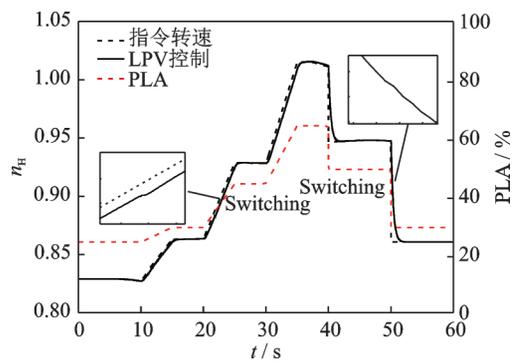


图14 PLA变化和转速跟踪曲线(I)

Fig.14 Variation of PLA and response curves of compressor speed ( I )

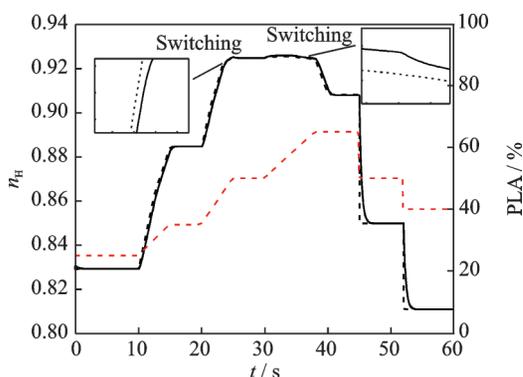


图15 PLA变化和转速跟踪曲线(II)

Fig.15 Variation of PLA and response curves of compressor speed ( II )

## 4 结 论

本文以喷口不可调的航空涡扇发动机为研究对象,基于发动机相似工作原理,推导出换算状态变量模型,建立包线内慢车状态以上的换算LPV模型,整合全包线慢车状态以上的换算LPV模型,并与非线性部件级模型仿真比较,验证该模型具有良好的精度。针对调度参数分段LPV系统,考虑基于区域极点配置的 $H_\infty$ /LPV控制方法,保证闭环系统极点配置在复平面上的一个理想的区域,并以Lyapunov函数为基础,研究关于调度参数分段的切换控制,在保证系统在全包线范围内的切换稳定性的同时,具有较好的动态性能以及鲁棒稳定性。

### 参考文献:

- [1] 黄金泉,仇小杰,鲁峰,等.航空发动机性能恢复控制方法[J].航空动力学报,2012,27(7):1595-1604.  
HUANG Jinqun, QIU Xiaojie, LU Feng, et al. Performance recovery control method for aircraft engine [J]. Journal of Aerospace Power, 2012, 27(7): 1595-1604.
- [2] 李文强. LPV系统鲁棒变增益控制研究及其应用[D].长沙:国防科技大学,2009.  
LI Wenqiang. Research and application of robust gain-scheduled based on LPV system [D]. Changsha: National University of Defense Technology, 2009.
- [3] 李华聪,王鑫,韩小宝,等.航空发动机线性变参数建模方法研究[J].推进技术,2007,28(4):418-421.  
LI Huacong, WANG Xin, HAN Xiaobao, et al. Study of aeroengine linear parameter varying modeling [J]. Journal of Propulsion Technology, 2007, 28(4): 418-421.
- [4] REBERGA L, HENRION D. LPV modeling of a turbofan engine [C]//the 16th IFAC World Congress. Czech Republic: Prague, 2005: 3-8.
- [5] HENRION D, REBERGA L, BERNUSSOU J, et al. Linearization and identification of aircraft turbofan engine models [C]//16th IFAC symposium on automatic control in aerospace. Saint-Petersburg, Russia: [s.n.], 2004: 13-19.
- [6] WILFRIED G, DIDIER H, JACQUES B. Polynomial LPV synthesis applied to turbofan engines [J]. Control Engineering Practice, 2010, 18: 1077-1083.
- [7] 李秋红,孙建国.航空发动机大偏差状态变量模型建立方法[J].南京航空航天大学学报,2010,42(2):175-178.  
LI Qiu hong, SUN Jianguo. Aero-engine large-deviation state variable modeling [J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2010, 42

- (2): 175-178.
- [8] 李剑, 谢寿生, 丁康乐. 航空发动机全飞行包线小偏差动态数字模型[J]. 空军工程大学学报(自然科学版), 2002, 3(5): 12-16.  
LI Jian, XIE Shousheng, DING Kangle. Whole flight envelop small - deviation state variable modeling for aeroengine [J]. Journal of Air Force Engineering University (Natural Science Edition), 2002, 3(5): 12-16.
- [9] 吴斌, 黄金泉. 航空发动机全包线鲁棒变增益LPV控制律设计[J]. 南京航空航天大学学报, 2014, 46(2): 252-258.  
WU Bin, HUANG Jinquan. Robust gain scheduled LPV control design for aeroengine in full envelope [J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2014, 46(2): 252-258.
- [10] 李述清, 张胜修, 胡卫红. 航空涡扇发动机全包线平衡流形建模[J]. 航空动力学报, 2011, 26(3): 537-542.  
LI Shuqing, ZHANG Shengxiu, HU Weihong. Whole flight envelope corrected equilibrium manifold modeling for a turbofan engine [J]. Journal of Aerospace Power, 2011, 26(3): 537-542.
- [11] 王斌, 王曦, 石玉麟, 等. 一种航空发动机的分段实时线性动态模型[J]. 航空动力学报, 2014, 29(3): 696-701.  
WANG Bin, WANG Xi, SHI Yulin, et al. A real-time piecewise linear dynamic model of aeroengine [J]. Journal of Aerospace Power, 2014, 29(3): 696-701.
- [12] 秦伟伟, 郑志强, 刘刚, 等. 高超声速飞行器的LPV鲁棒变增益控制[J]. 信息工程与电子技术, 2011, 33(6): 1327-1331.  
QIN Weiwei, ZHENG Zhiqiang, LIU Gang, et al. Robust variable gain control for hypersonic vehicles based on LPV [J]. System Engineering and Electronics. 2011, 33(6): 1327-1331.
- [13] SUN Changyin, HUANG Yiqing, QIAN Chengshan. On modeling and control of a flexible air-breathing hypersonic vehicle based on LPV method [J]. Frontiers of Electrical and Electronic Engineering, 2012, 7(1): 56-68.
- [14] SU Xiaofeng, JIA Shengxiu. Self-scheduled robust decoupling control with Hinf performance of hypersonic vehicle [J]. Systems and Control Letters, 2014, 70(70): 38-48.
- [15] HUNTER H, WU F. Hinf LPV state feedback control for flexible hypersonic vehicle longitudinal dynamics [C] // AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference. [S.l.]: AIAA, 2010: 1105-1112.
- [16] 张增辉, 杨凌宇, 申功璋. 高超声速飞行器大包线切换LPV控制方法[J]. 航空学报, 2012, 33(9): 1-10.  
ZHANG Zenghui, YANG Lingyu, SHEN Gong-zhang. Switching LPV control method in wide envelope for hypersonic vehicles [J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2012, 33(9): 1-10.
- [17] 吴斌, 黄金泉. 基于切换多胞LPV的涡扇发动机全包线中间状态控制[J]. 航空动力学报, 2016, 31(8): 2040-2048.  
WU Bin, HUANG Jinquan. Intermediate state control turbofan engine in full envelope based on switched polytopic LPV approach [J]. Journal of Aerospace Power, 2016, 31(8): 2040-2048.
- [18] LOGIST F, HOUSKA B, DIEHL M, et al. Robust multi-objective optimal control of uncertain (bio) chemical processes [J]. Chemical Engineering Science, 2011, 66(20): 4670-4682.
- [19] 宁响亮, 刘红军, 谭平, 等. 基于LMI的结构振动多目标鲁棒 $H_2/H_\infty$ 控制[J]. 振动工程学报, 2010, 23(2): 167-172.  
NING Xiangliang, LIU Junhong, TAN Ping, et al. Multi-objective robust  $H_2/H_\infty$  control for structural vibration based on LMI [J]. Journal of Vibration Engineering, 2010, 23(2): 167-172.
- [20] SAYDY L, TITS A L, ABED E H. Guardian maps and the generalized stability of parametrized families of matrices and polynomials [J]. Mathematics Control Signals Systems, 1990, 3(4): 345-371.
- [21] LU B, WU F, KIM S W. Switching LPV control for high performance tactical aircraft [C] // AIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit. Providence, Rhode Island: [s.n.], 2004: 5-11.
- [22] LU B, WU F, KIM S W. Switching LPV control of an F-16 aircraft via controller state reset [J]. IEEE Transactions on Control Systems, 2006, 14(2): 267-277.
- [23] 郑铁军, 王曦, 罗秀芹, 等. 建立航空发动机状态空间模型的修正方法[J]. 推进技术, 2005, 26(1): 46-49.  
ZHENG Tiejun, WANG Xi, LUO Xiuqin, et al. Modified method of establishing the state space model of aeroengine [J]. Journal of Propulsion Technology, 2005, 26(1): 46-49.
- [24] UFUK T, ANDREW P, PETER S. Stability region analysis using simulations and sum-of-squares programming [C] // Proceedings of the 2007 American Control Conference. New York: [s.n.], 2007: 6009-6014.
- [25] SCHERER C W. LMI relaxation in robust control [J]. European Journal of Control, 2006, 12(1): 3-29.
- [26] BRANICKY M S. Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1998, 43(4): 475-482.