DOI:10.16356/j.1005-2615.2019.03.011

二维复值Ginzburg-Landau方程的一个高阶紧致ADI差分格式

朱晨怡 王廷春
(南京信息工程大学数学与统计学院,南京,210044)

摘要: 对二维复值金兹堡朗道(Ginzburg-Landau,GL)方程提出一个基于时间分裂的高阶紧致交替方向隐式有限差分格式。本文通过时间分裂法将GL方程分裂成一个非线性子问题及两个线性子问题,对非线性子问题以及其中一个线性子问题均通过精确积分进行计算,并对另一线性子问题构造紧致交替方向隐式差分格式进行数值计算。实际计算中,在每一时间步,利用追赶法求解一族常系数三对角线性代数方程组,从而使得算法既具有较高精度又拥有较快的计算速度。数值实验表明该算法在时间和空间方向分别具有二阶和四阶精度,并模拟了方程的一些动力学行为。

关键词: 二维复值Ginzburg-Landau方程;时间分裂算法;紧致差分;交替方向隐格式

中图分类号: O241.82 **文献标志码:** A **文章编号:** 1005-2615(2019)03-0341-09

High-Order Compact Alternating Direction Implicit Scheme for Complex Ginzburg-Landau Equations in Two Dimensions

ZHU Chenyi, *WANG Tingchun*
(College of Mathematics and Statistics, Nanjing University of Information Science and Technology, Nanjing, 210044, China)

Abstract: In the paper, we propose a time-splitting high-order compact alternating direction implicit (ADI) finite difference scheme for two-dimensional complex Ginzburg-Landau (GL) equation. The GL equation is split into a nonlinear sub-problem and two linear sub-problems. The nonlinear sub-problem and one of the linear subproblems are solved exactly. Then a compact alternating direction implicit difference scheme is constructed for another linear subproblem. In practical computation, a family of constant coefficient tri-diagonal linear algebraic equations by using the catch-up method at each time step is solved to make the algorithm get high accuracy and efficiency. Numerical experiments show that the algorithm has second-order and fourth-order accuracy in time and space direction, respectively. And some dynamics behaviors of the equation are simulated.

Key words: two-dimensional complex Ginzburg-Landau equation; time-splitting algorithm; compact finite difference method; alternating direction implicit scheme

考虑研究如下含有周期边界条件的二维Ginzburg-Landau(GL)方程

$$\frac{\partial w}{\partial t}-(\nu+\mathrm{i}\alpha)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)+(\kappa+\mathrm{i}\beta)|w|^2 w-$$

基金项目: 国家自然科学基金(11571181)资助项目;江苏省自然科学基金(BK20171454)资助项目;江苏省"青蓝工程"资助项目。

收稿日期: 2018-03-05;**修订日期:** 2018-03-21

通信作者: 王廷春,男,副教授,E-mail:wangtingchun2010@gmail.com。

引用格式: 朱晨怡,王廷春. 二维复值Ginzburg-Landau方程的一个高阶紧致ADI差分格式[J]. 南京航空航天大学学报,2019,51(3):341-349. ZHU Chenyi, WANG Tingchun. High-Order Compact Alternating Direction Implicit Scheme for Complex Ginzburg-Landau Equations in Two Dimensions[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics,2019,51(3):341-349.

$$\gamma w=0\ (x,y)\in\Omega\quad t>0$$

$$w(x,y,0)=w_0(x,y)$$

式中：Ω是R^2上的有界域，$w(x,y,t)$，$w_0(x,y)$分别为未知和给定的复值函数；参数$\nu>0$，$\kappa>0$，α，β和γ都为实数；γ为线性项系数，当$\gamma\leqslant 0$，$t\to 0$时，所有解w将趋于0。

复值GL方程是1950年由Ginzburg和Landau基于朗道二级相变而共同构造出的一个描述超导理论的简化数学模型[1]。当问题(1.1)中的$\nu=\kappa=0$时，复值GL方程便是被广泛研究的非线性薛定谔方程。自GL方程被提出以来，已引起国内外学者的广泛研究兴趣，并对其展开了深入的研究。其中，郭柏灵院士和他的合作者们对该类方程展开了非常系统的研究，包括该类方程的非齐次初边值问题和有限维行为、周期解的存在性、整体解的存在唯一性和整体吸引子的存在性等[2-8]。

虽然已有大量文献分析了复值GL方程的精确解及其稳定性，但只有在极少数情况下可以获得该方程的解析解，因此运用数值方法近似求解就显得尤为重要。关于复值GL方程，一维情况下的一种特殊形式便是Kuramoto-Tsuzuki(KT)方程，Sun[9]构造了KT方程的非线性隐式有限差分格式，并证明了该格式是无条件收敛的，收敛阶为$O(h^2+\tau^2)$。此外，针对一维GL方程的周期初值问题，张晶等[10]提出了一个收敛阶能达到$O(h^2+\tau^4)$的非线性三层紧致差分格式。对于二维情况，许秋滨等[11-12]提出了该方程的时间分裂差分格式、半显式的线性两层差分格式和半显性三层差分格式，证明了上面3种线性化的差分格式收敛阶均为$O(h^2+\tau^2)$。Wang等[13]运用数学归纳法结合标准的能量方法对几个有限差分格式的收敛性给出了严格的证明。裴琴娟等[14]对该方程的周期边界问题又构造了3个数值格式，得到二阶隐式差分格式和四阶紧致格式的精度依然为$O(h^2+\tau^2)$，谱方法的精度是$O(h^m+\tau^2)$(m为正整数，其大小取决于方程的正则性)，并通过数值模拟分析了平面波解，表明了四阶紧致格式计算效果最好。王珊珊等[15-16]详细讨论了Ginzburg-Landau方程的差分解法，主要对二维GL方程构造了两种分裂步方法，即分裂步差分法和分裂步差分交替方向隐式法，其中，对非线性子问题的离散采用显式龙格库塔(Runge-Kutta，RK)方法，从而对时间步长的选取具有极为苛刻的要求。文献[17]也都引入了交替方向隐式法求解GL方程，以增加其高维格式的计算速度，文献[17]对处理后的方程提出了一个预测-校正格式，该格式主要是为了对非线性项进行复迭代处理，最终算法在空间方向具有四阶精度，时间方向具有二阶精度，虽然避免了解决非线性项求解的困难并提高了精度，但是该迭代的引入仍增加了计算量，影响到计算效率。

本文基于时间分裂对二维复值GL方程提出一个高阶紧致交替方向隐式差分格式。该算法将GL方程分裂成一个非线性子问题和两个线性子问题，对其中一个线性子问题以及非线性子问题均可视为常微分方程进行精确积分计算，并对另一个线性子问题构造一个紧致交替方向隐式差分格式进行数值求解。该算法在时间和空间方向上分别具有二阶和四阶精度，计算中不需要迭代，每一个时间层只需运用追赶法求解一族常系数三对角线性代数方程组，从而既具有较高的精度又具有较快的计算效率。

1 数值格式构造

基于周期边界条件，取计算区间$\Omega=[x_L,x_R]\times[y_L,y_R]$，$l_1=x_R-x_L$，$l_2=y_R-y_L$，考虑如下二维复值GL方程的初边值问题

$$\frac{\partial w}{\partial t}-(\nu+\mathrm{i}\alpha)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)+(\kappa+\mathrm{i}\beta)|w|^2 w-\gamma w=0\ (x,y)\in\Omega\quad 0<t<T \tag{1}$$

$$w(x+l_1,y,t)=w(x,y,t),w(x,y+l_2,t)=w(x,y,t),(x,y)\in\Omega\quad 0<t<T \tag{2}$$

$$w(x,y,t=0)=w_0(x,y)\ (x,y)\in\Omega \tag{3}$$

1.1 时间分裂法

时间分裂法是一种十分实用的数值算法，它可以将复杂的非线性问题分裂成一个线性子问题和一个简单的非线性子问题，从而降低数值求解难度并大幅减少计算量。下面来概述一般演化方程的时间分裂算法[18]。考虑演化方程

$$\partial_t w=\psi(w)=\boldsymbol{A}w+\boldsymbol{P}w \tag{4}$$

式中：映射$\psi(w)$通常是一个非线性分裂算子，且$\psi(w)=\boldsymbol{A}w+\boldsymbol{P}w$分解是任意的；一般$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{P}$是两个不可交换的算子，即$\boldsymbol{AP}\neq\boldsymbol{PA}$。对于已知的时间步长$\tau>0$，令$t_n=n\tau$，$n=0,1,2,\cdots$，同时$w^n$是$w(t_n)$的近似值。式(4)常用的二阶时间分裂算法可由Strang分裂公式[19]$w^{n+1}=[\zeta_2(\tau)](w^n)$得到

$$w^{(1)}=\exp\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{A}\tau\right)w^n,w^{(2)}=\exp(\boldsymbol{P}\tau)w^{(1)},w^{n+1}=\exp\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{A}\tau\right)w^{(2)} \tag{5}$$

它们都是显式的。继而，若将算子$\boldsymbol{P}$分裂为$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$两个算子，即$\boldsymbol{P}w=\boldsymbol{B}w+\boldsymbol{C}w$。则式(4)即为

$$\partial_t w=\boldsymbol{A}w+\boldsymbol{B}w+\boldsymbol{C}w \tag{6}$$

先将 $\zeta_2(\tau)$ 作用在算子 C 和 $B+A$ 上,再分别作用于 A 和 B,则得到3个算子的Strang分裂

$$
\begin{aligned}
w(\cdot,t_{n+1}) &= \exp[(A+B+C)\tau]w(\cdot,t_n)= \\
&\exp\left(\frac{1}{2}C\tau\right)\exp[(B+A)\tau]\exp\left(\frac{1}{2}C\tau\right)w(\cdot,t_n)+O(\tau^2)= \\
&\exp\left(\frac{1}{2}C\tau\right)\exp\left(\frac{1}{2}B\tau\right)\exp(A\tau)\exp\left(\frac{1}{2}B\tau\right)\exp\left(\frac{1}{2}C\tau\right)w(\cdot,t_n)+O(\tau^2)
\end{aligned}
\tag{7}
$$

式中:若算子 A,B,C 可两两交换顺序,则式(7)不存在分裂误差。由此,从 t_n 时刻到 t_{n+1} 时刻可作如下二阶时间分裂

$$
\begin{aligned}
&w^{(1)}=\exp\left(\frac{1}{2}C\tau\right)w^n,\ w^{(2)}=\exp\left(\frac{1}{2}B\tau\right)w^{(1)},\ w^{(3)}=\exp(A\tau)w^{(2)}, \\
&w^{(4)}=\exp\left(\frac{1}{2}B\tau\right)w^{(3)},\ w^{n+1}=\exp\left(\frac{1}{2}C\tau\right)w^{(4)}
\end{aligned}
\tag{8}
$$

显然上面的二阶分裂仍是显式的。

若定义算子 A、B、C 为

$$Cw(x,y,t)=-(\kappa+\mathrm{i}\beta)\left|w(x,y,t)\right|^2w(x,y,t)$$

$$Bw(x,y,t)=\gamma w(x,y,t)$$

$$Aw(x,y,t)=(\nu+\mathrm{i}\alpha)\left(\frac{\partial^2 w(x,y,t)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w(x,y,t)}{\partial y^2}\right)$$

那么式(1)可分裂为如下3个子问题

$$\frac{\partial w(x,y,t)}{\partial t}=-(\kappa+\mathrm{i}\beta)\left|w(x,y,t)\right|^2w(x,y,t)\tag{9}$$

$$\frac{\partial w(x,y,t)}{\partial t}=\gamma w(x,y,t)\tag{10}$$

$$\frac{\partial w(x,y,t)}{\partial t}=(\nu+\mathrm{i}\alpha)\cdot\left(\frac{\partial^2 w(x,y,t)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w(x,y,t)}{\partial y^2}\right)\tag{11}$$

$$w(x+l_1,y,t)=w(x,y,t),\quad w(x,y+l_2,t)=w(x,y,t)\tag{12}$$

$$w(x,y,t=0)=w_0(x,y)\tag{13}$$

接下来,分别对式(1)的3个子问题式(9—11)进行求解。

1.2　两个常微分方程子问题的精确求解

对任意固定的 x,y,非线性子问题式(9)作为常微分方程的求解计算在文献[15,16,18,20]中略有提及,本文将重新进行详细计算。复值函数 $w(x,y,t)$ 写成

$$w(x,y,t)=\sqrt{\sigma(x,y,t)}\exp(\mathrm{i}P(x,y,t))\tag{14}$$

式中:实值函数 $\sigma(x,y,t)=\left|w(x,y,t)\right|^2$,$P(x,y,t)$ 是关于辐角的实值函数。

对式(9)两端同时乘共轭函数 $\bar{w}(x,y,t)$,并取实部可得

$$\partial_t\sigma(x,y,t)=-2\kappa\sigma^2(x,y,t)\tag{15}$$

即

$$\sigma(x,y,t)=-\frac{\partial_t\sigma(x,y,t)}{2\kappa\sigma(x,y,t)}=-\frac{1}{2\kappa}\partial_t\ln\sigma(x,y,t)\tag{16}$$

注意到已知量 $\sigma(x,y,t_n)$,对式(16)两边积分并移项有

$$\frac{\sigma(x,y,t)}{\sigma(x,y,t_n)}=\frac{1}{1+2\kappa(t-t_n)\sigma(x,y,t_n)}\tag{17}$$

为求解实值函数 $P(x,y,t)$,可将定义的式(14)代入式(9)并取虚部,得

$$\partial_t P(x,y,t)=-\beta\sigma(x,y,t)\tag{18}$$

假设 $\sigma(x,y,t)\neq 0$(若 $\sigma(x,y,t)=0$,辐角函数 $P(x,y,t)$ 任意),将 $\sigma(x,y,t)$ 代入式(18),有

$$\partial_t P(x,y,t)=\frac{\beta}{2\kappa}\partial_t\ln\sigma(x,y,t)\tag{19}$$

对式(19)从 t_n 到 t 积分,并结合式(17)解得

$$P(x,y,t)=P(x,y,t_n)-\frac{\beta}{2\kappa}\ln[1+2\kappa(t-t_n)\sigma(x,y,t_n)]\tag{20}$$

然后,把式(17,20)代入式(14),可得

$$w(x,y,t)=\sqrt{\frac{\sigma(x,y,t_n)}{1+2\kappa(t-t_n)\sigma(x,y,t_n)}}\exp\left[\mathrm{i}P(x,y,t_n)-\mathrm{i}\frac{\beta}{2\kappa}\ln(1+2\kappa(t-t_n)\sigma(x,y,t_n))\right]$$

又 $w(x,y,t_n)=\sqrt{\sigma(x,y,t_n)}\exp(\mathrm{i}P(x,y,t_n))$,故最终精确解可简化为

$$w(x,y,t)=\frac{w(x,y,t_n)}{\sqrt{\theta(x,y,t)}}\exp\left(-\mathrm{i}\frac{\beta}{2\kappa}\ln\theta(x,y,t)\right)\quad x\in\Omega,n=0,1,2,\cdots\tag{21}$$

式中:$\theta(x,y,t)=1+2\kappa(t-t_n)\left|w(x,y,t_n)\right|^2$,因而式(9)由式(21)即可得解。

另一方面,线性子问题式(10)是个简单的常微分方程,因此可直接积分得其精确解

$$w(x,y,t)=w(x,y,t_n)\exp[\gamma(t-t_n)] \tag{22}$$

1.3 求解线性子问题的紧致交替方向隐式差分法

线性子问题式(11)可通过紧致交替方向隐式差分法进行求解，现将方程重新改写

$$\frac{\partial w(x,y,t)}{\partial t}=(\nu+\mathrm{i}\alpha)\frac{\partial^2 w(x,y,t)}{\partial x^2} \tag{23}$$

$$\frac{\partial w(x,y,t)}{\partial t}=(\nu+\mathrm{i}\alpha)\frac{\partial^2 w(x,y,t)}{\partial y^2} \tag{24}$$

将方程的有界域$\Omega\times[0,T]$给定等距网格剖分，选取正整数J,K,N，使其剖分为一个$J\times K\times N$的矩形网格。记网格空间步长为$h_x=l_1/J$和$h_y=l_2/K$，时间步长为$\tau=T/N$，并令$x_j=x_L+jh_x\ (0\leqslant j\leqslant J)$，$y_k=y_L+kh_y\ (0\leqslant k\leqslant K)$，$t_n=n\tau(0\leqslant n\leqslant N)$，网格结点为$(x_j,y_k,t_n)$，设$\{w_{j,k}^n|0\leqslant j\leqslant J,0\leqslant k\leqslant K,0\leqslant n\leqslant N\}$为一网格函数，则在空间中$(x_j,y_k,t_n)$的点对应微分方程的解为$w_{j,k}^n$，即$w_{j,k}^n$表示$w(x_j,y_k,t_n)$的近似值。定义算子

$$\Gamma w_{j,k}^n=\begin{cases}\frac{1}{12}(w_{j-1,k}^n+10w_{j,k}^n+w_{j+1,k}^n) \\ \quad 1\leqslant j\leqslant J-1;0\leqslant k\leqslant K \\ w_{j,k} \\ \quad j=0,J;0\leqslant k\leqslant K\end{cases}$$

$$\Lambda w_{j,k}^n=\begin{cases}\frac{1}{12}(w_{j,k-1}^n+10w_{j,k}^n+w_{j,k+1}^n) \\ \quad 1\leqslant k\leqslant K-1;0\leqslant j\leqslant J \\ w_{j,k} \\ \quad k=0,K;0\leqslant j\leqslant J\end{cases}$$

易知，$\Gamma w_{j,k}^n=\left(1+\frac{h_x^2}{12}\delta_x^2\right)w_{j,k}^n$，$\Lambda w_{j,k}^n=\left(1+\frac{h_y^2}{12}\delta_y^2\right)w_{j,k}^n(1\leqslant j\leqslant J-1,1\leqslant k\leqslant K-1)$。

同时引进如下记号

$$w_{j,k}^{n+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}(w_{j,k}^n+w_{j,k}^{n+1}) \quad \delta_t w_{j,k}^{n+\frac{1}{2}}=\frac{1}{\tau}(w_{j,k}^{n+1}-w_{j,k}^n)$$

$$\delta_x^2 w_{j,k}^n=\frac{1}{h_x^2}(w_{j-1,k}^n-2w_{j,k}^n+w_{j+1,k}^n)$$

$$\delta_y^2 w_{j,k}^n=\frac{1}{h_y^2}(w_{j,k-1}^n-2w_{j,k}^n+w_{j,k+1}^n)$$

应用文献[21]中所建立的紧致有限差分格式，在点$\left(x_j,y_k,t_{n+\frac{1}{2}}\right)$处考虑微分方程，并引入紧致差分算子$\Gamma$和$\Lambda$分别对式(23)和(24)进行离散，最终可得紧致有限差分格式为

$$\Gamma\delta_t w_{j,k}^{n+\frac{1}{2}}=(\nu+\mathrm{i}\alpha)\delta_x^2 w_{j,k}^{n+\frac{1}{2}} \quad 1\leqslant j\leqslant J-1$$

$$\Lambda\delta_t w_{j,k}^{n+\frac{1}{2}}=(\nu+\mathrm{i}\alpha)\delta_y^2 w_{j,k}^{n+\frac{1}{2}} \quad 1\leqslant k\leqslant K-1$$

将$\Gamma w_{j,k}^n$，$w_{j,k}^{n+\frac{1}{2}}$，$\partial_t w_{j,k}^{n+\frac{1}{2}}$和$\delta_x^2 w_{j,k}^n$代入$\Gamma\delta_t^2 w_{j,k}^{n+\frac{1}{2}}$中进行展开

$$\frac{1}{12\tau}[(w_{j-1,k}^{n+1}-w_{j-1,k}^n)+10(w_{j,k}^{n+1}-w_{j,k}^n)+(w_{j+1,k}^{n+1}-w_{j+1,k}^n)]=$$
$$\frac{\nu+\mathrm{i}\alpha}{2h^2}(w_{j+1,k}^n+w_{j+1,k}^{n+1}-2w_{j,k}^n-2w_{j,k}^{n+1}+w_{j-1,k}^n+w_{j-1,k}^{n+1})$$

移项合并，令$\rho=\frac{\tau}{h^2}$，对上式整理后有

$$\left[\frac{1}{12}-\frac{\rho}{2}(\nu+\mathrm{i}\alpha)\right](w_{j-1,k}^{n+1}+w_{j+1,k}^{n+1})+\left[\frac{5}{6}+\rho(\nu+\mathrm{i}\alpha)\right]w_{j,k}^{n+1}=$$
$$\left[\frac{1}{12}+\frac{\rho}{2}(\nu+\mathrm{i}\alpha)\right](w_{j-1,k}^n+w_{j+1,k}^n)+\left[\frac{5}{6}-\rho(\nu+\mathrm{i}\alpha)\right]w_{j,k}^n \tag{25}$$

式(25)即为式(23)的高阶紧致有限差分格式。类似地，可得式(24)的高阶紧致有限差分格式为

$$\left[\frac{1}{12}-\frac{\rho}{2}(\nu+\mathrm{i}\alpha)\right](w_{j,k-1}^{n+1}+w_{j,k+1}^{n+1})+\left[\frac{5}{6}+\rho(\nu+\mathrm{i}\alpha)\right]w_{j,k}^{n+1}=$$
$$\left[\frac{1}{12}+\frac{\rho}{2}(\nu+\mathrm{i}\alpha)\right](w_{j,k-1}^n+w_{j,k+1}^n)+\left[\frac{5}{6}-\rho(\nu+\mathrm{i}\alpha)\right]w_{j,k}^n \tag{26}$$

令

$$\boldsymbol{A}=\frac{1}{12}-\frac{\rho}{2}(\nu+\mathrm{i}\alpha) \quad \boldsymbol{B}=\frac{5}{6}+\rho(\nu+\mathrm{i}\alpha)$$

$$\boldsymbol{C}_{j,k}^n=\left(\frac{1}{6}-\boldsymbol{A}\right)(w_{j-1,k}^n+w_{j+1,k}^n)+\left(\frac{5}{3}-\boldsymbol{B}\right)w_{j,k}^n$$

$$\boldsymbol{D}_{j,k}^n=\left(\frac{1}{6}-\boldsymbol{A}\right)(w_{j,k-1}^n+w_{j,k+1}^n)+\left(\frac{5}{3}-\boldsymbol{B}\right)w_{j,k}^n$$

可将格式(25,26)分别简记为

$$\boldsymbol{A}w_{j-1,k}^{n+1}+\boldsymbol{B}w_{j,k}^{n+1}+\boldsymbol{A}w_{j+1,k}^{n+1}=\boldsymbol{C}_{j,k}^n \tag{27}$$

$$\boldsymbol{A}w_{j,k-1}^{n+1}+\boldsymbol{B}w_{j,k}^{n+1}+\boldsymbol{A}w_{j,k+1}^{n+1}=\boldsymbol{D}_{j,k}^n \tag{28}$$

对固定的k（沿x分向），式(27)改写为

$$\begin{pmatrix} B & A & \cdots & & A \\ A & B & A & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & A & B & A \\ A & \cdots & & A & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_{1,k}^{n+1} \\ w_{2,k}^{n+1} \\ \vdots \\ w_{J-2,k}^{n+1} \\ w_{J-1,k}^{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} C_{1,k}^{n} \\ C_{2,k}^{n} \\ \vdots \\ C_{J-2,k}^{n} \\ C_{J-1,k}^{n} \end{pmatrix}$$

$$k=1,2,\cdots,K-1$$

对固定的j(沿y分向)，式(28)改写为如下矩阵形式

$$\begin{pmatrix} B & A & \cdots & & A \\ A & B & A & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & A & B & A \\ A & \cdots & & A & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_{j,1}^{n+1} \\ w_{j,2}^{n+1} \\ \vdots \\ w_{j,K-2}^{n+1} \\ w_{j,K-1}^{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} D_{j,1}^{n} \\ D_{j,2}^{n} \\ \vdots \\ D_{j,K-2}^{n} \\ D_{j,K-1}^{n} \end{pmatrix}$$

$$j=1,2,\cdots,J-1$$

由以上矩阵形式可知：就二维线性子问题式(11—13)的数值求解而言，此高阶紧致有限差分格式在每一时间层均为对称且对角占优的周期三对角线性方程组，可用追赶法进行快速求解，从而即具有较高的精度又具有极高的计算效率。

1.4 具体的数值格式

本节给出二维GL方程的一个基于时间分裂的高阶紧致交替方向隐格式，利用二阶时间分裂结果和各个子问题的解，从$t_n \sim t_{n+1}$构造出具体数值格式为

(1) $$w_{j,k}^{(1)}=\frac{w_{j,k}^{n}}{\sqrt{1+2\kappa\frac{\tau}{2}\left|w_{j,k}^{n}\right|^2}}\cdot \exp\left(-\mathrm{i}\frac{\beta}{2\kappa}\ln\left|1+2\kappa\frac{\tau}{2}\left|w_{j,k}^{n}\right|^2\right|\right)$$

(2) $$w_{j,k}^{(2)}=w_{j,k}^{(1)}\exp\left(\frac{\tau}{2}\gamma\right)$$

(3) $$\left[\frac{1}{12}-\frac{\rho}{2}(\nu+\mathrm{i}\alpha)\right](w_{j-1,k}^{(3)}+w_{j+1,k}^{(3)})+\left[\frac{5}{6}+\rho(\nu+\mathrm{i}\alpha)\right]w_{j,k}^{(3)}=\left[\frac{1}{12}+\frac{\rho}{2}(\nu+\mathrm{i}\alpha)\right](w_{j-1,k}^{(2)}+w_{j+1,k}^{(2)})+\left[\frac{5}{6}-\rho(\nu+\mathrm{i}\alpha)\right]w_{j,k}^{(2)}$$

$$\left[\frac{1}{12}-\frac{\rho}{2}(\nu+\mathrm{i}\alpha)\right](w_{j,k-1}^{(4)}+w_{j,k+1}^{(4)})+\left[\frac{5}{6}+\rho(\nu+\mathrm{i}\alpha)\right]w_{j,k}^{(4)}=\left[\frac{1}{12}+\frac{\rho}{2}(\nu+\mathrm{i}\alpha)\right](w_{j,k-1}^{(3)}+w_{j,k+1}^{(3)})+\left[\frac{5}{6}-\rho(\nu+\mathrm{i}\alpha)\right]w_{j,k}^{(3)}$$

(4) $$w_{j,k}^{(5)}=w_{j,k}^{(4)}\exp\left(\frac{\tau}{2}\gamma\right)$$

(5) $$w_{j,k}^{n+1}=\frac{w_{j,k}^{(5)}}{\sqrt{1+2\kappa\frac{\tau}{2}\left|w_{j,k}^{(5)}\right|^2}}\exp\left(-\mathrm{i}\frac{\beta}{2\kappa}\cdot \ln\left|1+2\kappa\frac{\tau}{2}\left|w_{j,k}^{(5)}\right|^2\right|\right)$$

显见，该算法的误差仅来自线性子问题的高阶紧致有限差分离散和二阶时间分裂。

2 数值模拟

便于验证所给算法的收敛性和高精度，文中引入误差函数的l^2范数和l^∞范数

$$\mathrm{e}^n(h_x,h_y,\tau):=u_{j,k}^n-u(x_j,y_k,t_n)$$

$$\left\|\mathrm{e}^n\right\|_2=\sqrt{h\sum_{j=0}^{J-1}\sum_{k=0}^{K-1}\left|u_{j,k}^n-u(x_j,y_k,t_n)\right|^2}$$

$$\left\|\mathrm{e}^n\right\|_\infty=\max_{0\leqslant j\leqslant J-1,0\leqslant k\leqslant K-1}\left|u_{j,k}^n-u(x_j,y_k,t_n)\right|$$

$$\mathrm{Re}_\infty=\left\|\mathrm{Real}(u_{j,k}^n-u(x_j,y_k,t_n))\right\|_\infty$$

$$\mathrm{Im}_\infty=\left\|\mathrm{Imag}(u_{j,k}^n-u(x_j,y_k,t_n))\right\|_\infty$$

$$\mathrm{order}_1=\log_2\left(\frac{\left\|\mathrm{e}^n(h_x,h_y,\tau)\right\|_2}{\left\|\mathrm{e}^n(h_x,h_y,\tau/2)\right\|_2}\right)$$

$$\mathrm{order}_2=\log_2\left(\frac{\left\|\mathrm{e}^n(h_x,h_y,\tau)\right\|_2}{\left\|\mathrm{e}^n(h_x/2,h_y/2,\tau)\right\|_2}\right)$$

接下来的几个算例将选取如下的初始条件[17]

$$u(x,y,t=0)=u_0(x,y)=A_0(x,y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}S_0(x,y)}\quad(x,y)\in\Omega \tag{29}$$

式中：$A_0(x,y)$和$S_0(x,y)$均是已知的实值函数。

2.1 零初始相位数据

该算例中，函数$A_0(x,y)$和$S_0(x,y)$从文献[17]中所选取，即有

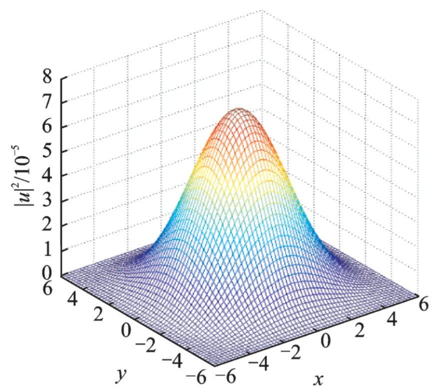
$$A_0(x,y)=\mathrm{e}^{-2x^2-2y^2}\quad S_0(x,y)=0\quad(x,y)\in\Omega \tag{30}$$

取$\Omega=[-6,6]\times[-6,6]$，$\alpha=0.2$，$\beta=1.0$，$\nu=1.0$，$\kappa=1.0$，$\gamma=-0.2$，$dt=0.01$，$h_x=h_y=0.2$。由文献[12,17]，在该初值条件下，可得结论：当$\gamma<0$时，$\|u\|_\infty$将趋于0。

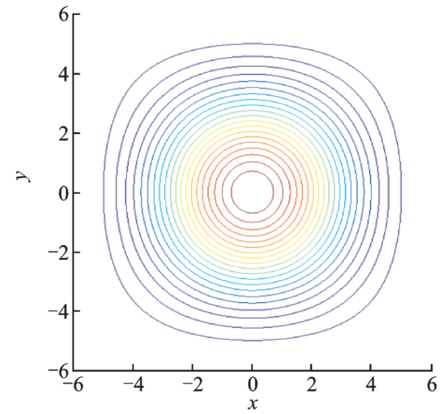
图1分别表示T=5和T=10时在初值式(30)下的数值模拟结果。图1左侧表示T值所对应的网格图，右侧表示网格图对应的等高线图，反映了在T=5和T=10时$|u|^2$的位置密度和等高线处对应的解，同时也证明了当$\gamma<0$时，$\|u\|_\infty$值会减小。

2.2 对称的非零相位初始数据

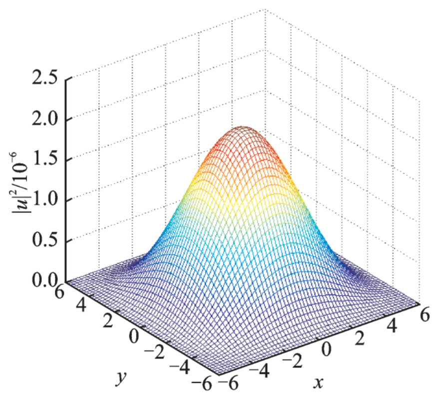
该算例中，选取文献[17]中的实值函数为



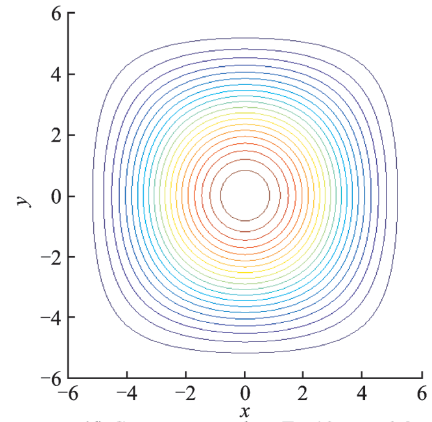
(a) Location density grid when $T=5, \gamma=-0.2$



(b) Contour map when $T=5, \gamma=-0.2$



(c) Location density grid when $T=10, \gamma=-0.2$



(d) Contour map when $T=10, \gamma=-0.2$

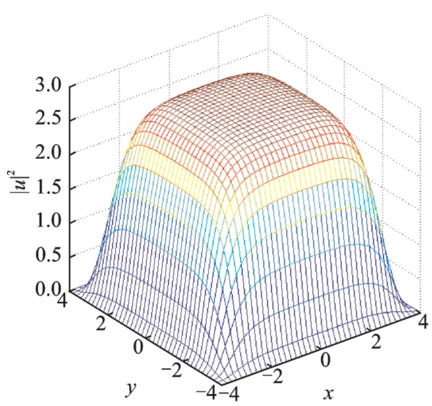
图1　周期初边值问题式(30)的数值模拟

Fig. 1　Numerical simulation of the periodic initial-boundary value problem (30)

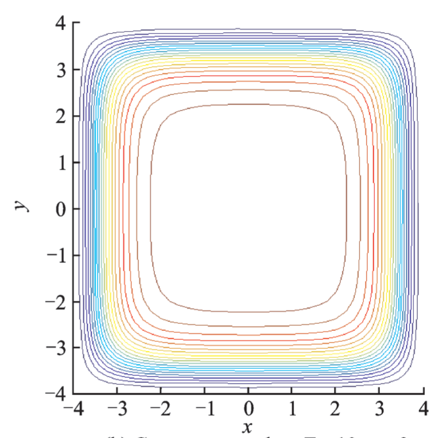
$$A_0(x,y)=\mathrm{e}^{-2x^2-2y^2}$$
$$S_0(x,y)=\frac{1}{\mathrm{e}^{x+y}+\mathrm{e}^{-x-y}}\quad (x,y)\in\Omega \tag{31}$$

式中 $\Omega=[-4,4]\times[-4,4]$，把边界条件设置为0，同时选取参数：$\alpha=0.5$，$\beta=1.0$，$\nu=1.0$，$\kappa=1.0$，$\gamma=3.0$，$dt=0.01$，$h_x=h_y=0.2$。

图2体现了 $T=10$ 时格式在对称的非零相位初始条件下的数值模拟结果，图3表达的是在参数 β 变化的情况下，$|u|^2$ 的位置密度和等高线处对应解的变化。随着时间的增加，波形的变化还是很明显的，这跟文献[17]中的结论显然一致。



(a) Location density grid when $T=10, \gamma=3$



(b) Contour map when $T=10, \gamma=3$

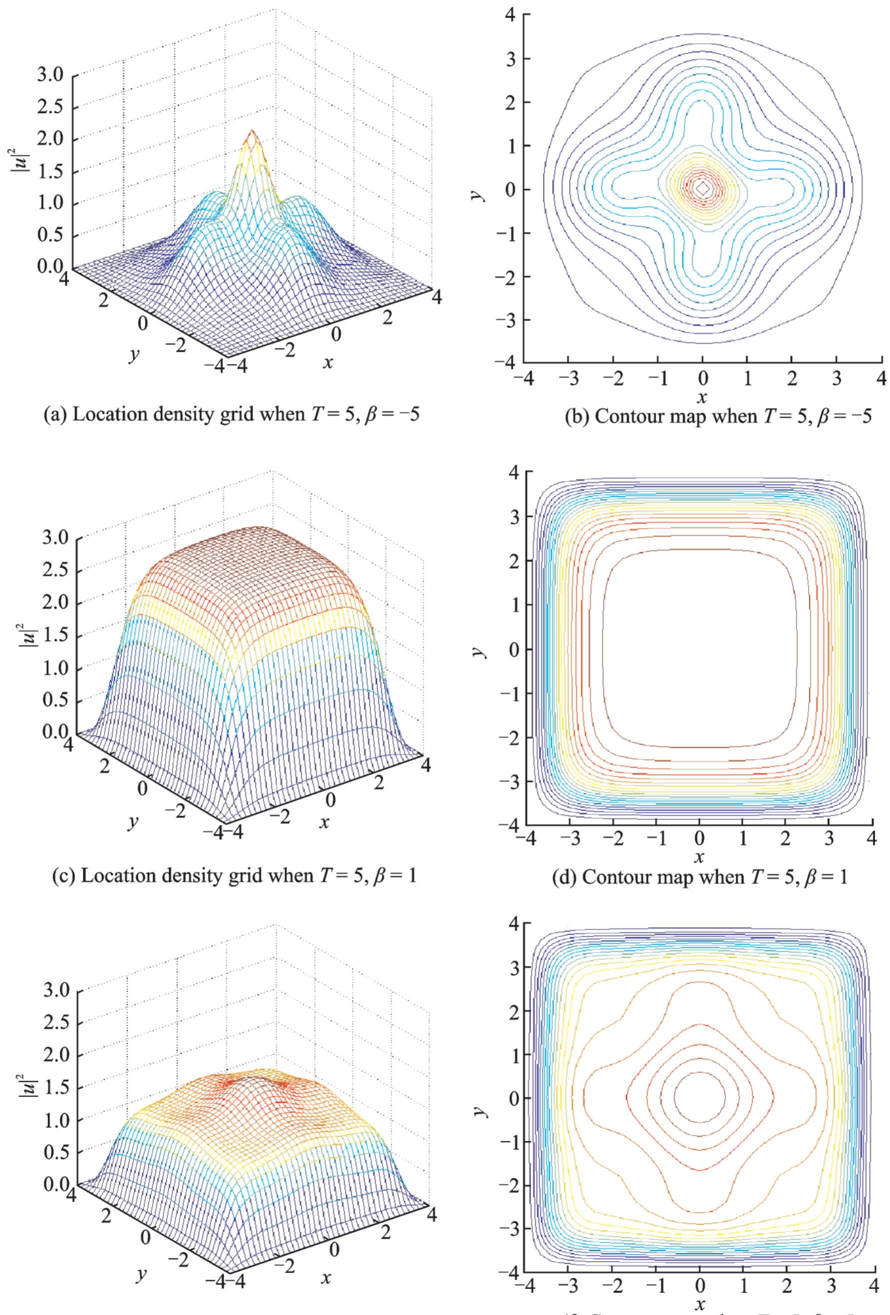
图2　周期初边值问题式(31)当 $\beta=1.0$ 时在 $T=10$ 的数值模拟

Fig. 2　Numerical simulation of the periodic initial-boundary value problem (31) at $T=10$ with $\beta=1.0$

对 $T=5$ 的情况选取参数 β 分别为 $-5,1,5$，进行数值模拟结果图3所示。

2.3　变系数GL方程

考虑如下的变系数方程



(a) Location density grid when $T=5, \beta=-5$　(b) Contour map when $T=5, \beta=-5$

(c) Location density grid when $T=5, \beta=1$　(d) Contour map when $T=5, \beta=1$

(e) Location density grid when $T=5, \beta=5$　(f) Contour map when $T=5, \beta=5$

图 3　周期初边值问题(3.3)当 $\alpha=0.5$ 时在 $T=5$ 的数值模拟

Fig. 3　Numerical simulation of the periodic initial-boundary value problem (3.3) at $T=5$ with $\alpha=0.5$

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\mathrm{i}}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+\mathrm{i}|u|^2 u+\mathrm{i}(1-\sin^2(x)\sin^2(y))u=0 \tag{32}$$

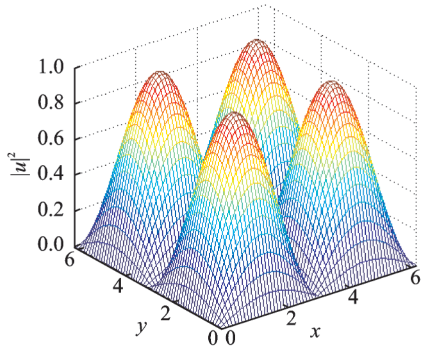
在有限域 $\Omega\times[0,T]$ 上，其中 $\Omega=(0,2\pi)\times(0,2\pi)$。文献[17]中给出该方程的精确解为

$$u(x,y,t)=\sin(x)\sin(y)\mathrm{e}^{-2ti} \tag{33}$$

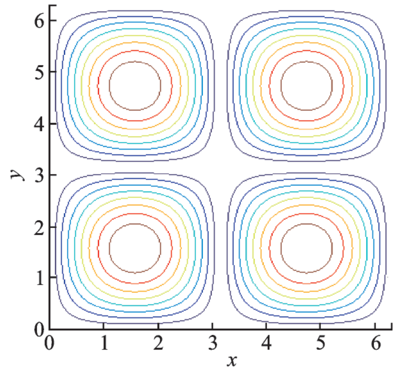
显而易见，式(32)和式(1)的差别就在于后者系数 γ 是常数，而前者系数 $\gamma=-\mathrm{i}(1-\sin^2(x)\sin^2(y))$。式中：参数 $\alpha=0.5,\beta=1.0,\nu=0.0,\kappa=0.0$，边界条件一样设置为0。图4模拟了变系数方程(32)在 $T=10$ 时 $|u|$ 的位密度图以及解的等高线图。

同时，表1给出 $\|e^n\|_2$ 和 $\|e^n\|_\infty$ 误差及CPU反应时间在 $h_x=h_y=\pi/30$ 和 $\tau=0.001$ 处不同时间内的变化情况，结果很好地证实了所提算法的有效性。

为了进一步体现出该算法的精确性，下面继续对时间和空间方向的误差进行分析。表2列出了网格步长 $h_x=h_y=\pi/2^8$ 时对不同的 τ 在 $t=1$ 时的误差及收敛阶，结果表明了该算法在时间方向具有二阶精度；表3列出了 $\tau=0.000\,01$ 时对不同 h 在 $t=1$ 时的误差及收敛阶，显示该算法在空间方向具有四阶精度。



(a) Location density grid of $|u|$ when γ is variable coefficient



(b) Contour map of $|u|$ when γ is variable coefficient

图4 变系数下方程式(32)在 $T=10$ 的数值模拟

Fig. 4 Numerical simulation of the equation (32) with variable coefficients at $T=10$

表1 $h_x=h_y=\pi/30$ 和 $\tau=0.001$ 处不同 t 值下 $\|e^n\|_2$ 和 $\|e^n\|_\infty$ 及CPU时间的对比

Tab.1 Comparison of $\|e^n\|_2$, $\|e^n\|_\infty$ and CPU time with $h_x=h_y=\pi/30$ and $\tau=0.001$

t	Re_∞	Im_∞	$\|e^n\|_2$	$\|e^n\|_\infty$	CPU time/s
2	7.902 9e−007	6.825 7e−007	3.280 6e−006	1.044 3e−006	29.919 678
5	1.420 2e−006	2.190 5e−006	8.201 5e−006	2.610 6e−006	75.095 680
7	3.620 6e−006	4.997 7e−007	1.148 2e−005	3.654 9e−006	104.861 663
10	4.766 7e−006	2.130 7e−006	1.640 3e−005	5.221 3e−006	150.428 226

表2 $h_x=h_y=\pi/2^8$ 时在 $t=1$ 时刻的 l^2 误差

Tab.2 Error in l^2-norm at $t=1$ when $h_x=h_y=\pi/2^8$

时间步长	$\tau=0.005$	$\tau=0.002\ 5$	$\tau=0.001\ 25$	$\tau=0.000\ 625$	$\tau=0.000\ 312\ 5$
$\|e^n\|_2$	1.636 5e−06	4.093 6e−07	1.025 6e−07	2.586 1e−08	6.690 1e−09
order_1		1.999 2	1.996 9	1.987 6	1.950 7

表3 $\tau=0.000\ 01$ 时在 $t=1$ 时刻的 l^2 误差

Tab.3 Error in l^2-norm at $t=1$ when $\tau=0.000\ 01$

空间步长	$h=\pi/8$	$h=\pi/16$	$h=\pi/32$	$h=\pi/64$
$\|e^n\|_2$	3.131 8e−04	1.948 6e−05	1.216 5e−06	7.602 3e−08
order_2		4.006 5	4.001 6	4.000 2

3 结　论

本文针对二维复值GL方程,研究了一个高阶紧致交替方向隐式差分格式。本文数值结果精确地证实了:利用基于时间分裂的高阶紧致交替方向隐格式解得的GL方程具有四阶空间精度和二阶时间精度,同时有效体现了该算法对方程的精度和计算效率都有进一步的提高和改善。

参考文献:

[1] GINZBURG V L, LANDAU L D. On theory of superconductivity[J]. Zh Eksp Theor Fiz, 1950, 20: 1064.

[2] 郭柏灵. 郭柏灵论文集[M].广州:华南理工大学出版社,2009: 67-90.
GUO Boling. Selected papers of Guo Boling[M]. Guangzhou: South China University of Technology Press, 2009: 67-90.

[3] GUO Boling, WU Yonghui. Finite-dimensional behavior of the Ginzburg-Landau model for superconductivity[J]. Progress in Natural Science, 1995, 6: 599-610.

[4] GUO Boling, WANG Bixiang. Weak solutions to the two-dimensional derivative Ginzburg-Landau equation [J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica: English Series, 1999, 15(1): 1-8.

[5] GUO Boling, YUAN Rong. On existence of almost periodic solution of Ginzburg-Landau equation [J]. Commun Nonlinear Sci Numer Simulat, 2000, 2: 109-121.

[6] 杨灵娥,郭柏灵,徐海祥. Ginzburg-Landau方程的非

齐次初边值问题[J]. 应用数学和力学,2004,25(4):337-344.
YANG Linge,GUO Boling,XU Haixiang. Inhomogeneous initial boundary value problem for generalized Ginzburg-Landau equations[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2004, 25(4): 337-344.

[7] 李栋龙,郭柏灵,刘旭红. 三维复Ginzburg-Landau方程的整体解的存在惟一性[J].高校应用数学学报A辑:中文版,2004,19(4): 409-416.
LI Donglong,GUO Boling,LIU Xuhong. Global existence and uniqueness of solution for complex Ginzburg-Landau equation in three dimensions[J]. Applied Mathematics A Journal of Chinese Universities: Ser A, 2004, 19(4): 409-416.

[8] LI Donglong, GUO Boling, LIU Xuhong. Regularity of the attractor for 3D complex Ginzburg-Landau equation [J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica: English Series, 2011, 27(2): 289-302.

[9] SUN Zhizhong. On Tsertsvadze's differeence scheme for the Kuramoto-Tsuzuki equation [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 1998, 98 (2): 289-304.

[10] 张晶,李鑫,孙启航. 一维复Ginzburg-Landau方程的紧致差分格式[J]. 江苏师范大学学报(自然科学 版),2015,33(2): 47-52.
ZHANG Jing, LI Xin, SUN Qihang. A compact finite difference scheme for one dimensional complex Ginzburg-Landau equation [J]. Journal of Jiangsu Normal University (Natural Science Edition), 2015, 33(2): 47-52.

[11] 许秋滨. 偏微分方程的差分方法及在图像处理中的应用[D]. 北京:中国科学院数学与系统科学研究应用数学研究所,2008: 35-45.
XU Qiubin. Difference method of partial differential equations and its application in image processing[D]. Beijing: Institute of Applied Mathematics AMSS CAS, 2008: 35-45.

[12] XU Qiubin, CHANG Qianshun. Difference methods for computing the Ginzburg-Landau equation in two dimensions[J]. Numer Meth Part Differ Equat, 2011, 27(3): 507-528.

[13] WANG Tingchun, GUO Boling. Analysis of some finite difference schemes for two-dimensional Ginzburg Landau equation[J]. Numer Meth Part Differ Equat, 2011, 27(5): 1340-1363.

[14] 裴琴娟,杨忍军,许秋滨. 复Ginzburg-Landau方程的数值模拟[J]. 工程数学学报,2010,27(4): 693-698.
PEI Qinjuan, YANG Renjun, XU Qiubin. Numerical methods for the complex Ginzburg-Landau equation [J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2010, 27(4): 693-698.

[15] 王珊珊. 若干非线性Schrödinger方程及其相关问题的数值研究[D]. 南京:南京航空航天大学,2011: 93-126.
WANG Shanshan. Numerical studies on nonlinear Schrödinger equations and related issues [D]. Nanjing: Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2011: 93-126.

[16] WANG Shanshan, ZHANG Luming. An efficient split-step compact finite difference method for cubic - quintic complex Ginzburg - Landau equations [J]. Computer Physics Communications, 2013, 184(6): 1511-1521.

[17] ALI S, FATEMEH A. High-order compact ADI method using predictor-corrector scheme for 2D complex Ginzburg-Landau equation [J]. Computer Physics Communications, 2015, 197: 43-50.

[18] DONG Xuanchun. A fourth-order split-step pseudospectral scheme for the Kuramoto-Tsuzuki equation [J]. Commun Nonlinear Sci Numer Simulat, 2012, 17: 3161-3168.

[19] STRANG G. On the construction and comparison of difference schemes[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1968, 5(3): 506-517.

[20] 谢烨. Ginzburg-Landau-Schrödinger方程的Hermite谱方法及其应用[D].厦门:集美大学,2015: 12-18.
XIE Ye. Hermite spectral methods and its applications for Ginzburg-Landau-Schrödinger equation[D]. Xiamen: Jimei University, 2015: 12-18.

[21] 孙志忠. 偏微分方程数值解法[M]. 2版. 北京:科学出版社,2012: 102-209.
SUN Zhizhong. Numerical methods for partial differential equations[M].Version 2. Beijing: Science Press, 2012: 102-209.

(编辑:陈珺)