第 50 卷增刊 2
2018 年 9 月

南 京 航 空 航 天 大 学 学 报
Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics

Vol. 50 No. S2
Sep. 2018

导弹命中精度一致性分析及评估

刘博文[1] 段晓君[1] 晏 良[1] 彭晓军[2]

（1. 国防科技大学文理学院，长沙，410073；2. 火箭军装备研究院，北京，100085）

摘要：命中精度是导弹性能考核的重要指标，对于反舰导弹的命中精度评定，常常采用命中概率这一精度指标。在反舰导弹命中精度评估的过程中，单独采用经典方法来评估导弹的命中概率时，不同的评估方法可能会带来不一致的评估结果，因此会造成较大的评估风险。为了提高评估结果的一致性，降低评估风险，本文首先改进了基于正态分布的命中概率评估方法，提出了基于 Bootstrap 重采样的命中概率估计新方法，进一步联合基于二项分布的命中概率评估方法，对导弹的命中精度进行一致性分析及评估。与经典方法相比，该方法降低了评估的风险，提高了评估结果的稳健性。

关键词：命中精度；Bootstrap 方法；区间估计；命中概率；一致性评估

中图分类号：TN958　　**文献标志码：**A　　**文章编号：**1005-2615(2018)S2-0029-05

Consistent Analysis and Evaluation of Missile Hit Accuracy

LIU Bowen[1], *DUAN Xiaojun*[1], *YAN Liang*[1], *PENG Xiaojun*[2]

(1. College of Liberal Arts and Sciences, National University of Defense Technology, Changsha, 410073, China;
2. Rocket Force Equipment Academy, Beijing, 100085, China)

Abstract: Hit accuracy is an important index for assessing the performance of missiles. For the accuracy assessment of anti-ship missiles, the hit probability is usually used as the accuracy index. In the process of assessing the accuracy of anti-ship missiles, different assessment methods may bring inconsistent results when using the classical method. In order to improve the consistency of the evaluation results and reduce the risk of assessment, we improve the hit-precision estimation method based on normal distribution and propose a new method of interval estimation of hit probability based on Bootstrap resampling. Then we combine the hit-accuracy evaluation method based on binomial distributions for consistent analysis and evaluation of hit accuracy. Compared with the classical method, the proposed method reduces the risk of assessment and improves the robustness of the assessment results.

Key words: hit accuracy; bootstrap method; interval estimation; hit probability; consistency assessment

命中精度是导弹的重要性能指标[1-2]，如何对导弹的命中精度进行准确评估是亟待解决的一个重要问题。由于接近应用环境的导弹性能试验是小子样的，为了充分利用研制各阶段的飞行试验信息、仿真试验信息等先验信息，Bayes 统计理论广泛应用于导弹命中精度评估[1]。

对于地面点目标而言，圆概率偏差（Circular error probability，CEP）是衡量导弹命中精度的关键指标[3-4]，而对于舰船目标而言，常常采用命中概率来衡量反舰导弹的命中精度。对于命中概率的评估，经典的评估方法包括估计和假设检验，估计方法包括基于正态分布的命中概率 Bayes 估计[5]和基于二项分布的命中概率 Bayes 估计[6]。基于正态分布的命中概率 Bayes 估计假设导弹的落点

基金项目：国家自然科学基金(11771450)资助项目。
收稿日期：2018-03-23；**修订日期：**2018-05-30
通信作者：刘博文，男，硕士研究生，E-mail：bowen_liu12@163.com。

引用格式：刘博文，段晓君，晏良，等. 导弹命中精度一致性分析及评估[J]. 南京航空航天大学学报，2018，50(S2)：29-33. LIU Bowen, DUAN Xiaojun, YAN Liang, et al. Consistent analysis and evaluation of missile hit accuracy[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2018, 50(S2): 29-33.

偏差服从二维正态分布,通过估计正态分布的总体参数,进一步估计导弹命中目标区域的概率。基于二项分布的命中概率 Bayes 估计根据导弹是否命中目标区域确定成败,通过估计二项分布的成功概率参数,来估计导弹的命中概率。不论采用哪种评估方法,评估的完整流程是给定置信度,利用导弹试验数据估计得到导弹命中概率置信下限,与预先设定的精度指标进行比较,判断导弹在该置信度下是否满足精度要求。

在实际应用过程中,基于正态分布和基于二项分布的命中概率 Bayes 估计存在一定差异,单独使用可能会带来较大的评估风险。随着武器装备的不断发展,各种型号的反舰导弹层出不穷,对命中精度的评估要求越来越高,急需更稳健的精度评估方法。因此,本文结合 Bootstrap 重采样[7],基于正态分布提出了命中概率估计的新方法,并联合基于二项分布的命中概率估计,对导弹命中精度进行一致性评估。结果表明,该方法可以提高评估结果的稳健性,降低评估风险。

1 基于正态分布的命中概率 Bayes 估计

为了估计导弹的命中概率,首先需要估计导弹落点的正态分布参数。基于二维的正态密度函数,在命中区域内进行积分,可以得到命中概率的点估计,但是经典方法难以给出命中概率的区间估计及置信下限估计,因此在本节基于 Bootstrap 重采样构建了计算命中概率区间估计及置信下限估计的新方法。

1.1 正态参数的 Bayes 估计

假设导弹的落点偏差服从二维正态分布,为方便讨论,以 X 方向为例,介绍正态参数的 Bayes 估计。设 $X \sim N(\mu, D)$,其中 μ 是均值,D 是方差。考虑 μ, D 均未知的情况,(μ, D) 的共轭先验分布为正态逆 Gamma 分布[8-9]。将前一阶段的数据作为后续阶段的先验信息,可得到多阶段试验之下的 Bayes 递推估计。

记 $(X_1^{(1)}, X_2^{(1)}, \cdots, X_{n_1}^{(1)})$ 为第一阶段试验所获得的样本,则均值 μ 及方差 D 的后验联合概率密度

$$\pi(\mu, D \mid \overline{X}^{(1)}, u^{(1)}) \propto N(\mu_1, \eta_1 D) \cdot \Gamma^{-1}(\alpha_1, \beta_1) \tag{1}$$

式中,$\Gamma^{-1}(\alpha_1, \beta_1)$ 表示以 α_1, β_1 分布参数的逆 Gamma 分布密度函数,若先验分布采用无先验信息时的 $\pi(\mu, D) \propto 1/D$,故有

$$\begin{cases} \alpha_1 = \sum_{i=1}^{n_1} (X_i^{(1)} - \overline{X}^{(1)})^2 / 2 = n_1 u^{(1)} / 2 \\ \beta_1 = (n_1 - 1)/2 \\ \mu_1 = \overline{X}^{(1)} \\ \eta_1 = 1/n_1 \end{cases} \tag{2}$$

式中

$$\begin{cases} \overline{X}^{(1)} = \dfrac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} X_i^{(1)} \\ u^{(1)} = \dfrac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} (X_i^{(1)} - \overline{X}^{(1)})^2 \end{cases} \tag{3}$$

同理,当进行第二阶段试验后,得到试验样本 $(X_1^{(2)}, X_2^{(2)}, \cdots, X_{n_2}^{(2)})$,此时 (μ, D) 的后验联合概率密度

$$\pi(\mu, D \mid \overline{X}^{(2)}, u^{(2)}) \propto N(\mu_2, \eta_2 D) \cdot \Gamma^{-1}(\alpha_2, \beta_2) \tag{4}$$

故有

$$\begin{cases} \alpha_2 = \alpha_1 + \dfrac{n_2 u^{(2)}}{2} + \dfrac{n_2 (\overline{X}^{(2)} - \mu_1)^2}{2(n_2 \eta_1 + 1)} \\ \beta_2 = \beta_1 + n_2/2 \\ \eta_2 = \dfrac{\eta_1}{1 + n_2 \eta_1} = \dfrac{1}{n_1 + n_2} \\ \mu_2 = \dfrac{n_2 \overline{X}^{(2)} + \mu_1/\eta_1}{n_2 + 1/\eta_1} \end{cases} \tag{5}$$

式中

$$\begin{cases} \overline{X}^{(2)} = \dfrac{1}{n_2} \sum_{i=1}^{n_2} X_i^{(2)} \\ u^{(2)} = \dfrac{1}{n_2} \sum_{i=1}^{n_2} (X_i^{(2)} - \overline{X}^{(2)})^2 \end{cases} \tag{6}$$

一般地,N 个阶段之后,有

$$\pi(\mu, D \mid \overline{X}^{(N)}, u^{(N)}) \propto \mathrm{N}(\mu_N, \eta_N D) \cdot \Gamma^{-1}(\alpha_N, \beta_N) \tag{7}$$

式中参数 $\mu_N, \eta_N, \alpha_N, \beta_N$ 可由递推公式运算而得。

这样,μ 的后验边缘密度为

$$\pi(\mu \mid \overline{X}^{(N)}, u^{(N)}) = \int_0^{+\infty} \pi(\mu, D \mid \overline{X}^{(N)}, u^{(N)}) \mathrm{d}D \tag{8}$$

而 D 的后验边缘密度为

$$\pi(D \mid \overline{X}^{(N)}, u^{(N)}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \pi(\mu, D \mid \overline{X}^{(N)}, u^{(N)}) \mathrm{d}\mu \tag{9}$$

在平均损失函数之下,μ 和 D 的 Bayes 估计分别为各自边缘分布的期望

$$\begin{cases} \hat{\mu}_B = \mu_N \\ \hat{D}_B = \alpha_N / (\beta_N - 1) \end{cases} \tag{10}$$

1.2 命中概率的点估计

(1)假设落点的纵向偏差 X 和横向偏差 Y 是相互独立的正态随机变量,即

$$X \sim N(\mu_x, D_x), Y \sim N(\mu_y, D_y) \tag{11}$$

式中 μ_x, μ_y, D_x, D_y 可用上一小节中所述的 Bayes 递推估计得到。若目标“命中域”为 $R=[x_1, x_2]$，$[y_1, y_2]$，则命中概率 P 为

$$P = P_x \cdot P_y \tag{12}$$

式中

$$P_x = P\{x_1 \leqslant x \leqslant x_2\} = \Phi[(x_2-\mu_x)/\sqrt{D_x}] - \Phi[(x_1-\mu_x)/\sqrt{D_x}]$$

$$P_y = P\{y_1 \leqslant y \leqslant y_2\} = \Phi[(y_2-\mu_y)/\sqrt{D_y}] - \Phi[(y_1-\mu_y)/\sqrt{D_y}] \tag{13}$$

$\Phi[\cdot]$表示标准正态分布的分布函数。

（2）当 X 和 Y 不是相互独立的时候，假设(X, Y)服从二维正态分布 $N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$，其中

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{Bmatrix} \mu_x \\ \mu_y \end{Bmatrix}, \boldsymbol{\Sigma} = \begin{Bmatrix} D_x & \rho\sqrt{D_x D_y} \\ \rho\sqrt{D_x D_y} & D_y \end{Bmatrix} \tag{14}$$

落点偏差(X, Y)的概率密度函数 $f(x, y)$ 可以记为

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{D_x}\sqrt{D_y}\sqrt{1-\rho^2}} \times \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_x)^2}{D_x} - \frac{2\rho(x-\mu_x)(z-\mu_y)}{\sqrt{D_x}\sqrt{D_y}} + \frac{(z-\mu_y)^2}{D_y}\right]\right\} \tag{15}$$

式中 μ_x, μ_y, D_x, D_y 可用上一小节中所述的 Bayes 递推估计得到，相关系数 ρ 可由式(16)计算得到

$$\rho = \frac{\sum_{i=1}^{n}[(x_i-\mu_x)(y_i-\mu_y)]}{\sqrt{\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_x)^2\right]\left[\sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu_y)^2\right]}} \tag{16}$$

则导弹的命中概率 P 为

$$P = \iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{17}$$

式(17)中积分的计算可采用数值积分法。

1.3　命中概率的区间估计

以 X 和 Y 不独立情况为例，给出命中概率 P 的区间估计，置信下限估计。由于很难构造命中概率 P 的枢轴变量，因此无法基于经典统计方法给出 P 的区间估计，置信下限估计。

因此提出了基于 Bootstrap 方法的参数自助法，来计算 P 的区间估计，置信下限估计。设 $\hat{P}$ 是命中概率 P 的代入型点估计，参数自助法的步骤如下：

（1）根据试验样本，估计均值 μ_x, μ_y，方差 D_x，D_y 以及相关系数 ρ；

（2）从正态总体 $N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$中，随机抽取 M 组样本量为 n 的独立样本，利用式(17)计算出这 M(1 000$\leqslant M \leqslant$3 000)个 P 的代入型点估计，并从小到大排序为 $\hat{P}(1), \hat{P}(2) \cdots \hat{P}(M)$；

（3）则 P 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间估计为

$$[\hat{P}(\mathrm{INT}[\alpha M/2]) \sim \hat{P}(\mathrm{INT}[(1-\alpha/2)M])],$$

P 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信下限为 $\hat{P}(\mathrm{INT}[\alpha M])$，其中 INT[·]表示取整函数。

2　基于二项分布的命中概率 Bayes 估计

2.1　命中概率的 Bayes 点估计

假设 n 次导弹试验中导弹命中目标区域 R 的次数记作 X，X 服从二项分布 $B(n, P)$，其中 P 表示导弹的命中概率，P 的共轭先验分布为 Beta 分布，记为 $B(\alpha, \beta)$[8-9]，其中 α, β 是 Beta 分布的参数。

设先验试验结果成功数为 s_0，失败数为 f_0，先验试验数 $n_0 = s_0 + f_0$。若无先验信息可用，则按照 Jeffreys 规则，取 $s_0 = 1/2, f_0 = 1/2$。先验分布为 $B(\alpha_0, \beta_0 | s_0, f_0)$，其中

$$\alpha_0 = s_0, \quad \beta_0 = f_0 \tag{18}$$

设现场试验结果成功数为 s_1，失败数为 f_1，试验数 $n_1 = s_1 + f_1$，则后验分布为 $B(\alpha_1, \beta_1 | s_1, f_1)$，其中

$$\alpha_1 = \alpha_0 + s_1, \quad \beta_1 = \beta_0 + f_1 \tag{19}$$

在平均损失函数下，P 的 Bayes 点估计为

$$\hat{P} = \frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{s_0 + s_1}{n_0 + n_1} \tag{20}$$

2.2　命中概率的 Bayes 区间估计

由文献[10]构造二项分布参数 P 的枢轴变量，可得到

$$\frac{f_0 + f_1}{s_0 + s_1} \cdot \frac{P}{1-P} \sim F(2(s_0+s_1), 2(f_0+f_1)) \tag{21}$$

式中 $F(\cdot, \cdot)$表示 F 分布，故有

$$\mathrm{Prob}\left\{F_{\alpha/2} \leqslant \frac{f_0+f_1}{s_0+s_1} \cdot \frac{p}{1-p} \leqslant F_{1-\alpha/2} \,\middle|\, X\right\} = 1-\alpha \tag{22}$$

其中 $F_{\alpha/2}$ 为 $F(2(s_0+s_1), 2(f_0+f_1))$的 $\alpha/2$ 分位数。则 P 的$(1-\alpha)$双侧置信区间为

$$\left[\frac{(s_0+s_1)F_{\alpha/2}}{(f_0+f_1)+(s_0+s_1)F_{\alpha/2}}, \frac{(s_0+s_1)F_{1-\alpha/2}}{(f_0+f_1)+(s_0+s_1)F_{1-\alpha/2}}\right] \tag{23}$$

P 的$(1-\alpha)$置信下限 $\hat{P}_{L.B}$ 为

$$\hat{P}_{L.B} = \frac{(s_0+s_1)F_\alpha}{(f_0+f_1)+(s_0+s_1)F_\alpha} \tag{24}$$

3 一致性分析及算例

3.1 命中概率估计的仿真算例

导弹精度试验中，落点位置服从正态分布，试验的目标区域为 $R=[-500,500],[-200,200]$。若某型号导弹现场试验的落点偏差样本为：

$\boldsymbol{X}=[-31.9,-183.5,125.1,-5.4,-135.9]$，$\boldsymbol{Y}=[-33.8,-101.1,-31.1,-6.4,-45.8]$。

该型号导弹研制阶段的飞行试验样本作为精度评估的先验样本，记作：$\boldsymbol{X}_0=[60.6,-169.3,509.4,-320.0,203.9]$，$\boldsymbol{Y}_0=[67.4,-21.9,-30.9,-5.8,-131.9]$。

利用本文提出的基于正态分布的命中概率估计新方法及经典二项分布命中概率方法估计该批次导弹试验命中概率及置信下限，结果如表1所示。

表1 命中概率的估计结果

Tab.1 Estimation results of hit probability

命中概率	点估计	80%置信下限	90%置信下限
正态分布	0.964 2	0.914 7	0.885 5
二项分布	0.900 0	0.810 5	0.7281

3.2 两种评估方法的一致性分析

(1)例1

为了分析两种评估方法的一致性，设置了不同的精度指标 P_0（从0到1），分别采用这两种评估方法进行评估，分析评估的结果。设两种方法可信度为90%的置信下限估计分别为 $\hat{P}_{正态}$ 和 $\hat{P}_{二项}$。假若命中概率的估计 $\hat{P}\geqslant P_0$，则认为该批次导弹试验在可信度不低于90%的条件下满足精度指标，否则认为该批次导弹试验不满足精度指标。利用3.1节中的仿真数据，估计命中概率的置信下限，从而比较两种评估方法的差异，结果如图1所示。

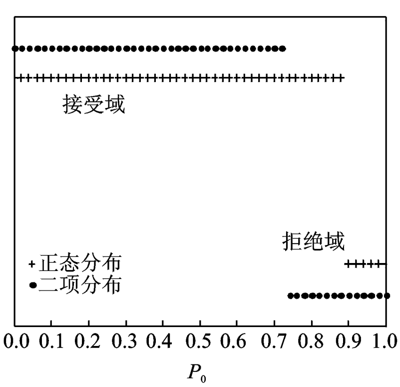

图1 两种方法的评估结果

Fig.1 Assessment results of the two methods

注：横坐标（无单位）表示精度指标，纵坐标（无单位）高位表示估计结果满足精度指标，纵坐标低位表示估计结果不满足精度指标

从图1可以看到，对于不同的精度指标，只要基于二项分布的评估结果满足精度要求，则基于正态分布的评估结果一定可以满足精度要求。因此从一定程度上讲，基于二项分布的评估准则更加宽容，而正态分布的评估准则更加严苛。

(2)例2

假设另有某型号导弹现场试验的落点偏差样本为：$\boldsymbol{X}=[-122.7,-279.3,29.5,55.9,71.4]$，$\boldsymbol{Y}=[66.5,-59.2,-24.7,166.7,-98.5]$。

该型号导弹研制阶段的飞行试验样本作为精度评估的先验样本，记作：$\boldsymbol{X}_0=[-164.3,-45.5,445.1,242.3,-96.1]$，$\boldsymbol{Y}_0=[143.4,-144.6,33.6,-110.5,-81.2]$。

分别采用本文提到的两种方法进行评估，估计命中概率的置信下限，从而比较两种评估方法的差异，结果如图2所示。

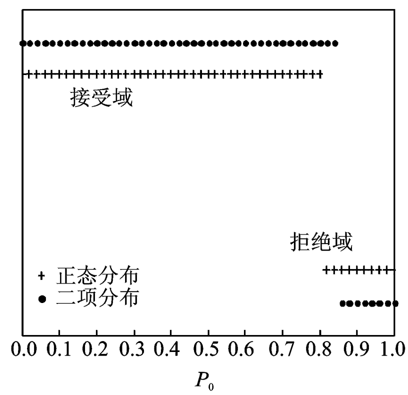

图2 两种方法的评估结果

Fig.2 Assessment results of the two methods

注：横坐标（无单位）表示精度指标，纵坐标（无单位）高位表示估计结果满足精度指标，纵坐标低位表示估计结果不满足精度指标

从图2可以看到，基于二项分布的评估结果满足精度要求时，基于正态分布的评估结果不一定满足精度要求，这与例一中得出的结论是矛盾的。

4 结　　论

综合分析例一和例二的计算结果可以得到，对于不同型号的导弹试验，采用不同的评估方法得到的评估结果存在差异。因此，在对导弹试验进行精度评定的时候，应该综合考虑这两种评估方法的结果，只有两种方法的评估结果同时满足精度要求的时候，才判定导弹试验满足精度要求。

对于导弹试验评估而言，由于多源试验信息复杂，接近应用环境的性能试验子样数少，单独使用经典的评估方法对命中概率进行估计时，会造成较大的评估风险，估计的结果不稳健。本文改进了基

于正态分布的命中精度估计方法,提出了基于 Bootstrap 重采样的命中概率区间估计新方法。综合基于正态分布和二项分布的命中概率评估方法进行一致性评估,在一定程度上可以降低评估风险,提高了估计结果的稳健性。

参考文献:

[1] 傅惠民. 导弹命中精度整体推断方法[J]. 北京航空航天大学学报, 2006, 32(10):1141-1145.
FU Huimin. Integral inference method for missile hit accuracy[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2006, 32(10):1141-1145.

[2] 张金槐, 唐雪梅. Bayes 方法[M]. 长沙:国防科技大学出版社, 1993.

[3] 汶小泥, 祝小平. 命中精度 CEP 的估计[J]. 弹箭与制导学报, 2005, 25(2):367-369.
WEN Xiaoni, ZHU Xiaoping. Evaluation of hit precision CEP[J]. Journal of Projectiles, Rockets, Missiles and Guidance, 2005, 25(2):367-369.

[4] ZHANG S, DUAN X, LI C, et al. CEP calculation based on weighted Bayesian mixture Model[J]. Mathematical Problems in Engineering, 2017(5):1-7.

[5] 金振中, 曲宝忠. 正态总体参数的 Bayes 评估及其应用[J]. 现代防御技术, 1996(2):50-57.
JIN Zhenzhong, QU Baozhong. Bayesian evaluation of normal population parameters and its application [J]. Modern Defence Technology, 1996(2):50-57.

[6] 赵喜春. 导弹命中精度综合鉴定方法研究[J]. 现代防御技术, 2008, 36(3):33-36.
ZHAO Xichun. Research on the appraisal method of missile impact accuracy[J]. Modern Defence Technology, 2008, 36(3):33-36.

[7] EFRON B B. Bootstrap Methods: Another Look at the Jackknife[J]. The Annals of Statistics, 1979, 7(1):1-26.

[8] 茆诗松. 贝叶斯统计[M]. 北京:中国统计出版社, 2012.

[9] 陈希孺. 数理统计学教程[M]. 北京:中国科技大学出版社, 2009.

[10] 孟昭为. 二项分布参数的置信区间[J]. 大学数学, 1995(4):169-171.
MENG Zhaowei. Confidence interval of parameter for binomial distribution[J]. Journal of Mathematics for Technology, 1995(4):169-171.

(编辑:张蓓)