第 50 卷第 5 期
2018 年 10 月

南京航空航天大学学报
Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics

Vol. 50 No. 5
Oct. 2018

DOI:10.16356/j.1005-2615.2018.05.020

一类分数阶薛定谔方程孤立解的对称性研究

谢柳柳　黄小涛

(南京航空航天大学理学院,南京,210016)

摘要:在有界环形区域上,研究了一类分数阶薛定谔方程孤立解的对称性问题。首先将分数阶薛定谔方程转化为包含 Bessel 位势和 Riesz 位势的积分方程组,然后利用移动平面法和 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式,证明了当方程边值为常数时,环形区域必为同心球,方程正解是径向对称的,且随着到对称点的距离增大而单调递减。

关键词:分数阶薛定谔方程;径向对称性;移动平面法;环形区域

中图分类号:O175.5　　**文献标志码:**A　　**文章编号:**1005-2615(2018)05-0722-05

Symmetry Result of Solitary Solutions of Fractional Schrödinger Equations in Annular Domains

XIE Liuliu, HUANG Xiaotao

(College of Science, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing, 210016, China)

Abstract: The aim of this paper is to investigate the symmetry problem of a class of fractional Schrödinger equations in bounded annular domains. The fractional Schrödinger equations will be transformed into a system of integral equations involving Bessel potentials and Riesz potentials. Then via the methods of moving planes and Hardy-Littlewood-Sobolev inequality, this paper proves that the annular domains must be balls with the same center, and provided that the boundary values of these equations are constants, positive solutions of this system must be radially symmetric and decreasing with the distance from the center.

Key words: fractional Schrödinger equations; radial symmetry; the method of moving planes; annular domains

在空间 $\mathbf{R}^n$ 中,若 $p\in[2,\infty)$,$\alpha\in(0,n)$,Ma 和 Zhao[1]给出了分数阶薛定谔方程的一般形式有

$$i\varphi_t+\Delta\varphi+p\varphi\mid\varphi\mid^{p-2}\left(\frac{1}{\mid x\mid^{n-\alpha}}*\mid\varphi\mid^{p}\right)=0$$
$$x\in\mathbf{R}^n,t>0 \tag{1}$$

式中 $\varphi(t,x)$为波函数,其在激光物理、量子力学等不同领域均有着广泛的应用。为了得到方程(1)的解,可以令 $\varphi(x,t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}u(x)$,则方程(1)可转化为 Choquard 方程

$$\Delta u-\omega u+pu\mid u\mid^{p-2}\left(\frac{1}{\mid x\mid^{n-\alpha}}*\mid u\mid^{p}\right)=0$$
$$u\in H^1(\mathbf{R}^n) \tag{2}$$

关于方程(2)的正解性质,Lions[2,3] 和 Lieb[4]等学者进行了广泛的研究。令 $\omega=1$,$v=\frac{1}{|x|^{n-\alpha}}*|u|^p$,则式(2)可转化为

$$(I-\Delta)u=pu\mid u\mid^{p-2}v$$

也可转为积分形式

基金项目:国家自然科学基金(11401303)资助项目;研究生创新基地(实验室)开放基金(kfjj20170806)资助项目。

收稿日期:2017-12-19;**修订日期:**2018-08-06

通信作者:黄小涛,男,副教授,硕士生导师,E-mail:xthuang@nuaa.edu.cn。

引用格式:谢柳柳,黄小涛.一类分数阶薛定谔方程孤立解的对称性研究[J].南京航空航天大学学报,2018,50(5):722-726. XIE Liuliu, HUANG Xiaotao. Symmetry result of solitary solutions of fractional Schrödinger equations in annular domains[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics,2018,50(5):722-726.

$$\begin{cases} u(x)=\int_{\mathbf{R}^n} G_2(x-y)\mid u(y)\mid^{p-2} u(y)v(y)\mathrm{d}y \\ v(x)=\int_{\mathbf{R}^n} \dfrac{u^p(y)}{\mid x-y\mid^{n-\alpha}}\mathrm{d}y \end{cases} \tag{3}$$

其中 G_2 是二阶的 Bessel 位势核，Ma 和 Zhao[1] 研究了方程(3)在 $\mathbf{R}^n$ 上正解的径向对称性与单调性。

偏微分方程的对称解问题的研究最早可追溯到 20 世纪 70 年代。Serrin[5] 在边界条件

$$\begin{cases} u(x)=0 & x\in\partial\Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}=\text{Constant} & x\in\partial\Omega \end{cases}$$

下，利用移动平面法，研究了 Laplace 方程 $-\Delta u(x)=1, x\in\Omega$ 解的径向对称性。接下来的几十年里，文献[6,7]对此类问题进行了更深入的研究。在此基础上，文献[8]利用 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式研究了 $\mathbf{R}^n$ 中积分方程的对称解问题。进一步地，Li 和 Wang[9] 在有界区域上研究了积分方程解的对称性。

假设 $\Omega_1\subset\Omega_2\subset\mathbf{R}^n$ 是一有界开区域，其中 $\partial\Omega_1$，$\partial\Omega_2\in C^1$，并且 $\partial\Omega_1\cap\partial\Omega_2$ 为空集。分数阶薛定谔方程(1)可转化为包括二阶 Bessel 位势和分数阶 Riesz 位势的积分方程组(3)。本文尝试在环形区域上研究以下包含分数阶 Bessel 位势和分数阶 Riesz 位势的积分方程组

$$\begin{cases} u(x)=\int_{\mathbf{R}^n} G_\alpha(x-y)\mid u(y)\mid^{p-2} u(y)v(y)\mathrm{d}y \\ \qquad x\in\Omega:=\Omega_2\backslash\overline{\Omega}_1 \\ v(x)=\int_{\mathbf{R}^n} \dfrac{u^p(y)}{\mid x-y\mid^{n-\alpha}}\mathrm{d}y \\ \qquad x\in\Omega:=\Omega_2\backslash\overline{\Omega}_1 \end{cases} \tag{4}$$

其中 $p\geqslant 2, 0<\alpha<n$。本文将证明如下定理。

定理 1　假设常数 t,e,s,q 满足

$$\frac{1}{t}\in\left[\frac{1}{s},\frac{1}{s}+\frac{\alpha}{n}\right]\cap\left[\frac{\alpha}{n},1\right] \tag{5}$$

$$\frac{1}{e}\in\left[\frac{1}{q},\frac{1}{q}+\frac{\alpha}{n}\right]\cap\left[\frac{\alpha}{n},1\right] \tag{6}$$

且

$$s,q>1, \frac{1}{q}+\frac{p-1}{s}=\frac{1}{t}, \frac{p-1}{s}=\frac{1}{e} \tag{7}$$

若 $(u,v)\in L^s(\Omega)\times L^q(\Omega)$ 是方程(4)的正解，且满足边界条件

$$\begin{cases} u(x)=C_1>0, v(x)=C_2>0, & x\in\overline{\Omega}_1 \\ u(x)=v(x)=0 & x\in\mathbf{R}^n\backslash\Omega_2 \end{cases}$$

则 Ω_1 和 Ω_2 一定为同心球，(u,v) 是径向对称的，且随着对称点的距离增加而单调递减。

推论 1　当 Ω_1 为空集时，由定理 1 可得方程(4)在有界区域 Ω_2 上正解的径向对称性和单调性。

容易验证，满足条件式(5-7)的常数 t,e,s,q 是存在的。比如在 $\mathbf{R}^3$ 中，方程(1)为非线性 Choquard 方程

$$i\varphi_t+\Delta\varphi+2\varphi\left(\frac{1}{|x|}*\mid\varphi\mid^2\right)=0 \quad x\in\mathbf{R}^3, t>0$$

类似引言推导，令 $\varphi(x,t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}u(x)$，上述方程可转化为

$$\begin{cases} \Delta u-u+2uv=0 \\ \Delta v=u^2 \end{cases}$$

即 $n=3, p=2, \alpha=2$。此时可取 $q=3, s=\dfrac{3}{2}, t=1, e=\dfrac{3}{2}$，满足条件(5—7)。

1　主要引理

下面给出后续证明中需要用到的 Bessel 位势和 Riesz 位势的 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式。Cheng，Huang 和 Li 在文献[10]的式(1.2)中给出了关于 Riesz 位势的 H-L-S 不等式。

引理 1　(Riesz 位势的 H-L-S 不等式)令 $0<\alpha<n, 1<p<q<+\infty$，对任意的 $f\in L^p(\mathbf{R}^n)$，有

$$\left\|\int_{\mathbf{R}^n}\frac{f(y)}{\mid x-y\mid^{n-\alpha}}\mathrm{d}y\right\|_{L^q(\mathbf{R}^n)}\leqslant C\parallel f\parallel_{L^p(\mathbf{R}^n)}$$

其中 $\dfrac{1}{p}-\dfrac{\alpha}{n}\leqslant\dfrac{1}{q}$，常数 $C=C(p,q,n)$。

Huang，Li 和 Wang 在文献[11]的定理 2.3 中给出了关于 Bessel 位势的 H-L-S 不等式，也可参考文献[1]的式(8)。

引理 2　(Bessel 位势的 H-L-S 不等式)令 $0<\alpha<n, 1<p<r<+\infty$，对任意的 $f\in L^p(\mathbf{R}^n)$，有

$$\left\|\int_{\mathbf{R}^n}G_\alpha(x-y)f(y)\mathrm{d}y\right\|_{L^r(\mathbf{R}^n)}\leqslant C\parallel f\parallel_{L^p(\mathbf{R}^n)}$$

其中 $\dfrac{1}{p}-\dfrac{\alpha}{n}\leqslant\dfrac{1}{r}$，常数 $C=C(r,q,n)$，其中 G_α 定义为

$$G_\alpha(x)=\frac{1}{\gamma(\alpha)}\int_0^\infty\exp\left(-\frac{\pi\mid x\mid^2}{\delta}\right)\exp\left(-\frac{\delta}{4\pi}\right)\delta^{\frac{\alpha-n}{2}}\frac{\mathrm{d}\delta}{\delta}$$

$\gamma(\alpha)=(4\pi)^{\frac{\alpha}{2}}\Gamma\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$，且 $\alpha>0$。

2　主要结果

下面用移动平面法来证明本文的主要结果。对任意的 $\lambda\in\mathbf{R}$，定义 $T_\lambda:=\{(x_1,\cdots,x_n)\in\Omega, x_1=\lambda\}$ 作为移动平面。下面给出一些符号说明：

$$x^\lambda=(2\lambda-x_1,\cdots,x_n), u_\lambda(x)=u(x^\lambda), v_\lambda(x)=v(x^\lambda),$$

$$A_\lambda=\{x:x_1>\lambda\}$$

$$\Sigma_\lambda=\{x:x_1>\lambda, x\in\Omega_2\backslash\Omega_1, x^\lambda\in\Omega_2\backslash\Omega_1\}$$

$$\Sigma_\lambda^{'}=\{x:x^\lambda\in\Sigma_\lambda\}$$

$$E_\lambda=\{x:x_1>\lambda, x\in\mathbf{R}^n\backslash\Omega_2, x^\lambda\in\mathbf{R}^n\backslash\Omega_2\}$$

$$E_\lambda' = \{x : x^\lambda \in E_\lambda\}$$
$$\Omega_\lambda = \{x : x_1 > \lambda, x \in \mathbf{R}^n \backslash \Omega_2, x^\lambda \in \Omega_2\}$$
$$\Omega_\lambda' = \{x : x^\lambda \in \Omega_\lambda\}$$
$$D_\lambda = \{x : x_1 > \lambda, x \in \Omega_2 \backslash \Omega_1, x^\lambda \in \Omega_1\}$$
$$D_\lambda' = \{x : x^\lambda \in D_\lambda\}$$
$$P_\lambda = \{x : x_1 > \lambda, x \in \Omega_1, x^\lambda \in \Omega_1\}$$
$$P_\lambda' = \{x : x^\lambda \in P_\lambda\}$$

将平面 T_λ 从 $\lambda=+\infty$ 移向 $\lambda=-\infty$，在这个过程中，比较 $u(x)$ 和 $u(x^\lambda)$，$v(x)$ 和 $v(x^\lambda)$ 的大小。记 λ_0 为 T_λ 第一次和 $\partial\Omega_2$ 相切时的 λ 的值。由边界条件，很显然，对任意的 $\lambda \geqslant \lambda_0$，有 $u(x^\lambda) \geqslant u(x)$，$v(x^\lambda) \geqslant v(x)$，$\forall x \in A_\lambda$。

接下来把 T_λ 从 $\lambda=\lambda_0$ 向 $\lambda=-\infty$ 移动，当出现下列4种情况之一时，停止移动，并记此时的 λ 为 $\hat{\lambda}$：①$\partial(E_\lambda' \cup D_\lambda') \cap \partial\Omega_2$ 与 $\partial\Omega_2$ 相切于点 $\hat{x}$，但 $\hat{x}$ 不属于 $T_{\hat{\lambda}}$；② T_λ 与 $\partial\Omega_2$ 正交于点 $\hat{x}$，$\hat{x}$ 属于 $T_{\hat{\lambda}}$；③$\partial P_\lambda' \cap \partial\Omega_1$ 与 $\partial\Omega_1$ 相切于点 $\hat{x}$，但 $\hat{x}$ 不属于 $T_{\hat{\lambda}}$；④T_λ 与 $\partial\Omega_1$ 正交于点 $\hat{x}$，$\hat{x}$ 属于 $T_{\hat{\lambda}}$。

由 λ 的定义，对任意的 $\lambda \in [\hat{\lambda}, \lambda_0]$，有 $(\Sigma_\lambda \cup D_\lambda) \subset \Omega_2$，$A_\lambda = \Sigma_\lambda \cup D_\lambda \cup \Omega_\lambda \cup E_\lambda \cup P_\lambda$。

首先，给出一个在移动平面法中起着非常重要作用的引理。

引理3 对任意的 $\hat{\lambda} \leqslant \lambda < \lambda_0$，有

$$u(x^\lambda) - u(x) = \int_{A_\lambda} g_\alpha(x-y)[\,|u(y^\lambda)|^{p-2} u(y^\lambda) \cdot v(y^\lambda) - |u(y)|^{p-2} u(y) v(y)]\mathrm{d}y \tag{8}$$

$$v(x^\lambda) - v(x) = \int_{A_\lambda} \left(\frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}} - \frac{1}{|x^\lambda - y|^{n-\alpha}}\right) \cdot [u^p(y^\lambda) - u^p(y)]\mathrm{d}y \tag{9}$$

其中 $A_\lambda = \Sigma_\lambda \cup D_\lambda \cup \Omega_\lambda \cup E_\lambda \cup P_\lambda$，且 $g_\alpha(x-y) = G_\alpha(x-y) - G_\alpha(x^\lambda - y)$。这是因为对任意的 $\lambda \in [\hat{\lambda}, \lambda_0)$，有 $G_\alpha(x-y^\lambda) = G_\alpha(x^\lambda - y)$，$G_\alpha(x^\lambda - y^\lambda) = G_\alpha(x-y)$，$|x-y^\lambda| = |x^\lambda - y|$，$|x^\lambda - y^\lambda| = |x-y|$。

把定理1的证明分为以下几步。首先，证明当 T_λ 移动一小段距离后，也就是存在常数 λ_1，当 $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_0)$，有

$$u(x^\lambda) \geqslant u(x), v(x^\lambda) \geqslant v(x), \forall x \in A_\lambda \tag{10}$$

引理4 存在常数 λ_1，使得对任意的 $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_0)$，有 $u(x^\lambda) \geqslant u(x)$，$v(x^\lambda) \geqslant v(x)$，$\forall x \in A_\lambda$。

证明 对任意的 $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_0)$，由边界条件 $u(x) = C_1, x \in \Omega_1$；$u(x) = 0, x \in \mathbf{R}^n \backslash \Omega_2$，$v(x) = C_2$，$x \in \Omega_1$；$v(x) = 0, x \in \mathbf{R}^n \backslash \Omega_2$ 有

$$\begin{cases} u(x^\lambda) \equiv u(x) = C_1 & \forall x \in P_\lambda \\ u(x^\lambda) > u(x) \equiv 0 & \forall x \in \Omega_\lambda \\ u(x^\lambda) \equiv u(x) \equiv 0 & \forall x \in E_\lambda \\ u(x^\lambda) \equiv C_1 > u(x) & \forall x \in D_\lambda \end{cases}$$

类似地，$v(x)$ 也有相同的边界情况。仅需考虑 $x \in \Sigma_\lambda$ 这种情况。定义 $\Sigma_\lambda^u = \{x \in \Sigma_\lambda : u(x) > u(x^\lambda)\}$，$\Sigma_\lambda^v = \{x \in \Sigma_\lambda : v(x) > v(x^\lambda)\}$，则对任意的 $x \in \Sigma_\lambda^u$，有

$$u(x) - u(x^\lambda) \leqslant \int_{\Sigma_\lambda} g_\alpha(x,y)[\,|u(y)|^{p-2} u(y) \cdot v(y) - |u(y^\lambda)|^{p-2} u(y^\lambda) v(y^\lambda)]\mathrm{d}y$$

且

$$v(x) - v(x^\lambda) \leqslant \int_{\Sigma_\lambda} \frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}} (u^p(y) - u^p(y^\lambda))\mathrm{d}y$$

由引理2

$$u(x) - u(x^\lambda) \leqslant \int_{\Sigma_\lambda} g_\alpha(x-y)[\,|u(y)|^{p-2} u(y) \cdot v(y) - |u(y^\lambda)|^{p-2} u(y^\lambda) v(y^\lambda)]\mathrm{d}y \leqslant \int_{\Sigma_\lambda} g_\alpha(x-y)[u^{p-1}(y) v(y) - u^{p-1}(y^\lambda) \cdot v(y^\lambda)]\mathrm{d}y \leqslant \int_{\Sigma_\lambda} G_\alpha(x-y)[u^{p-1}(y^\lambda) \cdot (v(y) - v(y^\lambda))^+ + v(y)(u^{p-1}(y) - u^{p-1}(y^\lambda))^+]\mathrm{d}y$$

由 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式，得 $\| u - u_\lambda \|_{L^s(\Sigma_\lambda^u)} \leqslant \| u - u_\lambda \|_{L^s(\Sigma_\lambda)} \leqslant C \| u_\lambda^{p-1}(v - v_\lambda)^+ + v(u^{p-1} - u_\lambda^{p-1})^+ \|_{L^t(\Sigma_\lambda)} \leqslant C \| u_\lambda^{p-1}(v - v_\lambda) \|_{L^t(\Sigma_\lambda^v)} + C \| v(u^{p-1} - u_\lambda^{p-1}) \|_{L^t(\Sigma_\lambda^u)}$

其中 $0 \leqslant \frac{1}{t} - \frac{\alpha}{n} \leqslant \frac{1}{s} \leqslant \frac{1}{t}$，也就是 $\frac{1}{t} \in [\frac{1}{s}, \frac{1}{s} + \frac{\alpha}{n}] \cap [\frac{\alpha}{n}, 1]$。

由 Hölder 不等式

$$\| u - u_\lambda \|_{L^s(\Sigma_\lambda^u)} \leqslant C \| u_\lambda^{p-1}(v - v_\lambda) \|_{L^t(\Sigma_\lambda^v)} + C \| v u^{p-2}(u - u_\lambda) \|_{L^t(\Sigma_\lambda^u)} \leqslant C \| u \|_{L^s(\Sigma_\lambda')}^{p-1} \| v - v_\lambda \|_{L^q(\Sigma_\lambda^v)} + C \| v \|_{L^q(\Sigma_\lambda^v)} \cdot \| u \|_{L^s(\Sigma_\lambda^v)}^{p-2} \| u - u_\lambda \|_{L^s(\Sigma_\lambda^u)}$$

其中 $s, q > 1$，$\frac{1}{q} + \frac{p-1}{s} = \frac{1}{t}$。

类似地，有

$$\| v - v_\lambda \|_{L^q(\Sigma_\lambda^v)} \leqslant C \| u^p - u_\lambda^p \|_{L^e(\Sigma_\lambda^u)} \leqslant C \| u \|_{L^s(\Sigma_\lambda^u)}^{p-1} \| u - u_\lambda \|_{L^s(\Sigma_\lambda^u)}$$

其中 $0 \leqslant \frac{1}{e} - \frac{\alpha}{n} \leqslant \frac{1}{q} \leqslant \frac{1}{e}$，也就是 $\frac{1}{e} \in \left[\frac{1}{q}, \frac{1}{q} + \frac{\alpha}{n}\right] \cap [\frac{\alpha}{n}, 1]$，且 $\frac{p-1}{s} = \frac{1}{e}$。

将上述两个不等式结合起来，可以得到

$$\| u - u_\lambda \|_{L^s(\Sigma_\lambda^u)} \leqslant C(\| u \|_{L^s(\Sigma_\lambda')}^{p-1} \| u \|_{L^s(\Sigma_\lambda^u)}^{p-1} + \| v \|_{L^q(\Sigma_\lambda^v)} \| u \|_{L^s(\Sigma_\lambda^u)}^{p-2}) \| u - u_\lambda \|_{L^s(\Sigma_\lambda^u)} \tag{11}$$

$$\| v - v_\lambda \|_{L^q(\Sigma_\lambda^v)} \leqslant \frac{C \| u \|_{L^s(\Sigma_\lambda')}^{p-1} \| u \|_{L^s(\Sigma_\lambda^u)}^{p-1}}{1 - C \| u \|_{L^s(\Sigma_\lambda^u)}^{p-2} \| v \|_{L^q(\Sigma_\lambda^v)}} \cdot \| v - v_\lambda \|_{L^q(\Sigma_\lambda^v)}$$

由 $u \in L^s(\Omega)$ 和 $v \in L^q(\Omega)$ 可知，存在常数 λ_1，满足 $\lambda_0 - \lambda_1 > 0$，对任意的 $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_0)$，使得 $|\Sigma_\lambda'|$，$|\Sigma_\lambda^u|$，$|\Sigma_\lambda^v|$ 充分小，且满足

$$C(\| u \|_{L^s(\Sigma_\lambda')}^{p-1} \| u \|_{L^s(\Sigma_\lambda^v)}^{p-1} +$$

$$\| v \|_{L^q(\Sigma_\lambda^v)} \| u \|_{L^s(\Sigma_\lambda^u)}^{p-2}) \leqslant \frac{1}{2}$$

$$\frac{C\| u \|_{L^s(\Sigma_\lambda')}^{p-1} \| u \|_{L^s(\Sigma_\lambda^u)}^{p-1}}{1-C\| u \|_{L^s(\Sigma_\lambda^u)}^{p-2} \| v \|_{L^q(\Sigma_\lambda^v)}} \leqslant \frac{1}{2}$$

这就意味着对任意的 $\lambda\in[\lambda_1,\lambda_0)$，$\| u-u_\lambda \|_{L^s(\Sigma_\lambda^u)}=0$，$\| v-v_\lambda \|_{L^q(\Sigma_\lambda^v)}=0$。因此 Σ_λ^u 和 Σ_λ^v 一定是空集，这就完成了该引理的证明。

在保持式(10)成立的同时，一直向左移动，将证明平面 T_λ 能被移动到 $\lambda=\hat{\lambda}$。

引理 5　定义 $\bar{\lambda}:=\inf\{\lambda\in[\hat{\lambda},\lambda_0),u(x^\lambda)\geqslant u(x),u(x^\lambda)\geqslant u(x),x\in\Sigma_\lambda\}$，则 $\bar{\lambda}=\hat{\lambda}$。

证明　同样仅需考虑 $x\in\Sigma_\lambda$ 的这种情况。假设 T_λ 能一直移动，直到 $\bar{\lambda}>\hat{\lambda}$，且满足式(10)，接下来将证明 T_λ 能被继续移动，也就是存在 ε 使得

$$u(x^\lambda)\geqslant u(x),v(x^\lambda)\geqslant v(x)$$

$$x\in\Sigma_\lambda,\forall\lambda\geqslant\bar{\lambda}-\varepsilon>\hat{\lambda} \tag{12}$$

这就与 $\bar{\lambda}$ 的定义矛盾。

定义 $\Sigma_{\bar{\lambda}}^u=\{x\in\Sigma_{\bar{\lambda}}:u(x)>u(x^{\bar{\lambda}})\}$，$\Sigma_{\bar{\lambda}}^v=\{x\in\Sigma_{\bar{\lambda}}:v(x)>v(x^{\bar{\lambda}})\}$，由测度论理论，有

$$|\Sigma_{\bar{\lambda}}^u|=0,\lim_{\lambda\to\bar{\lambda}^+}\Sigma_\lambda^u\subset\Sigma_{\bar{\lambda}}^u,|\Sigma_{\bar{\lambda}}^v|=0,\lim_{\lambda\to\bar{\lambda}^+}\Sigma_\lambda^v\subset\Sigma_{\bar{\lambda}}^v \tag{13}$$

因此可以选择足够小的 $\varepsilon>0$，满足 $\hat{\lambda}<\bar{\lambda}-\in<\bar{\lambda}$，使得对任意的 $\lambda\in[\bar{\lambda}-\varepsilon,\bar{\lambda})$，$\Sigma_\lambda^u|$，$|\Sigma_\lambda^v|$，$\| u \|_{L^s(\Sigma_\lambda^u)}$，$\| v \|_{L^q(\Sigma_\lambda^v)}$充分小，所以 $C(\| u \|_{L^s(\Sigma_\lambda')}^{p-1}\cdot\| u \|_{L^s(\Sigma_\lambda^v)}^{p-1}+\| v \|_{L^q(\Sigma_\lambda^v)}\| u \|_{L^s(\Sigma_\lambda^v)}^{p-2})\leqslant\frac{1}{2}$，$\frac{C\| u \|_{L^s(\Sigma_\lambda')}^{p-1}\| u \|_{L^s(\Sigma_\lambda^v)}^{p-1}}{1-C\| u \|_{L^s(\Sigma_\lambda^u)}^{p-2}\| v \|_{L^q(\Sigma_\lambda^v)}}\leqslant\frac{1}{2}$，类似于引理 4，对任意的 $\lambda\in[\bar{\lambda}-\in,\bar{\lambda})$，$\| u-u_\lambda \|_{L^s(\Sigma_\lambda^u)}=\| v-v_\lambda \|_{L^q(\Sigma_\lambda^v)}=0$。

即对任意的 $\lambda\in[\bar{\lambda}-\in,\bar{\lambda})$，$\Sigma_\lambda^u$ 和 Σ_λ^v 是空集。完成该引理的证明。

最后，证明环形区域(4)的解是关于 $T_{\hat{\lambda}}$ 对称的。又因为 x_1 的方向是任意的，可以推断 Ω_1 和 Ω_2 是同心球。并且，$u(x)$和 $v(x)$关于某些点中心对称，且随着中心点的距离增大而单调递减。

引理 6

$\Sigma_{\hat{\lambda}}\cup\Sigma_{\hat{\lambda}}'\cup D_{\hat{\lambda}}\cup D_{\hat{\lambda}}'=\Omega_2\backslash\Omega_1$，$P_{\hat{\lambda}}\cup P_{\hat{\lambda}}'=\Omega_1$，并且有 $u(x)\equiv u_{\hat{\lambda}}(x)$，$v(x)\equiv v_{\hat{\lambda}}(x)$，$\forall x\in\Omega_2\backslash\Omega_1$。

证明　首先证明 Ω_1 和 Ω_2 关于 $T_{\hat{\lambda}}$ 对称。反证，若不对称，即 $\Omega_{\hat{\lambda}}\cup D_{\hat{\lambda}}$ 不是空集。

在情况①和③中，有

$$u_{\hat{\lambda}}(\hat{x})-u(\hat{x})\geqslant\int_{D_{\hat{\lambda}}}g_\alpha(\hat{x},y)[C_1^{p-1}C_2-|u(y)|^{p-2}u(y)v(y)]\mathrm{d}y+$$

$$\int_{\Omega_{\hat{\lambda}}}g_\alpha(\hat{x},y)|u_{\hat{\lambda}}(y)|^{p-2}u_{\hat{\lambda}}(y)v_{\hat{\lambda}}(y)\mathrm{d}y>0$$

$$v_{\hat{\lambda}}(\hat{x})-v(\hat{x})\geqslant\int_{D_{\hat{\lambda}}}\left(\frac{1}{|\hat{x}-y|^{n-\alpha}}-\frac{1}{|\hat{x}^{\hat{\lambda}}-y|^{n-\alpha}}\right)\times(C_1^p-u^p(y))\mathrm{d}y+$$

$$\int_{\Omega_{\hat{\lambda}}}\left(\frac{1}{|\hat{x}-y|^{n-\alpha}}-\frac{1}{|\hat{x}^{\hat{\lambda}}-y|^{n-\alpha}}\right)u_{\hat{\lambda}}^p(y)>0$$

但是由边界条件，$u(x)=C_1,x\in\bar{\Omega}_1,u(x)=0,x\in\mathbf{R}^n\backslash\Omega_2,v(x)=C_2,x\in\bar{\Omega}_1,v(x)=0,x\in\mathbf{R}^n\backslash\Omega_2$ 得 $u_{\hat{\lambda}}(\hat{x})=u(\hat{x}),v_{\hat{\lambda}}(\hat{x})=v(\hat{x})$。从而矛盾，得证。

在情况②和④中，假设 $T_{\hat{\lambda}}$ 与$\partial\Omega_1$ 或$\partial\Omega_2$ 正交于点 $\hat{x}\in T_{\hat{\lambda}}$，这意味着

$$\partial_v u(\hat{x})=0,\partial_v v(\hat{x})=0 \tag{14}$$

令$\{x^m\}_{m=1}^{\infty}\subset\Sigma_{\hat{\lambda}}$ 使得 x^m 在 x_1 方向上有 $x^m\to\hat{x}$。不失一般性，假设存在一个球 $B\subset(\Omega_{\hat{\lambda}}\cup D_{\hat{\lambda}})$，假设球 B 在$\{x^m\}_{m=1}^{\infty}$左侧，则存在 $\varepsilon>0$，使得 $(x^m)^{\hat{\lambda}}=((x^m)_1^{\hat{\lambda}},\cdots,(x^m)_n^{\hat{\lambda}})$，且 $y=(y_1,\cdots,y_n)\in B$，有

$$(x^m)_1^{\hat{\lambda}}-y_1\geqslant\varepsilon$$

对任意的 $y\in B$，若 $\bar{x}^m$ 介于$(x^m)^{\hat{\lambda}}$ 和x^m 之间，使得

$$G_\alpha((x^m)^{\hat{\lambda}}-y)-G_\alpha(x^m-y)=$$

$$\frac{1}{\gamma(\alpha)}\int_0^\infty\left[\exp\left(-\frac{\pi|(x^m)^{\hat{\lambda}}-y|^2}{\delta}\right)-\exp\left(-\frac{\pi|x^m-y|^2}{\delta}\right)\right]\exp\left(-\frac{\delta}{4\pi}\right)\delta^{\frac{\alpha-n}{2}}\frac{\mathrm{d}\delta}{\delta}=$$

$$\frac{1}{\gamma(\alpha)}\int_0^\infty\exp\left(-\frac{\pi|\bar{x}^m-y|^2}{\delta}\right)\cdot\frac{-2\pi(\bar{x}^m-y)[(x^m)^{\hat{\lambda}}-x^m]}{\delta}\exp\left(-\frac{\delta}{4\pi}\right)\delta^{\frac{\alpha-n}{2}}\frac{\mathrm{d}\delta}{\delta}$$

因为$(x^m)_1^{\hat{\lambda}}\leqslant\bar{x}_1^m\leqslant x_1^m$，有

$$(\bar{x}^m-y)[x^m-(x^m)^{\hat{\lambda}}]=(\bar{x}_1^m-y_1)[x_1^m-(x^m)_1^{\hat{\lambda}}]\geqslant$$

$$\varepsilon[x_1^m-(x^m)_1^{\hat{\lambda}}]=\varepsilon|x^m-(x^m)^{\hat{\lambda}}|$$

则

$$u_{\hat{\lambda}}(x^m)-u(x^m)\geqslant$$

$$\int_{D_{\hat{\lambda}}}g_\alpha(x^m,y)[C_1^{p-1}C_2-|u(y)|^{p-2}u(y)v(y)]\mathrm{d}y+$$

$$\int_{\Omega_{\hat{\lambda}}}g_\alpha(x^m,y)|u_{\hat{\lambda}}(y)|^{p-2}u_{\hat{\lambda}}(y)v_{\hat{\lambda}}(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}y\geqslant$$

$$\frac{2\pi\varepsilon}{\gamma(\alpha)}\int_{D_{\hat{\lambda}}}[C_1^{p-1}C_2-|u(y)|^{p-2}u(y)v(y)]M\mathrm{d}y+$$

$$\frac{2\pi\varepsilon}{\gamma(\alpha)}\int_{\Omega_{\hat{\lambda}}}|u_{\hat{\lambda}}(y)|^{p-2}u_{\hat{\lambda}}(y)v_{\hat{\lambda}}(y)M\mathrm{d}y$$

其中

$$M=\int_0^\infty\exp\left(\frac{-\pi|\bar{x}^m-y|^2}{\delta}\right)|x^m-(x^m)^{\hat{\lambda}}|\cdot$$

$$\exp\left(\frac{-\delta}{4\pi}\right)\delta^{\frac{\alpha-n}{2}}\frac{\mathrm{d}\delta}{\delta}$$

这意味着

$$\liminf_{m\to\infty}\frac{u_{\hat{\lambda}}(x^m)-u(x^m)}{|(x^m)^{\hat{\lambda}}-x^m|}>0$$

这与式(14)矛盾。

类似地,对任意的 $y\in B$,若 $\bar{x}^m$ 介于 $(x^m)^{\hat{\lambda}}$ 和 x^m 之间,有

$$\frac{1}{|x^m-y|^{n-\alpha}}-\frac{1}{|(x^m)^{\hat{\lambda}}-y|^{n-\alpha}}=\frac{-(n-\alpha)(\bar{x}^m-y)}{|\bar{x}^m-y|^{n-\alpha+2}}[x^m-(x^m)^{\hat{\lambda}}]$$

则

$$\begin{aligned}&v_{\hat{\lambda}}(x^m)-v(x^m)\geqslant\\&\int_{D_{\hat{\lambda}}}\left(\frac{1}{|x^m-y|^{n-\alpha}}-\frac{1}{|(x^m)^{\hat{\lambda}}-y|^{n-\alpha}}\right)\cdot(C_1^p-u^p(y))\mathrm{d}y+\\&\int_{\Omega_{\hat{\lambda}}}\left(\frac{1}{|x^m-y|^{n-\alpha}}-\frac{1}{|(x^m)^{\hat{\lambda}}-y|^{n-\alpha}}\right)u_{\hat{\lambda}}^p(y)\mathrm{d}y=\\&\int_{D_{\hat{\lambda}}}\frac{(n-\alpha)(\bar{x}^m-y)}{|\bar{x}^m-y|^{n-\alpha+2}}[(x^m)^{\hat{\lambda}}-x^m]\cdot(C_1^p-u^p(y))\mathrm{d}y+\\&\int_{\Omega_{\hat{\lambda}}}\frac{(n-\alpha)(\bar{x}^m-y)}{|\bar{x}^m-y|^{n-\alpha+2}}[(x^m)^{\hat{\lambda}}-x^m]u_{\hat{\lambda}}^p(y)\mathrm{d}y\end{aligned}$$

这意味着 $\liminf\limits_{m\to\infty}\dfrac{v_{\hat{\lambda}}(x^m)-v(x^m)}{|(x^m)^{\hat{\lambda}}-x^m|}>0$,这也与式(14)矛盾。

结合以上4种情况,得到 $\Omega_{\hat{\lambda}}\cup D_{\hat{\lambda}}$ 是空集,也就是说,$\Sigma_{\hat{\lambda}}\cup\Sigma'_{\hat{\lambda}}\cup D_{\hat{\lambda}}\cup D'_{\hat{\lambda}}=\Omega_2\backslash\Omega_1$,$P_{\hat{\lambda}}\cup P'_{\hat{\lambda}}=\Omega_1$。

再向反方向移动 T_λ,引理4—6的结果同样成立。所以,推断出 $u(x)$ 和 $v(x)$ 关于 $T_{\hat{\lambda}}$ 对称,且随着到 $T_{\hat{\lambda}}$ 的距离增大而单调递减。

最后,由于 x_1 的方向是任意的,则 Ω_1 和 Ω_2 是同心球,且 $u(x)$ 和 $v(x)$ 关于中心点对称,且随着距中心点的距离增大而单调递减。

3 结束语

文献[1]中证明了薛定谔方程(3)的解的径向对称性和单调性,本文则进一步研究并得到了边值为常数的分数阶薛定谔方程在有界环形区域上解的径向对称性和单调性。本文的难点在于当边值为常数时,环形区域也是对称的。在得到解的对称性基础上,可以将方程转化为常微分方程,用常微分的理论进一步研究分数阶薛定谔方程。

参考文献:

[1] MA Li, ZHAO Lin. Classification of positive solitary solutions of the nonlinear choquard equation[J]. Arch Rational Mech Anal, 2010, 195(2):455-467.

[2] LOINS P L. The Choquard equation and related questions[J]. Nonlinear Analysis, 1980, 4(6):1063-1072.

[3] LOINS P L. Compactness and topological methods for some nonlinear variational problems of mathematical physics[J]. North-Holland Mathematics Studies, 1982, 61:17-34.

[4] LIEB E H. Existence and uniqueness of the minimizing solution of Choquards nonlinear equation[J]. Stud Appl Math, 1977, 57(2):93-105.

[5] SERRIN J. A symmetry problem in potential theory[J]. Arch Rational Mech Anal, 1971, 43(4):304-318.

[6] GIDAS B, NI W M, NIRENBERG L. Symmetry and related properties via the maximum principle[J]. Comm Math Phy, 1979, 68(3):209-243.

[7] CAFFARELL L, GIDAS B, SPRUCK J. Asymptotic symmetry and local behavior of semilinear elliptic equations with critical Sobolev growth[J]. Comm Pure Appl Math, 1989, 42(3):271-297.

[8] CHEN Wengxiong, LI Congming, OU B. Classification of solutions for an integral equation[J]. Comm Pure Appl Math, 2010, 59(3):330-343.

[9] LI Dongsheng, WANG Lihe. Symmetry of integral equations on bounded domains[J]. Proc Amer Math Soc, 2009, 137(11):3695-3702.

[10] CHENG Ze, HUANG Gengheng, LI Congming. On the Hardy-Littlewood-Sobolev type systems[J]. Communications on Pure & Applied Analysis, 2015, 15(6):2059-2074.

[11] HUANG Xiaotao, LI Dongsheng, WANG Lihe. Symmetry of integral equation systems with Bessel kernel on bounded domains[J]. Nonlinear Analysis, 2011, 74(2):494-500.

(编辑:刘彦东)