

DOI:10.16356/j.1005-2615.2018.05.009

基于 P_{EV} 准则的不确定随机多目标规划问题求解

孙 贇 王 瑛 李 超

(空军工程大学装备管理与无人机工程学院,西安,710051)

摘要:为解决独立变量的不确定随机多目标规划问题在传统求解中存在分析不全面等问题,在期望值-方差准则下提出了一种新的求解方法。基于机会理论,引入不确定随机变量,在此基础上提出了不确定随机多目标规划问题;引入不确定随机变量的序关系,利用变量间的序关系把不确定随机多目标规划问题转化成不确定随机单目标规划问题,并通过期望值-方差准则把不确定随机单目标规划问题转化成确定的单目标规划问题进行求解;通过理论推导证明,在新准则下转化后的问题得到的最优解是原不确定随机多目标规划问题的有效解;最后,通过对无人机情报侦察监视任务分配问题的求解,利用改进的萤火虫算法求得有效飞行序列,验证了所提方法的可行性和有效性。

关键词:机会理论;多目标规划; P_{EV} 准则;无人机任务分配

中图分类号:O221.6 **文献标志码:**A **文章编号:**1005-2615(2018)05-0645-08

Solving Uncertain Random Multi-objective Programming Problems Based on P_{EV} Principle

SUN Yun, WANG Ying, LI Chao

(Equipment Management and UAV Engineering College, Air Force Engineering University, Xi'an, 710051, China)

Abstract: Aiming at the shortcomings of the traditional solution method for multiobjective programming with independent uncertain random variables, a new method is proposed to solve the problem under the new criterion. First of all, through the introduction of uncertainty relation between random variables, an effective solution of uncertain stochastic multiobjective programming problem is defined; Then, by using sequence relationship between the variables, the uncertain stochastic multi-objective problem is transformed into single objective stochastic uncertain programming problems. The uncertain stochastic single objective programming problem is converted into a deterministic single objective programming problem via the expected-variance value principle. Then the validity is proved that the optimal solution of the deterministic single objective programming problem is an efficient solution of the original I-UR-MOP problem; Finally through using the improved firefly algorithm, the ISR task assignment problem of the UAV is solved, and the feasibility of the method is verified.

Key words: chance theory; multi-objective programming; P_{EV} principle; intelligence surveillance reconnaissance

经典的多目标规划问题无论是在理论研究、求解方法,还是在应用研究方面都取得了重要进展。

经典多目标规划大多解决的是确定环境下的决策问题,即经典多目标规划模型中的参数都是确定

基金项目:国家自然科学基金(71601183)资助项目。

收稿日期:2017-12-11;**修订日期:**2018-05-07

通信作者:王瑛,女,教授,博士生导师,E-mail:yingwangkgd@163.com。

引用格式:孙贇,王瑛,李超.基于 P_{EV} 准则的不确定随机多目标规划问题求解[J].南京航空航天大学学报,2018,50(5):645-652. SUN Yun, WANG Ying, LI Chao. Solving uncertain random multi-objective programming problems based on P_{EV} principle[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2018, 50(5): 645-652.

的^[1,2]。然而,实际规划问题涉及大量非确定因素。比如,多种突发情况下的飞机维修计划^[3]、装备保障系统任务抢修时的各种冲突^[4]等,这些因素一般是不确定的,称为非决定现象。实际生活中非决定现象大量存在,这使得经典多目标规划在应用中存在较大的局限性。人们逐渐发现在实际生活中有一类可以得到观测数据的问题,这类问题通过充足的样本数据,利用概率统计的相关方法可以确定概率分布函数,可以使用概率论解决相应的问题。还有一类带有专家信度的问题^[5],这种非决定的现象与随机现象不同,由于实践中无法获取足够的专家数据,只能借助专家去估计事件发生的信度。为了更好地解决这类带有专家信度的问题^[6],Liu提出了基于不确定理论的不确定规划问题^[6,7]。然而,在现实系统中,既存在已知概率分布函数的随机变量,同时存在已知不确定分布的不确定变量,由此得到不确定随机变量。Liu^[8]在2013年提出机会理论,用于处理这类既包括随机因素又包括不确定因素的问题,如不确定环境下存在多个任务点的无人机任务分配问题,由于战争的突发性、任务的时效性和战场的不透明性^[9,10],在进行无人机任务分配时无法得到足够的样本数据,影响其任务分配的非决定因素既包括不确定变量,也包括随机变量,如何在满足各种约束条件的前提下,使得无人机最短时间内,安全地遍历所有的任务点,完成作战任务是个典型的不确定随机问题^[11-13]。多目标规划的“最优解”是不同意义下的有效解^[13,14],为了使模型的有效解更贴近实际问题的解决,需要对不同意义下的有效解进行更为全面的分析。期望值和方差都是不确定随机变量重要的数字特征^[15-17],在实际求解中有广泛应用。

处理不确定随机多目标规划问题,可以建立不确定随机多目标规划模型(Uncertain random multi-objective programming problem, UR-MOP),通常情况下所建的模型中不确定随机变量往往是相互独立的,即变量独立的不确定随机多目标规划模型(Independent-uncertain random multi-objective programming problem, I-URMOP)。本文首先利用不确定随机变量之间的序关系定义URMOP问题的有效解,通过线性加权法把不确定随机多目标规划问题转化为不确定随机单目标规划问题,然后引入期望值方差准则,在期望值方差模型中把原问题转化为确定的单目标规划问题进行求解,最后通过无人机ISR任务分配问题证明求解得到的最优解是原问题的有效解。

1 模型建立

I-URMOP指的是在各个目标函数中均含有

独立不确定随机变量的多目标规划问题,该类问题可以通过如下的数学模型进行描述,即

$$\begin{cases} \min(f_1(x, \xi_1), f_2(x, \xi_2), \dots, f_p(x, \xi_p)) \\ x \in \mathbf{R}^n \\ \text{s. t. } g_i(x, \eta_i) \leq 0, i=1, 2, \dots, m \end{cases} \quad (1)$$

式中: $x \in \mathbf{R}^n$ 为决策变量; $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p$ 为定义在机会空间 $(\Gamma, L, M) \times (\Omega, A, \text{Pr})$ 上的相互独立的不确定随机变量; $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m$ 为定义在机会空间 $(\Gamma, L, M) \times (\Omega, A, \text{Pr})$ 上的相互独立的不确定随机变量。

定义 1^[18] (Γ, L, M) 表示的是不确定空间, (Ω, A, Pr) 表示的是概率空间,那么两者的乘积空间 $(\Gamma, L, M) \times (\Omega, A, \text{Pr})$ 表示的是机会空间,在机会空间中定义机会测度为 $Ch[\cdot]$ 。

定义 2^[18] 不确定随机变量是从机会空间 $(\Gamma, L, M) \times (\Omega, A, \text{Pr})$ 到实数集的可测函数,同时随机变量是特殊的不确定随机变量,不确定变量也是特殊的不确定随机变量。

定义 3 问题(1)的有效解是可行解 x^* ,如果在数域中不存在可行解 \bar{x} 使得

$$f_j(\bar{x}, \xi_j) \leq f_j(x^*, \xi_j) \quad j=1, 2, \dots, p \quad (2)$$

成立,并且在数域至少存在一个 $j_0, 1 \leq j_0 \leq p$,使得 $f_{j_0}(\bar{x}, \xi_{j_0}) < f_{j_0}(x^*, \xi_{j_0})$ 成立。

定义 4 P_{EV} 准则指的是 ξ 和 η 是机会空间中两个不确定随机变量,当且仅当满足 $E[\xi] \leq (<) E[\eta]$ 且 $V[\xi] \leq (<) V[\eta]$ 的条件时, $\xi \leq$ (或 $<$) η 成立。其中, $E[\cdot], V[\cdot]$ 表示不确定随机变量的期望和方差。

定理 1^[18] 机会测度 $Ch[\Theta]$ 是 Θ 的单调函数且对于 $\forall \Lambda \in L$ 和 $B \in A$, 存在

$$Ch\{\Lambda \times A\} = M\{\Lambda\} \times \text{Pr}\{B\} \quad (3)$$

定理 2^[8] $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m$ 表示独立的随机变量,其概率分布表示为 $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_m, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ 表示独立的不确定变量,不确定变量表示为 $\Upsilon_1, \Upsilon_2, \dots, \Upsilon_n$, 则不确定随机变量

$$\xi = f(\eta_1, \dots, \eta_m, \tau_1, \dots, \tau_n) \quad (4)$$

存在期望值

$$E[\xi] = \int_{\mathbf{R}^m} \int_0^1 f(y_1, \dots, y_m, \Upsilon_1^{-1}(\alpha), \dots, \Upsilon_n^{-1}(\alpha)) d\alpha d\Psi_1(y_1) \cdots d\Psi_m(y_m) \quad (5)$$

当且仅当 $f(\eta_1, \dots, \eta_m, \tau_1, \dots, \tau_n)$ 对于不确定变量 $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ 是单调函数。

定理 3^[8] η_1 和 η_2 表示的是独立的随机变量, τ_1 和 τ_2 表示的是独立的不确定变量, f_1 和 f_2 是可测函数,函数 $f_i(\eta_i, \tau_i)$ 表示的是不确定随机变量,那么

$$E[f_1(\eta_1, \tau_1) + f_2(\eta_2, \tau_2)] =$$

$$E[f_1(\eta_1, \tau_1)] + E[f_2(\eta_2, \tau_2)] \quad (6)$$

成立。

定理 4 机会分布函数 $\alpha = \Phi(x)$ 是单调非降的,它的逆分布为

$$x = \Phi^{-1}(\alpha) \triangleq \Phi_1^{-1}(\alpha) = \inf\{x \mid \Phi(x) \geq \alpha\} \quad (7)$$

$$x = \Phi^{-1}(\alpha) \triangleq \Phi_2^{-1}(\alpha) = \sup\{x \mid \Phi(x) < \alpha\} \quad (8)$$

式中 $0 \leq \alpha \leq 1$ 。

证明:证明式(7)和式(8)等价。

任取 $x_1 \in \{x \mid \Phi(x) \geq \alpha\}$, 即 $\Phi(x_1) \geq \alpha$, 任取 $x_2 \in \{x \mid \Phi(x) < \alpha\}$, 即 $\Phi(x_2) < \alpha$, 那么, $\Phi(x_1) > \Phi(x_2)$ 。由 $\Phi(x)$ 的非降性可得,一定存在 $x_1 > x_2$, 即 $\{x \mid \Phi(x) \geq \alpha\}$ 中的任意一个元素一定大于 $\{x \mid \Phi(x) < \alpha\}$ 中的任意一个元素,那么 $\Phi_1^{-1}(\alpha) \geq \Phi_2^{-1}(\alpha)$ 。

下面利用反证法进一步证明。如果 $\Phi_1^{-1}(\alpha) > \Phi_2^{-1}(\alpha)$, 那么一定存在 x^* 使得 $\Phi_1^{-1}(\alpha) > x^* > \Phi_2^{-1}(\alpha)$ 。 $\Phi_2^{-1}(\alpha)$ 是 $\{x \mid \Phi(x) < \alpha\}$ 的上确界,所以 $x^* \notin \{x \mid \Phi(x) < \alpha\}$, 可得 $x^* \in \{x \mid \Phi(x) \geq \alpha\}$ 。但是 $\Phi_1^{-1}(\alpha)$ 是 $\{x \mid \Phi(x) \geq \alpha\}$ 的下确界,应该存在 $x^* \geq \Phi_1^{-1}(\alpha)$, 与前面结论矛盾,所以 $\Phi_1^{-1}(\alpha) > \Phi_2^{-1}(\alpha)$ 不成立,两个定义等价。

2 模型求解

求解多目标规划问题的思路是,构造一个可测度函数 F 把多目标问题转化成单目标问题,然后对问题进行求解,转化的结果为

$$\begin{cases} \min_{x \in \mathbf{R}^p} U(x, \xi) = \\ F(f_1(x, \xi_1), f_2(x, \xi_2), \dots, f_p(x, \xi_p)) \quad (9) \\ \text{s. t. } Ch\{g_i(x, \eta_i) \leq 0\} \geq \alpha_i, i = 1, 2, \dots, m \end{cases}$$

$U(x, \xi)$ 表示一个不确定随机变量,在转化过程中保留了原问题的不确定随机性。

P_{EV} 准则下,问题(9)可以转化为确定性等价模型

$$\begin{cases} \min_{x \in \mathbf{R}^p} E[U(x, \xi)] + V[U(x, \xi)] = \\ E[F(f_1(x, \xi_1), f_2(x, \xi_2), \dots, f_p(x, \xi_p))] + \\ V[F(f_1(x, \xi_1), f_2(x, \xi_2), \dots, f_p(x, \xi_p))] \\ \text{s. t. } Ch\{g_i(x, \eta_i) \leq 0\} \geq \alpha_i, i = 1, 2, \dots, m \end{cases} \quad (10)$$

为了证明(10)的最优解同时是 I-URMOP 问题的有效解,根据 P_{EV} 准则做以下证明。

定理 5 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 是服从正则机会分布 $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$ 的独立不确定随机变量,如果函数 f 是严格单调增函数,那么

$$\xi = f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \quad (11)$$

是不确定随机变量,同时具有逆分布

$$\Psi^{-1}(\alpha) = f(\Phi_1^{-1}(\alpha), \Phi_2^{-1}(\alpha), \dots, \Phi_n^{-1}(\alpha)) \quad (12)$$

证明:为了简单起见,本文以 $n=2$ 为例进行证明。根据定义可得

$$\{\xi \leq \Psi^{-1}(\alpha)\} \equiv \{f(\xi_1, \xi_2) \leq f(\Phi_1^{-1}(\alpha), \Phi_2^{-1}(\alpha))\} \quad (13)$$

一方面,因为 f 是严格单调增函数,存在

$$\{\xi \leq \Psi^{-1}(\alpha)\} \Leftrightarrow \{\xi_1 \leq \Phi_1^{-1}(\alpha)\} \cap \{\xi_2 \leq \Phi_2^{-1}(\alpha)\} \quad (14)$$

因为变量 ξ_1, ξ_2 是独立的,所以

$$\begin{aligned} Ch\{\xi \leq \Psi^{-1}(\alpha)\} &\geq \\ Ch\{\xi_1 \leq \Phi_1^{-1}(\alpha)\} \cap \{\xi_2 \leq \Phi_2^{-1}(\alpha)\} &= \\ Ch\{\xi_1 \leq \Phi_1^{-1}(\alpha)\} \wedge Ch\{\xi_2 \leq \Phi_2^{-1}(\alpha)\} &= \\ \alpha \wedge \alpha &= \alpha \end{aligned} \quad (15)$$

另一方面,因为 f 是严格单调增函数,存在

$$\{\xi \leq \Psi^{-1}(\alpha)\} \Leftrightarrow \{\xi_1 \leq \Phi_1^{-1}(\alpha)\} \cup \{\xi_2 \leq \Phi_2^{-1}(\alpha)\} \quad (16)$$

因为变量 ξ_1, ξ_2 是独立的,所以

$$\begin{aligned} Ch\{\xi \leq \Psi^{-1}(\alpha)\} &\geq \\ Ch\{\xi_1 \leq \Phi_1^{-1}(\alpha)\} \cup \{\xi_2 \leq \Phi_2^{-1}(\alpha)\} &= \\ Ch\{\xi_1 \leq \Phi_1^{-1}(\alpha)\} \vee Ch\{\xi_2 \leq \Phi_2^{-1}(\alpha)\} &= \\ \alpha \vee \alpha &= \alpha \end{aligned} \quad (17)$$

$Ch\{\xi \leq \Psi^{-1}(\alpha)\} = \alpha$, 因此 Ψ^{-1} 是 ξ 机会分布的逆分布。

引理 1 ξ 和 η 是两个分别服从机会分布 Φ 和 Ψ 的不确定随机变量,对于

$$E[a\xi + b\eta] = aE[\xi] + bE[\eta] \quad (18)$$

证明:

根据不确定随机变量的期望计算公式

$$E[\xi] = \int_0^1 \Phi^{-1}(\alpha) d\alpha \quad (19)$$

式中 $\Phi^{-1}(\alpha)$ 是 ξ 的逆分布。

由式(19)可得

$$\begin{aligned} E[a\xi + b\eta] &= \int_0^1 a\Phi^{-1}(\alpha) d\alpha + \int_0^1 b\Psi^{-1}(\alpha) d\alpha = \\ a \int_0^1 \alpha \Phi^{-1}(\alpha) d\alpha + b \int_0^1 \alpha \Psi^{-1}(\alpha) d\alpha &= \\ aE[\xi] + bE[\eta] \end{aligned} \quad (20)$$

引理得证。

引理 2 ξ 和 η 是两个分别服从机会分布 Φ 和 Ψ 的不确定随机变量,即

$$V[a\xi + b\eta] = a^2V[\xi] + b^2V[\eta] \quad (21)$$

证明:

根据不确定随机变量的方差计算公式

$$V[\xi] = E[(\xi - e_\xi)^2] = \int_0^1 [\Phi^{-1}(\alpha) - e_\xi]^2 d\alpha \quad (22)$$

式中 e_ξ 为 ξ 的期望。

因 ξ 和 η 相互独立,存在

$$\begin{aligned} & \int_0^1 [a\Phi^{-1}(\alpha) - ae_\xi] \cdot [b\Psi^{-1}(\alpha) - be_\eta] d\alpha = \\ & \int_0^1 [a\Phi^{-1}(\alpha) \cdot b\Psi^{-1}(\alpha)] d\alpha + ae_\xi \cdot be_\eta - \\ & be_\eta \cdot \int_0^1 a\Phi^{-1}(\alpha) d\alpha - ae_\xi \cdot \int_0^1 b\Psi^{-1}(\alpha) d\alpha = \\ & ab \int_0^1 [\Phi^{-1}(\alpha) \cdot \Psi^{-1}(\alpha)] d\alpha + abe_\xi e_\eta - \\ & abe_\eta \cdot \int_0^1 a\Phi^{-1}(\alpha) d\alpha - abe_\xi \cdot \int_0^1 b\Psi^{-1}(\alpha) d\alpha = \\ & abe_\xi e_\eta - abe_\xi e_\eta - abe_\xi e_\eta + abe_\xi e_\eta = 0 \quad (23) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V[a\xi + b\eta] = & \int_0^1 [(a\Phi^{-1}(\alpha) + b\Psi^{-1}(\alpha)) - (ae_\xi + be_\eta)]^2 d\alpha = \\ & \int_0^1 \{ [a\Phi^{-1}(\alpha) - ae_\xi]^2 + [b\Psi^{-1}(\alpha) - be_\eta]^2 \} d\alpha + \\ & \int_0^1 2[a\Phi^{-1}(\alpha) - ae_\xi] \cdot [b\Psi^{-1}(\alpha) - be_\eta] d\alpha = \\ & \int_0^1 \{ [a\Phi^{-1}(\alpha) - ae_\xi]^2 + [b\Psi^{-1}(\alpha) - be_\eta]^2 \} d\alpha = \\ & \int_0^1 \{ a^2[\Phi^{-1}(\alpha) - e_\xi]^2 + b^2[\Psi^{-1}(\alpha) - e_\eta]^2 \} d\alpha = \\ & a^2V[\xi] + b^2V[\eta] \quad (24) \end{aligned}$$

引理得证。

引理 3 ξ 和 η 是两个分别服从机会分布 Φ 和 Ψ 的不确定随机变量。如果 $\xi \leq$ (或 $<$) η , 那么, $\forall \lambda \in \mathbf{R}^+$, $\lambda\xi \leq$ (或 $<$) $\lambda\eta$ 成立。

证明: 因为 $\xi \leq$ (或 $<$) η 有

$$E[\xi] \leq (\text{或 } <) E[\eta] \quad (25)$$

$$V[\xi] \leq (<) V[\eta] \quad (26)$$

$$\lambda E[\xi] \leq (\text{或 } <) \lambda E[\eta] \quad (27)$$

$$\lambda^2 V[\xi] \leq (<) \lambda^2 V[\eta] \quad (28)$$

由引理 1 可得, 对于任意 $\lambda \in \mathbf{R}^+$, 存在

$$E(\lambda\xi) \leq (<) E(\lambda\eta) \quad (29)$$

$$V(\lambda\xi) \leq (<) V(\lambda\eta) \quad (30)$$

即 $\lambda\xi \leq$ (或 $<$) $\lambda\eta$ 成立。

引理得证。

引理 4 假设 ξ_1, ξ_2 是服从机会分布 Φ_1, Φ_2 的相互独立的不确定随机变量, η_1, η_2 是分别服从机会分布 Ψ_1, Ψ_2 的相互独立的不确定随机变量。若 $\xi_1 \leq \eta_1, \xi_2 < \eta_2$ 或 $\xi_1 < \eta_1, \xi_2 \leq \eta_2$, 有 $\xi_1 + \xi_2 < \eta_1 + \eta_2$ 。

证明: 本文以 $\xi_1 \leq \eta_1, \xi_2 < \eta_2$ 为例进行证明, 其他情况的证明方法与本文类似, 由 P_{EV} 准则可知, 存在

$$E[\xi_1] \leq E[\eta_1], V(\xi_1) \leq V(\eta_1) \quad (31)$$

$$E[\xi_2] < E[\eta_2], V(\xi_2) < V(\eta_2) \quad (32)$$

根据式(30)和式(31)可得

$$E[\xi_1] + E[\xi_2] < E[\eta_1] + E[\eta_2] \quad (33)$$

根据引理 1 可得

$$E[\xi_1 + \xi_2] = E[\xi_1] + E[\xi_2] \quad (34)$$

$$E[\eta_1 + \eta_2] = E[\eta_1] + E[\eta_2] \quad (35)$$

综上可得, 存在

$$E[\xi_1] + V[\xi_2] < V[\eta_1] + V[\eta_2] \quad (36)$$

根据式(31)和式(32)可得

$$V[\xi_1] + V[\xi_2] < V[\eta_1] + V[\eta_2] \quad (37)$$

根据引理 2 可得

$$V[\xi_1 + \xi_2] = V[\xi_1] + V[\xi_2] \quad (38)$$

$$V[\eta_1 + \eta_2] = V[\eta_1] + V[\eta_2] \quad (39)$$

综上可得, 存在

$$V[\xi_1 + \xi_2] > V[\eta_1 + \eta_2] \quad (40)$$

即 $\xi_1 + \xi_2 < \eta_1 + \eta_2$ 成立。证毕。

线性加权法的求解思路是根据具体情况, 将每一个不确定随机目标赋予相应的权值并进行线性加权求和, 通过该方法转换得到的不确定单目标规划模型表示为

$$\begin{cases} \min U(x, \xi) = \sum_{i=1}^p \lambda_i f_i(x, \xi_i) \\ x \in \mathbf{R}^n \\ \text{s. t. } Ch \{g_k(x, \eta_k) \leq 0\} \geq \alpha_k, k=1, 2, \dots, m \end{cases} \quad (41)$$

其中 $\lambda \in \{\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) \mid \lambda_i > 0, \sum_{i=1}^p \lambda_i = 1\}$ 。

定理 6 不确定随机单目标规划式(32)在 P_{EV} 准则下的有效解是不确定随机多目标规划式(1)的 P_{EV} 有效解。

证明: 假设 x^* 是不确定随机单目标规划(32)的最优解, 但不是不确定随机多目标规划式(1)的 P_{EV} 有效解, 根据定义 3 可知, 存在可行解 \bar{x} 使得

$$f_i(\bar{x}, \xi) \leq f_i(x^*, \xi) \quad i=1, 2, \dots, p \quad (42)$$

成立, 并且至少存在某个 $i_0, 1 \leq i_0 \leq p$, 使得

$$f_{i_0}(\bar{x}, \xi) < f_{i_0}(x^*, \xi)$$

因为 $\lambda \in \{\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) \mid \lambda_i > 0, \sum_{i=1}^p \lambda_i = 1\}$, 结合引理 3 及引理 4, 存在

$$E[\sum_{i=1}^p \lambda_i f_i(\bar{x}, \xi)] < E[\sum_{i=1}^p \lambda_i f_i(x^*, \xi)] \quad (43)$$

$$V[\sum_{i=1}^p \lambda_i f_i(\bar{x}, \xi)] < V[\sum_{i=1}^p \lambda_i f_i(x^*, \xi)] \quad (44)$$

即

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i f_i(\bar{x}, \xi) < \sum_{i=1}^p \lambda_i f_i(x^*, \xi) \quad (45)$$

于是

$$U(\bar{x}, \xi) < U(x^*, \xi) \quad (46)$$

根据定义 3 可知 x^* 不是不确定随机单目标规划(51)的最优解, 这与原本假设矛盾。因此原假设不成立, x^* 是不确定随机多目标规划(1)在 P_{EV}

准则下的有效解。定理得证。

根据以上证明,可以总结不确定随机多目标规划问题求解流程如图 1 所示。

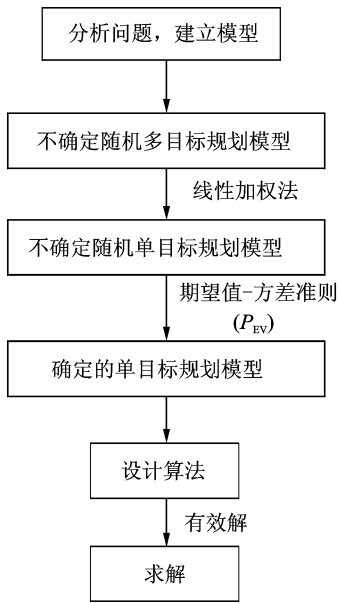


图 1 不确定随机多目标规划求解流程图

Fig. 1 Uncertain stochastic multi-objective programming solution flow chart

3 案例分析

无人机情报侦察监视 (Intelligence surveillance reconnaissance, ISR)^[12] 任务分配模型主要考虑 3 个决策目标,即无人机执行任务的时间 (Time)、无人机执行任务受到的威胁 (Threat) 以及无人机执行任务的耗油量 (Fuel)。目标函数主要受到敌方火力情况、复杂地形以及任务区域天气情况等 3 类不确定因素的影响,前两类由于敌方伪装等原因无法获取足量的数据,需要给出专家信度,可以设定为不确定空间 (Γ, L, M) 上的不确定变量,记为 ξ_1, ξ_2 ;第 3 类可以结合气象卫星和历史数据,获取足量样本进行判断,可以设定为概率空间 (Ω, A, Pr) 上的随机变量,记为 η 。这 3 类不确定因素变量大多数情况下会同时对无人机执行任务的时间、无人机执行任务受到的威胁以及无人机执行任务的耗油量产生一定影响。此外,无人机执行 ISR 任务还会受到其他很多约束条件的限制,本文中主要考虑无人机执行 ISR 任务过程中的燃油约束条件,假设该型无人机的最大载油量是 9 t, K 表示任务位置点。综上所述,具体的无人机 ISR 任务分配模型为

$$\begin{cases} \min_{\pi(X)} (\text{Time}(\pi(X), \xi_1, \xi_2, \eta), \\ \text{Threat}(\pi(X), \xi_1, \xi_2, \eta), \\ \text{Fuel}(\pi(X), \xi_1, \xi_2, \eta)) \\ \text{s. t. } Ch \{ \text{Fuel}(\pi(X), \xi_1, \xi_2, \eta) - 9 \leq 0 \} \geq 1 \end{cases} \quad (47)$$

时间目标函数以 350 km/h 速度飞行时,受敌方火力和地形影响较大,以 450 km/h 速度飞行时,受天气影响较大,可以表示为

$$\begin{aligned} \text{Time}(\pi(X), \xi_1, \xi_2, \eta) = \\ \frac{\xi_1}{\xi_1 + \xi_2} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{d(K_i, K_{i+1})}{350} + \frac{d(K_n, K_1)}{350} \right) + \\ \eta \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{d(K_i, K_{i+1})}{450} + \frac{d(K_n, K_1)}{450} \right) \end{aligned} \quad (48)$$

威胁目标函数受敌方火力影响较大(系数为 0.5),受天气和地形影响较小(系数为 0.2),可以表示为

$$\begin{aligned} \text{Threat}(\pi(X), \xi_1, \xi_2, \eta) = \\ \ln(\xi_1) \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{0.5}{d(K_i, K_{i+1})} + \frac{0.5}{d(K_n, K_1)} \right) + \\ \frac{\ln(\xi_2)}{\eta^2 + 1} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{0.2}{d(K_i, K_{i+1})} + \frac{0.2}{d(K_n, K_1)} \right) \end{aligned} \quad (49)$$

耗油量的目标函数相对比较复杂,本文中以式 (50) 表示为

$$\begin{aligned} \text{Fuel}(\pi(X), \xi_1, \xi_2, \eta) = 0.02 \times \frac{\ln(\xi_1)}{\xi_2^2 + 0.3} \times \\ \left(\sum_{i=1}^{n-1} | \ln((d(K_i, K_{i+1})) - 45)^2 | + \right. \\ \left. | \ln((d(K_n, K_1)) - 45)^2 | \right) + 0.02 \times \ln(\eta + 1) \times \\ \left(\sum_{i=1}^{n-1} | \ln((d(K_i, K_{i+1})) - 55)^2 | + \right. \\ \left. | \ln((d(K_n, K_1)) - 55)^2 | \right) \end{aligned} \quad (50)$$

可将式 (48—50) 的目标函数记为

$$\begin{aligned} Ti(\xi_1, \xi_2, \eta) &= \text{Time}(\pi(X), \xi_1, \xi_2, \eta) \\ Th(\xi_1, \xi_2, \eta) &= \text{Threat}(\pi(X), \xi_1, \xi_2, \eta) \\ Fu(\xi_1, \xi_2, \eta) &= \text{Fuel}(\pi(X), \xi_1, \xi_2, \eta) \end{aligned}$$

决策者对无人机 ISR 任务中的各个目标函数的偏好不同,相应赋予不同的权重,由此可以建立不确定随机单目标规划模型

$$\begin{cases} \min_{\pi(X) \in D} U(\pi(X), \xi_1, \xi_2, \eta) = \\ \lambda_1 Ti(\xi_1, \xi_2, \eta) + \lambda_2 Th(\xi_1, \xi_2, \eta) + \\ \lambda_3 Fu(\xi_1, \xi_2, \eta) \\ \text{s. t. } Ch \{ \text{Fu}(\xi_1, \xi_2, \eta) - 9 \leq 0 \} \geq 1 \end{cases} \quad (51)$$

式中 $\lambda_i > 0, \sum_{i=1}^3 \lambda_i = 1$ 。

目标函数之间存在复杂的耦合关系,难以同时最优化所有目标,得到最优的飞行路径,所以可以求解 Pareto 有效飞行路径。由于无人机 ISR 任务分配问题是典型的不确定随机多目标规划问题,本节将结合在上节中提出的 I-URMOP 求解方法在 P_{EV} 准则下对问题进行求解。根据 P_{EV} 准则,不确定随机单目标规划问题式 (51) 可以转化为等价确

定性规划模型如式(52)所示,即有

$$\begin{cases} \min_{\pi(X) \in D} \{E[U(\pi(X), \xi_1, \xi_2, \eta)] + \\ V[U(\pi(X), \xi_1, \xi_2, \eta)]\} = \\ \lambda_1 (E[Ti(\xi_1, \xi_2, \eta)] + V[Ti(\xi_1, \xi_2, \eta)]) + \\ \lambda_2 (E[Th(\xi_1, \xi_2, \eta)] + V[Th(\xi_1, \xi_2, \eta)]) + \\ \lambda_3 (E[Fu(\xi_1, \xi_2, \eta)] + V[Fu(\xi_1, \xi_2, \eta)]) \\ \text{s. t. } Ch\{Fu(\xi_1, \xi_2, \eta) - 9 \leq 0\} \geq 1 \end{cases} \quad (52)$$

本节构建1个带有19个任务点的不确定随机多目标无人机ISR任务分配问题。无人机执行ISR任务区域如图2所示,对无人机所有ISR任务点进行编号,无人机基地编号为1。所有任务点和无人机基地坐标如表1所示。假定无人机ISR任务分配问题中的3个变量分别服从线性不确定分布,之字形不确定分布和指数型概率分布,即 $\xi_1 \sim L(1.5, 12)$, $\xi_2 \sim Z(0.8, 1.3, 1.8)$, $\eta \sim \epsilon(0.6)$ 分别记为 $\Phi_1(x)$, $\Phi_2(x)$, $\Psi(x)$ 。

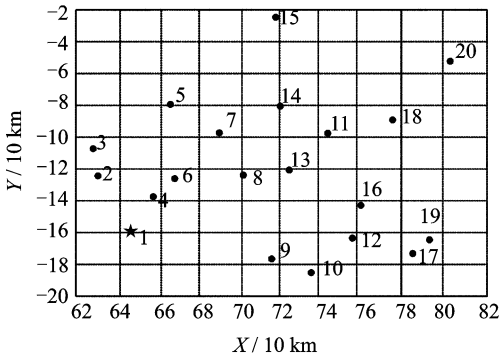


图2 无人机执行ISR任务区域示意图

Fig. 2 Schematic diagram of unmanned aerial vehicle (UAV) executing ISR mission area

变量分布的取得以 ξ_1 为例进行说明,邀请专家对敌人火力部署情况对无人机执行任务的影响进行估计可知,相关领域专家认为敌方火力部署情况对目标函数的影响程度小于12的信度为100%,认为敌方火力部署情况对目标函数的影响程度小于1.5的信度为0%,如果火力部署情况的影响在 $[1.5, 12]$ 内和专家信度的关系为线性,由此得到 ξ_1 的分布,即有

$$\Phi_1(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 1.5 \\ \frac{(x-1.5)}{(12-1.5)} & 1.5 < x \leq 12 \\ 1 & x > 12 \end{cases} \quad (53)$$

同理可得 $\xi_2 \sim Z(0.8, 0.9, 1.8)$ 。

$\eta \sim \epsilon(0.6)$ 是通过历史数据进行拟合,发现该变量基本符合指数分布的特征,根据矩估计求得相应的参数。

表1 所有ISR任务位置点的坐标

Tab. 1 Coordinates of all ISR task location points

编号	X/10 km	Y/10 km	编号	X/10 km	Y/10 km
1	64.57	15.76	11	74.32	9.67
2	63.14	12.22	12	75.89	16.35
3	62.85	10.87	13	72.50	11.89
4	65.52	13.76	14	71.94	8.03
5	66.62	7.96	15	71.71	2.67
6	66.99	12.94	16	76.32	14.32
7	69.01	9.72	17	78.69	17.32
8	70.10	12.53	18	77.56	9.05
9	71.56	17.69	19	79.21	16.56
10	73.45	18.76	20	80.30	5.60

根据不确定理论计算法则可得,相关变量可计算为: $\Phi_1^{-1}(\alpha) = 1.5 + 10.5\alpha$, $\Phi_2^{-1}(\alpha) = 0.8 + \alpha$,

$$\Psi(x) = \begin{cases} 0.6e^{-0.6x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

针对决策者对各个目标的不同认识与偏好,对该不确定随机规划模型赋予不同的权值。本节取 $\lambda_1 = 0.6$, $\lambda_2 = 0.2$, $\lambda_3 = 0.2$,考虑转化后的目标函数仍然非常复杂且局部极小点较多,因此采用改进的萤火虫算法(Firefly algorithm, FFA)进行求解,求解流程图如图3所示。算法的初始参数设置为: $\beta_0 = 1.0$, $\gamma_e = 1.0$, $\gamma_b = 0.7$, $\alpha_e = 0.2$, $\alpha_b = 1.0$, $k = 6$ 。

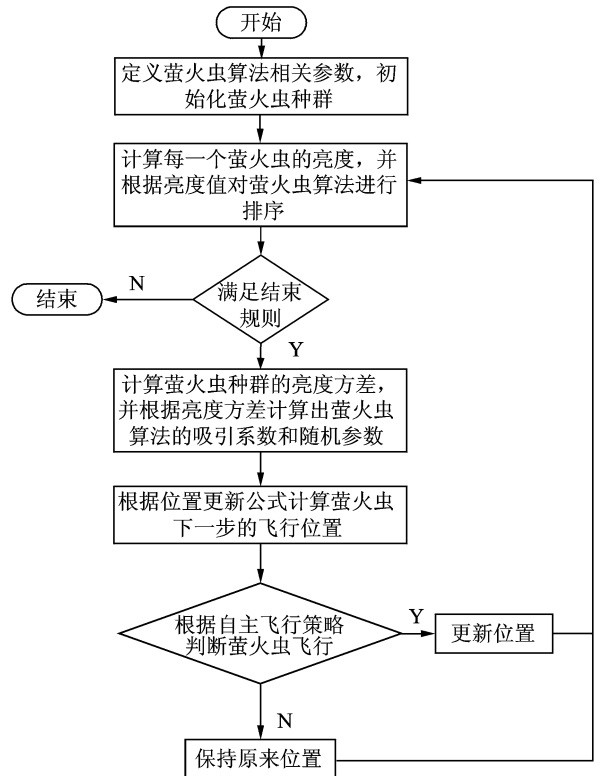


图3 改进的萤火虫算法流程图

Fig. 3 Improved flow chart of firefly algorithm

萤火虫算法的收敛速度如图 4 所示。从图中可知,大约在第 105 代时,迭代收敛,系统趋于稳定。由此可得,无人机执行 ISR 任务飞行路径,示意图如图 5 所示。 P_{EV} 准则下的有效飞行序列: $1 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 9 \rightarrow 10 \rightarrow 12 \rightarrow 17 \rightarrow 19 \rightarrow 16 \rightarrow 18 \rightarrow 20 \rightarrow 15 \rightarrow 14 \rightarrow 11 \rightarrow 13 \rightarrow 8 \rightarrow 7 \rightarrow 5 \rightarrow 3 \rightarrow 2$ 目标函数值。Time=14.856 1 h, Threat=0.364 5, Fuel=7.956 1 t。

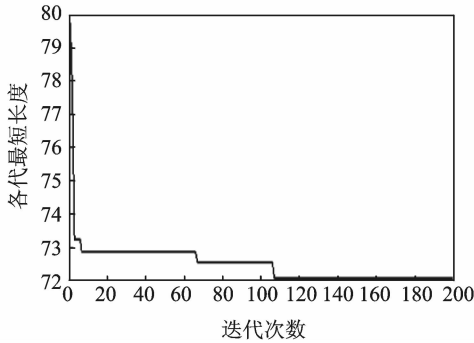


图 4 各代最短长度收敛曲线

Fig. 4 The shortest length convergence curve of each generation

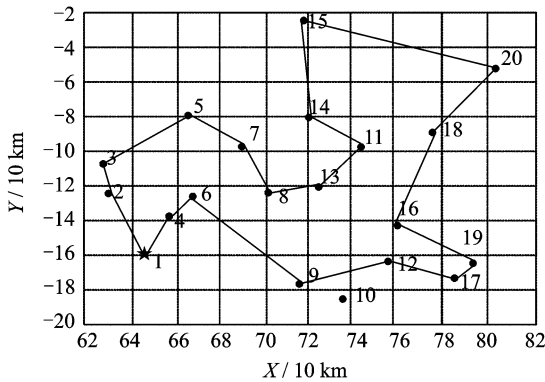


图 5 无人机执行 ISR 任务飞行路径示意图

Fig. 5 Schematic diagram of flight path for unmanned aerial vehicle to perform ISR mission

实例结果表明,本文提出的模型及求解方法可以有效解决无人机任务分配问题,为建立复杂战场环境下的无人机作战任务规划系统提供决策支持。

4 结束语

(1)传统求解方法对不确定随机多目标规划问题求解忽略了原问题的不确定随机性,特别是当各个目标函数之间存在相同的不确定随机变量时,这样的方法忽略了各个不确定随机目标之间的相关性。针对该问题,本文引入不确定随机变量,建立了不确定随机多目标规划模型。

(2)为求解 I-URMOP 问题,引入不确定随机变量间的序关系定义了 I-URMOP 问题的有效解,

基于变量间的序关系将不确定随机多目标规划问题转化为不确定随机单目标规划问题。通过引入 P_{EV} 准则将不确定随机单目标规划问题转化为确定的单目标规划问题,同时证明求解得到的最优解是原问题的有效解。

(3)为求解无人机 ISR 任务分配问题,改进的 FFA 算法,最终得到了无人机的有效飞行序列,验证了模型的有效性 & 求解的正确性。

参考文献:

- [1] MISHRA S K. Second order mixed symmetric duality in non-differentiable multi-objective mathematical programming [J]. Journal of Applied Analysis, 2007,13(1):117-132.
- [2] LI J, TANG L, SUN X, et al. Oil-importing optimal decision considering country risk with extreme events: A multi-objective programming approach[J]. Computers and Operations Research, 2014,42:108-115.
- [3] 欧建军, 张安, 钟麟. 基于多目标优化决策的飞机维护计划研究[J]. 系统工程理论与实践, 2015,35(5):1346-1350.
OU Jianjun, ZHANG An, ZHONG Lin. Maintenance scheduling of aircrafts based on multi-criteria optimization and preference programming[J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 2015, 35(5):1346-1350.
- [4] 陈春良, 陈伟龙, 陈康柱, 等. 考虑非遍历的抢修任务多目标动态调度[J]. 兵工学报, 2017,38(8):1593-1602.
CHEN Chunliang, CHEN Weilong, CHEN Kangzhu, et al. Multi-objective and dynamic scheduling of battlefield rush-repair tasks based on non-ergodicity [J]. ACTA ARMAMENTARII, 2017, 38(8):1593-1602.
- [5] LIU B. Uncertainty theory: A branch of mathematics for modeling human uncertainty[M]. Berlin Heidelberg:Springer, 2010.
- [6] LIU B. Uncertainty distribution and independence of uncertain processes[J]. Fuzzy Optimization & Decision Making, 2014,13(3):259-271.
- [7] LIU B, CHEN X. Uncertain multiobjective programming and uncertain goal programming[J]. Journal of Uncertainty Analysis & Applications, 2015, 3(1):1-8.
- [8] LIU Y. Uncertain random programming with applications[J]. Fuzzy Optimization & Decision Making, 2013,12(2):153-169.
- [9] 祁晓明, 魏瑞轩, 周凯. 面向多威胁的无人机智能目标跟随策略设计[J]. 北京航空航天大学学报, 2016,42(4):780-788.

- QI Xiaoming, WEI Ruixuan, ZHOU Kai. Intelligent target following strategy design for UAV against multi-threats[J]. Journal of Beijing University Aeronautics and Astronautics, 2016,42(4):780-788.
- [10] LIU Zhong, GAO Xiaoguang, FU Xiaowei. Coalition formation for multiple UAVs cooperative search and attack with communication constraints in Unknown Environment[J]. Transactions of Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2017, 34(6):688-699.
- [11] 周瑞,黄长强,魏政磊,等. MP-GWO 算法在多UCAV 协同航迹规划中的应用[J]. 空军工程大学学报(自然科学版),2017,18(5):24-29.
- ZHOU Rui, HUANG Changqiang, WEI Zhenglei, et al. Application of MP-GWO algorithm in multiple cooperating ucav path planning [J]. Journal of Air Force Engineering University (Natural Science Edition),2017,18(5):24-29.
- [12] KIM H, JEON B I, LEE N, et al. Development of mission analysis and design tool for ISR UAV mission planning[J]. Journal of the Korean Society for Aeronautical & Space Sciences, 2014, 42(2):181-190.
- [13] WANG Z, ZHENG M, GUO J, et al. Uncertain UAV ISR mission planning problem with multiple correlated objectives [J]. Journal of Intelligent & Fuzzy Systems, 2017,32(1):321-335.
- [14] WANG Z, GUO J, ZHENG M, et al. Uncertain multiobjective traveling salesman problem[J]. European Journal of Operational Research, 2015,241(2):478-489.
- [15] LIU B, LIU Y K, LIU Y. Expected value of fuzzy variable and fuzzy expected value models[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2002,10(4):445-450.
- [16] LIU Y, LIU B. Expected value operator of random fuzzy variable and random fuzzy expected value models[J]. International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems, 2003,11(2):195-215.
- [17] LIU Y, HA M. Expected value of function of uncertain variables [J]. Journal of Uncertain Systems, 2010,3(4):181-186.
- [18] LIU Y. Uncertain random variables: A mixture of uncertainty and randomness [J]. Soft Computing, 2013,17(4):625-634.

(编辑:刘彦东)