

DOI:10.16356/j.1005-2615.2018.04.020

## 基于时变需求的机票动态定价研究

高金敏<sup>1,2</sup> 乐美龙<sup>3</sup> 曲林迟<sup>2</sup> 朱金福<sup>3</sup>

(1. 上海工程技术大学管理学院, 上海, 201620; 2. 上海海事大学经济管理学院, 上海, 201306;  
3. 南京航空航天大学民航学院, 南京, 211106)

**摘要:** 机票定价是航空收益管理研究的一大核心和热点, 对航空公司总收益有直接影响。为研究旅客需求受价格和时间两种因素影响下的定价问题, 在基本连续动态定价模型的基础上, 考虑旅客时变需求, 研究和探讨了时变需求下动态定价模型的性质和相关定理, 并进行了详细证明。该模型与非时变需求下的动态定价模型相比, 某些性质和定理已不成立。此外, 鉴于求解连续定价模型的复杂性, 进一步探讨了价格集合为离散情况下的定价问题, 并分别针对两等级票价以及多等级票价提出了有效的价格控制策略。最后, 通过算例验证, 对比分析了时变需求与非时变需求下的定价策略的有效性, 结果表明前者能为航空公司带来更高的收益。

**关键词:** 航空运输; 收益管理; 机票定价; 时变需求; 离散价格

**中图分类号:** U8      **文献标志码:** A      **文章编号:** 1005-2615(2018)04-0570-07

## Dynamic Pricing of Air Tickets Based on Time-Varying Demand

GAO Jinmin<sup>1,2</sup>, LE Meilong<sup>3</sup>, QU Linchi<sup>2</sup>, ZHU Jinfu<sup>3</sup>

(1. School of Management, Shanghai University of Engineering Science, Shanghai, 201620, China;  
2. School of Economics and Management, Shanghai Maritime University, Shanghai, 201306, China;  
3. College of Civil Aviation, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing, 211106, China)

**Abstract:** Pricing of air tickets is the core and hotspot in the research of airline revenue management, and it affects the earnings of airlines directly. In order to study the pricing problem in the condition that passenger demand is affected by factors of price and time, theorems and properties of the continuous dynamic pricing model with considering time-varying demand are discussed based on the basic dynamic pricing model. Corresponding proofs are proposed. Some of the theorems and properties do not work compared with the model without considering time-varying demand. In addition, we further discuss the pricing problem in discrete case due to the complexity of solving the continuous dynamic pricing model. Effective pricing control strategies for two fare levels and multiple fare levels are proposed respectively. Finally, we compare the effectiveness of pricing strategies based on time-varying demand and non-time-varying demand respectively. Results show that the former can generate higher total revenue of airline.

**Key words:** air transportation; revenue management; ticket pricing; time-varying demand; discrete price

不断地提高收益水平是航空公司永远不变的追求。提高收益水平可从生产和销售两部分出发。从生产出发, 就是不断提高营运水平, 尤其是在无法按计划进行生产情况下的优化运营能力<sup>[1-2]</sup>; 从

**基金项目:** 上海海事大学博士研究生创新基金(2016ycx061)资助项目; 江苏省自然科学基金(BK20151479)资助项目; 中央高校基本科研业务费专项资金(NZ2016109)资助项目。

**收稿日期:** 2016-12-28; **修订日期:** 2017-06-16

**通信作者:** 乐美龙, 男, 教授, 博士生导师, E-mail: lemeilong@126.com。

**引用格式:** 高金敏, 乐美龙, 曲林迟, 等. 基于时变需求的机票动态定价研究[J]. 南京航空航天大学学报, 2018, 50(4): 570-576. GAO Jinmin, LE Meilong, QU Linchi, et al. Dynamic pricing of air tickets based on time-varying demand [J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2018, 50(4): 570-576.

销售出发,就是将产品的销售最优化,尤其是机票的销售最优化。本文主要研究后一种问题。航空机票是一种易逝性产品,具有生产消费的同时性特点,在飞机起飞时没有卖掉的机票残值为零。因此,航空公司面临着要在一定的时期内销售固定数量的机票,实现总收益的最大化这一问题。对于旅客来说,由于飞行目的不同,导致对航班时间、价格以及服务等的要求存在差异,因此,对产品的支付意愿就会不同。航空公司若能合理地进行市场细分,尽可能地根据每类客户的支付意愿索要价格,就能避免收益的不必要流失。实际上,航空收益管理就是从差别定价的思想出发,在合适的时间,以合适的价格将适当数量的产品卖给合适的顾客。理论上将定价问题作为收益管理的一部分进行研究是从20世纪90年代开始的。

大量关于动态定价的研究是基于市场相对垄断的情况下对单航班机票定价问题的分析和探讨,也有一部分学者将竞争因素考虑在内进行定价研究。Gallego等人<sup>[3]</sup>最早针对有限销售时间段内的易逝性产品定价问题进行了建模分析,并在需求函数为指数函数的条件下得出了最优解,在一般需求函数的条件下确定了期望收益的上界值。Gallego等人<sup>[4]</sup>研究了可以用于网络收益管理中的多品种动态定价模型。Feng等人<sup>[5]</sup>基于一般需求函数建立了两等级票价结构模型,并得出了最优定价策略。随后,Feng等人<sup>[6]</sup>在两等级票价结构模型中考虑了风险因素,并证明了模型能够得到准确的分析解。Feng等人<sup>[7]</sup>拓展了两等级票价结构模型,并且允许价格可逆向运动,在此基础上提出了连续时间下的多等级票价结构的动态定价模型。Zhao等人<sup>[8]</sup>对非齐次需求下易逝性产品的动态定价问题进行了研究,并且给出了在一定库存水平下,最优价格随时间递减的一个充分条件,证明了阈值控制的最优性。此外,有关研究成果还包括Chen等人<sup>[9]</sup>的离散时间模型,Dimitris等人<sup>[10]</sup>的应用于航空收益管理的多资源多产品的离散时间动态定价模型,以及Lin等人<sup>[11]</sup>考虑竞争因素所构建的离散时间动态定价博弈模型。

在国内,施飞等人<sup>[12]</sup>研究了随时间变化的折扣票定价问题,给出了相应的定价模型,通过模型能够得到各种折扣机票的销售时间段。周蕾等人<sup>[13]</sup>从价格控制市场需求的角度出发,建立了考虑No-Show的兼顾多航段机票定价模型。许洪等人<sup>[14]</sup>综合旅客订座累积概率分布特点,以提前座位时间天数和成本为主要变量,建立了航空公司机票定价动态模型。罗利等人<sup>[15]</sup>基于竞争的市场环境,应用随机控制和博弈两种理论,建立了基于连

续时间的两家航空公司、两个航班情况下的两级价格动态定价模型,探讨了模型求解的方法及相关性质。高金敏等人<sup>[16]</sup>基于超模博弈理论建立了机票定价与舱位控制联合决策模型。李晓花等人<sup>[17]</sup>运用随机过程理论和最大凹向包络原理探讨了动态定价与舱位控制的统一模型。罗利等人<sup>[18]</sup>应用随机控制理论,建立了基于连续时间的两个平行航班动态定价模型,并对最优策略的相关性质进行了证明,得到了最优动态定价综合策略。

以上关于收益管理中动态定价的研究成果,无论是垄断环境还是竞争环境,都没有深入研究和探讨旅客需求强度受时间影响的定价问题。本文在Gallego和Ryzin(1994)<sup>[3]</sup>连续动态定价模型研究的基础上,考虑旅客时变需求,深入分析了时变需求下的动态定价模型所具有的性质和满足的相关定理,主要包括最优期望收益和最优价格分别关于剩余机票数量和剩余销售时间的单调性质和凹凸性质等,并且进行了详细的证明。此外,针对模型的求解问题,分别针对两种票价等级和多种票价等级的情况提出了有效的离散定价策略来近似求解,通过算例进行了验证分析。

## 1 定价模型结构

假设航空公司有 $N$ 张机票,要求在有限时间段 $[0, T]$ 内销售,在这个过程中,航空公司需要采用一系列价格控制策略,通过调控旅客需求来实现收益最大化。

根据收益管理中有关定价问题研究的一般假设,设定 $s$ 时刻的价格为 $p_s$ ,对应的需求强度为 $\lambda_s = \lambda(p_s, s)$ ,并且 $\lambda(p, t)$ 是关于价格 $p$ 的严格单调减函数;收益率 $r = p\lambda(p, t)$ ,是关于价格 $p$ 的连续有界凹函数。

定义 $N_s$ 为截至 $s$ 时刻航空公司售出的机票数,若 $dN_s = 1$ ,表示有一个订座请求被接受,在不考虑取消订座的情况下,航空公司收益为 $p_s$ 。

定义价格集合: $P \subset (0, \infty)$ ,并且满足 $\lim_{p \rightarrow \infty} \lambda(p, t) = 0$ ,  $\lim_{p \rightarrow \infty} p\lambda(p, t) = 0$ ,当机票售完时, $p = \infty$ 。旅客需求密度集合为: $\Lambda = \{\lambda(p, t) : p \in P\}$ ;  $U$ 表示所有的价格策略集合,并且满足: $\int_0^t dN_s \leq n$ 。

根据上述模型符号的定义和假设可以得到,对于任一价格策略 $u \in U$ ,航空公司在周期 $t(t > 0)$ 内销售 $n(n > 0)$ 张机票所获得的最大期望收益为

$$\pi(n, t) = \sup_{u \in U} E_u \left[ \int_0^t p_s dN_s \right] \quad (1)$$

并且满足: $\pi(n, 0) = 0, \forall n, \pi(0, t) = 0, \forall t$ 。

如果设定价格为 $p(\lambda)$ ,相应的旅客需求强度为 $\lambda(p, t)$ ,那么航空公司在接下来一个极小的时

间段  $\Delta t$  内卖出一张机票的概率为  $\lambda \Delta t$ , 没有卖出机票的概率为  $1 - \lambda \Delta t$ . 根据最优性原理得到

$$\pi(n, t) = \sup_p [\lambda \Delta t (p(\lambda) + \pi(n-1, t - \Delta t)) + (1 - \lambda \Delta t) \pi(n, t - \Delta t) + o(\Delta t)] \quad (2)$$

当  $\Delta t \rightarrow 0$  时得到该问题的哈密尔顿-雅克比方程

$$\frac{\partial \pi(n, t)}{\partial t} = \sup_p [\lambda p(\lambda) - \lambda (\pi(n, t) - \pi(n-1, t))] \quad \forall n \geq 1, \forall t > 0 \quad (3)$$

边界条件为

$$\pi(n, 0) = 0, \forall n; \pi(0, t) = 0, \forall t$$

定义边际期望收益

$$\Delta \pi(n, t) = \pi(n, t) - \pi(n-1, t)$$

则式(3)可写为

$$\frac{\partial \pi(n, t)}{\partial t} = \sup_p [\lambda (p, t) (p - \Delta \pi(n, t))] \quad (4)$$

$$\forall n \geq 1, \forall t > 0$$

定义

$$Y'(p, n, t) = \lambda (p, t) (p - \Delta \pi(n, t)) \quad (5)$$

则  $Y'(p, n, t)$  是关于价格  $p$  的连续凹函数。

最优定价为

$$p'(n, t) = \arg \max_p Y'(p, n, t) \quad (6)$$

## 2 相关性质和证明

**定理 1** 最优期望收益分别关于变量  $n$  与  $t$  单调递增, 并且是  $n$  的凹函数。

最优期望收益分别关于  $n$  与  $t$  单调递增这一性质的证明可参考 Gallego, Ryzin(1994)<sup>[3]</sup>, 关于  $n$  的凹凸性质证明如下。

**证明**

采用数学归纳法证明最优期望收益是变量  $n$  的凹函数。

根据式(4)可得

$$\frac{\partial \pi(n+1, t)}{\partial t} = \lambda (p'(n+1, t), t) [p'(n+1, t) - \Delta \pi(n+1, t)] \quad (7)$$

$$\frac{\partial \pi(n, t)}{\partial t} \geq \lambda (p'(n+1, t), t) [p'(n+1, t) - \Delta \pi(n, t)] \quad (8)$$

由式(7,8)得

$$\frac{\partial \Delta \pi(n+1, t)}{\partial t} \leq -\lambda (p'(n+1, t), t) \Delta^2 \pi(n+1, t) \quad (9)$$

同样地

$$\frac{\partial \pi(n-1, t)}{\partial t} = \lambda (p'(n-1, t), t) [p'(n-1, t) - \Delta \pi(n-1, t)] \quad (10)$$

$$\frac{\partial \pi(n, t)}{\partial t} \geq \lambda (p'(n-1, t), t) [p'(n-1, t) -$$

$$\Delta \pi(n, t)] \quad (11)$$

由式(10,11)得

$$\frac{\partial \Delta \pi(n, t)}{\partial t} \geq -\lambda (p'(n-1, t), t) \Delta^2 \pi(n, t) \quad (12)$$

由式(9-12)得

$$\frac{\partial \Delta^2 \pi(n+1, t)}{\partial t} \leq -\lambda (p'(n+1, t), t) \Delta^2 \pi(n+1, t) + \lambda (p'(n-1, t), t) \Delta^2 \pi(n, t) \quad (13)$$

当  $n=1$  时, 分别根据式(9)和式(12)得

$$\frac{\partial \Delta \pi(2, t)}{\partial t} \leq -\lambda (p'(2, t), t) \Delta^2 \pi(2, t) \quad (14)$$

$$\frac{\partial \Delta \pi(1, t)}{\partial t} \geq \frac{\partial [\pi(1, t) - \pi(0, t)]}{\partial t} = \frac{\partial \pi(1, t)}{\partial t} \geq 0 \quad (15)$$

因此

$$\frac{\partial \Delta^2 \pi(2, t)}{\partial t} \leq -\lambda (p'(2, t), t) \Delta^2 \pi(2, t) \quad (16)$$

两边同乘  $\exp\left(\int_0^t [\lambda (p^s(2, s), s)] ds\right)$  得

$$\frac{\partial \Delta^2 \pi(2, t)}{\partial t} \exp\left(\int_0^t [\lambda (p^s(2, s), s)] ds\right) + \lambda (p'(2, t),$$

$$t) * \Delta^2 \pi(2, t) \exp\left(\int_0^t [\lambda (p^s(2, s), s)] ds\right) \leq 0 \quad \text{即}$$

$$\frac{\partial \left( \exp\left(\int_0^t [\lambda (p^s(2, s), s)] ds\right) \Delta^2 \pi(2, t) \right)}{\partial t} \leq 0 \quad (17)$$

所以,  $\exp\left(\int_0^t [\lambda (p^s(2, s), s)] ds\right) \Delta^2 \pi(2, t)$  是

关于  $t$  的递减函数。因此得到:  $\exp\left(\int_0^t [\lambda (p^s(2, s), s)] ds\right) \Delta^2 \pi(2, t) \leq \exp\left(\int_0^0 [\lambda (p^s(2, s), s)] ds\right) \Delta^2 \pi(2, 0) = 0$ , 进而推出:  $\Delta^2 \pi(2, t) \leq 0$ 。

所以, 当  $n=1$  时, 定理是成立的。

假设当  $n=k$  时定理成立, 即  $\Delta^2 \pi(k, t) \leq 0$ , 那么根据式(13)可以得到

$$\frac{\partial \Delta^2 \pi(k+1, t)}{\partial t} \leq -\lambda (p'(k+1, t), t) * \Delta^2 \pi(k+1, t) \quad (18)$$

利用与式(16,17)同样的分析方法得到  $\Delta^2 \pi(k+1, t) \leq 0$ , 即  $n=k+1$  时, 定理成立。

综上所述,  $\pi(n, t)$  是关于  $n$  的凹函数, 定理 1 得以证明。

**命题 1** 边际期望收益  $\Delta \pi(n, t)$  关于  $n$  单调递减, 关于  $t$  单调递增。

在旅客需求只受价格影响的动态定价模型中, 最优收益函数分别是  $n$  与  $t$  的单调递增凹函数, 并且边际期望收益  $\Delta \pi(n, t)$  关于  $n$  单调递减, 关于  $t$  单调递增。

而考虑时变需求时, 最优收益函数仍然是  $n$  的

凹函数,所以,边际期望收益关于  $n$  的递减性质依旧成立。根据式(12)得  $\frac{\partial \Delta \pi(n, t)}{\partial t} \geq -\lambda(p^i(n-1, t), t) \Delta^2 \pi(n, t) \geq 0$ , 所以边际期望关于  $t$  单调递增的性质仍然成立。

**命题2** 最优收益关于  $t$  的凹凸性取决于时间对需求强度的影响。

**证明**

对任意  $t < t', t, t' \in [0, T]$ , 根据式(4)可得

$$\frac{\partial \pi(n, t')}{\partial t'} = \sup_p [\lambda(p, t')(p - \Delta \pi(n, t'))] \geq \lambda(p^i(n, t), t')(p^i(n, t) - \Delta \pi(n, t')) \quad (19)$$

$$\frac{\partial \pi(n, t)}{\partial t} = \lambda(p^i(n, t), t)(p^i(n, t) - \Delta \pi(n, t)) \quad (20)$$

由式(19, 20)得

$$\frac{\partial \pi(n, t')}{\partial t'} - \frac{\partial \pi(n, t)}{\partial t} \geq \lambda(p^i(n, t), t')[p^i(n, t) - \Delta \pi(n, t')] - \lambda(p^i(n, t), t)[p^i(n, t) - \Delta \pi(n, t)] \quad (21)$$

只有式(21)右边项大于等于0, 即  $\frac{\lambda(p^i(n, t), t')}{\lambda(p^i(n, t), t)} \geq \frac{p^i(n, t) - \Delta(n, t)}{p^i(n, t) - \Delta(n, t')}$  时, 最优收益函数才是关于  $t$  的凹函数。若  $\lambda(p, t) = \lambda(p)F(t)$ , 则需要满足

$$\frac{F(t')}{F(t)} \geq \frac{p^i(n, t) - \Delta(n, t)}{p^i(n, t) - \Delta(n, t')} \quad (22)$$

因此, 在考虑时变需求的情况下, 最优收益是  $t$  的凹函数这一性质已不成立。

**定理2** 最优价格  $p^i(n, t)$  关于  $n$  单调递减, 关于  $t$  单调递增的性质已不成立。

在旅客需求只受价格影响的动态定价模型中, 最优价格关于  $n$  单调递减, 关于  $t$  单调递增。考虑旅客时变需求时, 最优价格  $p^i(n, t)$  关于  $n$  单调递减的证明如下。

**证明(1)**

已知  $\lambda(p, t)$  是关于  $p$  的减函数, 以及最优收益是关于  $n$  的凹函数, 那么对于任意价格  $p > p^i(n, t)$ , 能够得到

$$\begin{aligned} Y^i(p^i(n, t), n+1, t) + Y^i(p, n, t) - Y^i(p, n+1, t) - Y^i(p^i(n, t), n, t) &= Y^i(p^i(n, t), n+1, t) - Y^i(p^i(n, t), n, t) + Y^i(p, n, t) - Y^i(p, n+1, t) = \\ &= -\lambda(p^i(n, t), t) \Delta^2 \pi(n+1, t) + \lambda(p, t) \Delta^2 \pi(n+1, t) = \\ &= -(\lambda(p(n, t), t) - \lambda(p, t)) \Delta^2 \pi(n+1, t) \geq 0 \end{aligned} \quad (23)$$

因此

$$Y^i(p^i(n, t), n+1, t) - Y^i(p, n+1, t) \geq Y^i(p^i(n, t), n, t) - Y^i(p, n, t) \quad (24)$$

根据  $p^i(n, t)$  的定义得式(24)不等式右边大于

0, 所以:  $Y^i(p^i(n, t), n+1, t) - Y^i(p, n+1, t) \geq 0$ 。再根据  $p^i(n+1, t)$  的定义得:  $p^i(n+1, t) \leq p^i(n, t)$ 。所以最优价格关于  $n$  单调递减。

接下来具体证明最优价格关于  $t$  的单调性。

**证明(2)**

根据式(5), 若最优价格  $p^i(n, t)$  关于  $t$  单调递增, 那么, 对任一  $s < t$ ,  $p < p^s(n, s)$ , 须满足:  $Y^i(p^s(n, s), n, t) > Y^i(p, n, t)$ 。

根据  $p^s(n, s)$  的定义  $Y^s(p, n, s) < Y^s(p^s(n, s), n, s)$ , 通过化简得到

$$\Delta \pi(n, s) \geq \frac{\lambda(p, s)p - \lambda(p^s(n, s), s)p^s(n, s)}{\lambda(p, s) - \lambda(p^s(n, s), s)} \quad (25)$$

由于边际期望收益  $\Delta \pi(n, t)$  是关于  $t$  的增函数, 因此  $\Delta \pi(n, t) \geq \Delta \pi(n, s)$ 。只有当  $\frac{\lambda(p, t)p - \lambda(p^s(n, s), t)p^s(n, s)}{\lambda(p, t) - \lambda(p^s(n, s), t)}$  关于  $t$  递减时, 才能得到

$$\begin{aligned} \Delta \pi(n, t) \geq \Delta \pi(n, s) > \\ \frac{\lambda(p, s)p - \lambda(p^s(n, s), s)p^s(n, s)}{\lambda(p, s) - \lambda(p^s(n, s), s)} &\geq \\ \frac{\lambda(p, t)p - \lambda(p^s(n, s), t)p^s(n, s)}{\lambda(p, t) - \lambda(p^s(n, s), t)} \end{aligned} \quad (26)$$

即

$$\Delta \pi(n, t) \geq \frac{\lambda(p, t)p - \lambda(p^s(n, s), t)p^s(n, s)}{\lambda(p, t) - \lambda(p^s(n, s), t)} \quad (27)$$

因此得到:  $Y^i(p(n, s), n, t) > Y^i(p, n, t)$ , 进而推出  $p^i(n, t) \geq p^s(n, s)$ 。所以, 最优价格关于  $t$  单调递增的性质已不成立, 但根据以上证明可以得出:  $\frac{\lambda(p, t)p - \lambda(p^s(n, s), t)p^s(n, s)}{\lambda(p, t) - \lambda(p^s(n, s), t)}$  关于  $t$  递减是最优价格  $p^i(n, t)$  关于  $t$  单调递增的一个充分条件。

综合以上分析, 定理2得以证明。

## 3 离散定价机制

### 3.1 非时变需求下的离散定价

上述所讨论的基于连续时间的完全差别定价模型, 在实际应用时需要对接票销售情况进行实时监控, 不断进行动态调整, 所以会大大增加管理成本, 并且价格的不断波动会使顾客产生“不公平感”, 降低顾客满意度。因此, 根据以上分析的动态定价模型所具有的性质特点, 考虑实施有效的定价机制, 即离散定价机制, 既能保证航空公司总的收益水平, 降低管理成本, 又能更好地应对旅客需求的波动。

本节考虑机票价格集合为离散集合的情况, 假设航空公司在机票预售期  $[0, T]$  以内以  $K$  种不同的价格销售  $N$  张机票, 可行价格集合为  $P = \{p_1, p_2,$

$\dots, p_K\}$ , 其中  $p_1 < p_2 < \dots < p_K$ 。

定义  $\lambda_k$  为票价  $p_k$  对应的需求强度, 满足  $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_K$ ;  $r_k = p_k \lambda_k$  为票价  $p_k$  所对应的收益率, 满足  $r_1 > r_2 > \dots > r_K$ 。

**定理 3** 在价格集合  $P$  为离散的情况下, 对于任一状态  $(n, t)$ , 存在一个序列  $z^0(n) = 0 \leq z^1(n) \leq \dots \leq z^K(n) = \infty$ , 当  $z^{k-1}(n) < t < z^k(n)$  时, 最优价格为  $p_k$ 。此外,  $z^k(n)$  关于变量  $n$  单调递增。

**证明**

定义  $z^k(n) = \sup\{t: p(n, t) \leq p_k\}$  ( $k=1, 2, \dots, K-1$ ), 并且  $z^0(n) = 0, z^K(n) = \infty$ 。由于最优价格  $p(n, t)$  关于  $t$  单调递增, 所以  $z^k(n)$  关于  $k$  单调递增。当  $z^{k-1}(n) < t < z^k(n)$  时, 最优价格  $p(n, t) = p_k$ 。此外, 由于最优价格  $p(n, t)$  关于  $n$  单调递减, 根据  $z^k(n)$  的定义可得  $z^k(n)$  关于  $n$  单调递增。

### 3.2 时变需求下的离散定价

对于时变需求下的离散定价问题, 当最优价格关于  $t$  单调递增时, 定理 3 的性质才成立。

在考虑时变需求时, 旅客订票过程有两个特点: 首先, 旅客总需求是不确定的; 其次, 各票价等级的旅客到达强度是不同的, 并且随时间不断变化。基于这两个特点, 定义旅客需求强度为

$$\lambda(p, s) = \lambda(p) f(s) \quad (28)$$

式中:  $s$  表示已售票时间,  $f(s)$  表示一个连续凹函数。那么, 旅客到达便为一个非时齐泊松过程, 这也是航空收益管理中对旅客到达最常用的一种模拟方式。本文定义  $f(s)$  为高斯分布, 其分布函数为连续凹函数, 在机票销售中期附近达到顶峰, 符合实际旅客订票的一般规律。

定义:  $u = F(s) = \int_0^s f(z) dz, 0 \leq s \leq t$ , 并且对于任一  $s' < s$ , 令  $u' = F(s'), u = F(s)$ , 那么可以得到

$$\int_{s'}^s \lambda(p, z) dz = \lambda(p) \int_{s'}^s f(z) dz = \lambda(p) [F(s) - F(s')] = \lambda(p) (u - u') = \int_{u'}^u \lambda(p) dv \quad (29)$$

此时, 旅客到达便转化为时齐泊松分布的情况。

## 4 模型求解和算例分析

### 4.1 确定性求解方法

为求解所建立的连续时间动态定价模型, 本文采用确定性的离散定价方法来近似求解, 首先将动态定价模型转化为确定性模型。对于一定的机票数量  $x$ , 在销售期  $[0, t]$  内获得的最大期望收益为

$$\pi^D(n, t) = \max_{\lambda(p_s, s)} \int_0^t r(\lambda(p_s, s)) ds \quad (30)$$

$$\forall \int_0^t \lambda(p_s, s) ds \leq x, \lambda(p_s, s) \in \Lambda$$

根据连续性定价问题的描述, 针对离散定价情况, 定义

$$\lambda_0 = \infty, \lambda_K = 0, r_0 = r_K = 0 \quad (31)$$

### (1) 两等级票价定价策略

根据 Gallego 和 Ryzin(1994) 的研究<sup>[3]</sup>, 对确定性定价模型求解所得的收益结果, 是实际所得收益的上限, 研究同时提出了一种近似最优的两等级票价定价机制。本文在该研究的基础上, 通过考虑旅客组合需求均值, 将两等级票价定价策略扩展到多等级票价的情况。

定义  $t_k$  为定价  $p_k$  的时间段, 那么

$$t_k = \int_0^t Pr(p_s = p_k) ds \quad k=1, 2, \dots, K \quad (32)$$

如果在时刻  $s$  定价为  $p_k$ , 那么  $Pr(p_s = p_k) = 1$ , 反之为 0。此时, 离散定价模型为一个线性规划模型。

对于任一状态  $(n, t)$ , 若  $k^*$  满足  $\lambda_{k^*+1} t < n \leq \lambda_{k^*} t$ , 那么两等级票价的定价策略为

$$\forall j \notin \{k^*, k^*+1\}, t_j = 0 \quad (33)$$

$$t_{k^*} = \frac{n - \lambda_{k^*+1} t}{\lambda_{k^*} - \lambda_{k^*+1}}, t_{k^*+1} = \frac{\lambda_{k^*} t - n}{\lambda_{k^*} - \lambda_{k^*+1}} \quad (34)$$

当  $k^* = 0$  时,  $t_k = 0, t_{k+1} = t$ ; 当  $k^* = K$  时,  $t_k = \frac{n}{\lambda_K}, t_{k+1} = 0$ 。

同样地, 得到时变需求下的两票价等级定价策略: 对于任一状态  $(n, t)$ , 若  $k^*$  满足  $\lambda_{k^*+1} F(t) < n \leq \lambda_{k^*} F(t)$ , 那么定价为  $p_{k^*}$  和  $p_{k^*+1}$  的时间满足式(35), 通过求反函数得到具体的定价时间段。

$$u_{k^*} = \frac{n - \lambda_{k^*+1} F(t)}{\lambda_{k^*} - \lambda_{k^*+1}}, u_{k^*+1} = \frac{\lambda_{k^*} F(t) - n}{\lambda_{k^*} - \lambda_{k^*+1}} \quad (35)$$

$$t_{k^*} = \arg F(u_{k^*}), t_{k^*+1} = \arg F(u_{k^*+1}) \quad (36)$$

由式(35—36)可以看到, 在航班容量和旅客总需求均值一定时, 若考虑时变需求, 那么各票价的定价时间完全取决于旅客到达模式分布, 若旅客到达模式发生改变, 定价时间也会相应地改变。

### (2) 多等级票价定价策略

实际机票销售时, 两种机票定价远远不能满足旅客的实际需求, 因此, 要结合不同的订座限制制定多种票价。令定价为  $p_k$  的时间段为

$$t_k = \frac{\lambda_{k-1}^- t_k^- - n_k^-}{\lambda_{k-1}^- - \lambda_k^-} \quad (37)$$

式中:  $t_k^-$  表示剩余给票价等级  $\{1, 2, \dots, k\}$  的销售时间段;  $n_k^-$  为相应的机票数量, 并且  $t_{k-1}^- = t_k^- - t_k$ ,  $n_{k-1}^- = n_k^- - \lambda_k t_k$ ;  $\lambda_k^-$  为票价等级  $\{1, 2, \dots, k\}$  的旅客需求均值, 并且  $\lambda_k^- = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \lambda_j$ 。初始的机票数量和销售时间段分别为:  $n_K^- = n, t_K^- = t$ 。

这样,航空公司就能以  $k(k \geq 2)$  种票价等级进行机票销售。但是前提是航空公司要通过价格大小的调整,使得  $\lambda_k t_k^- < n_k^- \leq \lambda_{k-1} t_k^-$  成立。

考虑时变需求下的多等级票价定价策略,令定价为  $p_k$  的时间段满足

$$u_k = \frac{\lambda_{k-1} F(t_k^-) - n_k^-}{\lambda_{k-1} - \lambda_k} \quad (38)$$

$$t_k = \arg F(u_k) \quad (39)$$

式中:  $n_{k-1}^- = n_k^- - \lambda_k u_k$ ,  $t_{k-1}^- = t_k^- - t_k$ 。只要满足条件  $\lambda_k F(t_k^-) < n_k^- \leq \lambda_{k-1} F(t_k^-)$ , 该定价策略就有效。

### 4.2 算例分析

假设航空公司有  $n=300$  张机票在时间段  $[0, 360]$  内销售,各票价等级的价格和相应的需求强度如表 1,2 中所示。考虑旅客时变需求时,假设旅客到达模式分布参数为  $(180, 20)$ , 总需求均值为 360。

表 1 两种等级票价下的策略结果对比

Tab. 1 Comparison of strategy results under two fare classes

机票价格	$p_1=400$	$p_1=1\ 000$
需求强度	1.3	0.2
非时变定价策略票价转折点	207.3	360
时变定价策略票价转折点	183.8	360

表 2 多种票价等级下的策略结果对比

Tab. 2 Comparison of strategy results under multiple fare classes

机票价格	$p_1=400$	$p_2=600$	$p_3=800$	$p_4=1\ 000$
需求强度	1.3	0.8	0.5	0.2
非时变定价策略 票价转折点	114.5	228.9	340.3	360
时变定价策略 票价转折点	170.5	186.9	212	360

表 1,2 中的结果显示,对于只包含 2 种票价等级的情况,若不考虑旅客时变需求,航空公司应该在时间段  $[0, 207.3]$  内以价格  $p=400$  进行售票,在时间段  $(207.3, 360]$  内以价格  $p=1\ 000$  进行售票。若考虑旅客时变需求,航空公司应该在时间段  $[0, 183.8]$  内以价格  $p=400$  进行售票,在时间段  $(183.8, 360]$  内以价格  $p=1\ 000$  进行售票。

对于包含多种票价等级的情况,若不考虑旅客时变需求得到:航空公司应在时间段  $[0, 114.5]$  内以价格  $p=400$  进行售票,在时间段  $(114.5, 228.9]$  内以价格  $p=600$  进行售票,在时间段  $(228.9, 340.3]$  内以价格  $p=800$  进行售票,在时间段  $(340.3, 360]$  内以价格  $p=1\ 000$  进行售票。若考虑旅客时变需求得到:航空公司应在时间段  $[0, 170.5]$  内以价格  $p=400$  进行售票,在时间段  $(170.5, 186.9]$  内以价格  $p=600$  进行售票,在时

间段  $(186.9, 212]$  内以价格  $p=800$  进行售票,在时间段  $(212, 360]$  内以价格  $p=1\ 000$  进行售票。因此,考虑时间因素对旅客需求强度的影响时,定价策略会发生很大的改变。

为进一步验证时变需求下动态定价模型的有效性,结合现实中机票的销售情况,假设某航班的全价票价格为  $p=1\ 000$ , 在销售过程中可根据实际情况有选择的进行打折销售。全价票、9 折、8 折、7 折、6 折、5 折、4 折机票所对应的旅客需求强度为  $(0.2, 0.3, 0.42, 0.5, 0.64, 0.82, 2.8)$ 。图 1 中显示了 6 种情景下时变需求定价策略与非时变需求定价策略所能得到的总收益水平。横坐标中情景 1 对应只有一种折扣的情况,即机票只有全价票和 3 折机票;情景 2 对应的有全价票、6 折和 3 折机票;情景 3 对应的有全价票、9 折、6 折和 3 折机票;情景 4 对应的有全价票、9 折、6 折、4 折和 3 折机票;情景 5 对应的有全价票、9 折、7 折、6 折、4 折和 3 折机票;情景 6 对应的有全价票、9 折、7 折、6 折、5 折、4 折和 3 折机票。

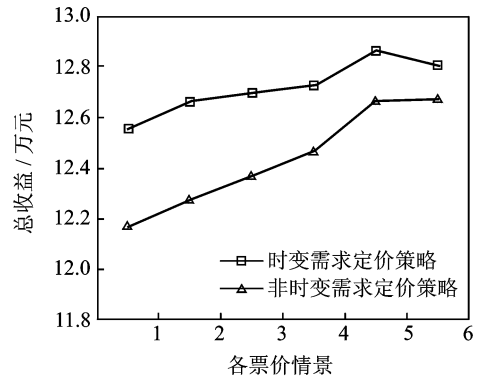


图 1 两种定价策略下总收益结果

Fig. 1 Revenue results of two pricing strategies

通过图 1 可以看到,采用时变需求定价策略所得到的总收益要远高于非时变需求定价策略所得到的总收益,并且随着折扣数量的增加,即票价等级数量的增加,总收益也在不断提高。

## 5 结 论

本文在连续动态定价模型基础上,考虑旅客时变需求,研究和分析了时变需求下动态定价模型所具有的性质和满足的相关定理,并进行了相应的证明。结果表明:在动态定价模型中考虑旅客时变需求时,最优期望收益关于剩余机票数量和剩余销售时间的单调递增性质没有变化,并且仍旧是剩余机票数量的凹函数,而关于剩余时间的凹凸性性质已不成立。最优票价关于剩余机票数量的单调递减性质没有变化,关于剩余时间的单调递增性质已不成立。期望边际收益关于剩余机票数量的递减性

质和剩余销售时间的递增性质仍然成立。

此外,考虑到实施完全差别动态定价模型的成本问题,根据所分析的定价模型的性质特点,提出了现实有效的离散定价机制。分别针对两等级票价和多等级票价提出了相应的定价策略,通过算例验证和对比分析了时变需求与非时变需求下的定价策略的有效性,结果表明时变需求下的定价策略能带来更高的收益。

将来本研究可以拓展为考虑旅客取消行为,从而实施超售的情况,也可以考虑与舱位控制问题进行联合研究。

#### 参考文献:

- [1] 乐美龙,马彬. 航班运控中飞机和机组快速整合优化恢复[J]. 南京航空航天大学学报, 2015,47(4):487-496.  
LE Meilong, MA Bin. Aircraft and crew integrated fast optimal recovery in airline operation and control [J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2015,47(4):487-496.
- [2] 张海峰,胡明华. 航空公司短期航班计划编排模型及算法[J]. 南京航空航天大学学报, 2015,47(4):553-558.  
ZHANG Haifeng, HU Minghua. Planning model and algorithm for short-term flight scheduling of airlines[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2015,47(4):553-558.
- [3] GALLEGO G, RYZIN G V. Optimal dynamic pricing of inventories with stochastic demand over finite horizons [J]. Management Science, 1994,40(8):999-1020.
- [4] GALLEGO G, RYZIN G V. Multi-product dynamic pricing problem and its application to network yield management[J]. Operations Research, 1997,45(1):24-41.
- [5] FENG Y, GALLEGO G. Optimal stopping times for end of season sales and optimal stopping times for promotional fares[J]. Management Science, 1995,41(8):1371-1391.
- [6] FENG Y, XIAO B C. Maximizing revenue of perishable assets with a risk analysis [J]. INFORMS, 1999,47(2):337-341.
- [7] FENG Y, XIAO B C. Optimal policies of yield management with multiple predetermined prices [J]. Operations Research, 2000,48(2):332-343.
- [8] ZHAO W, ZHENG Y S. Optimal dynamic pricing for perishable assets with non-homogeneous demand [J]. Management Science, 2000,46(3):375-388.
- [9] CHEN S X, LIN B, LI M Z F, et al. The optimal seat allocation for the two-flight problem with a flexible demand segment[J]. European Journal of Operational Research, 2010,201(3):897-908.
- [10] DIMITRIS B, SANNE D B. Dynamics pricing and inventory control for multiple products[J]. Journal of Revenue and Pricing Management, 2005,3(4):303-319.
- [11] LIN Y, SIBDARI S. Dynamic price competition with discrete customer choices [J]. European Journal of Operational Research, 2009,197(3):969-980.
- [12] 施飞,陈森发. 随时间变化的机票折扣定价研究[J]. 交通运输系统工程与信息, 2010,10(1):112-116.  
SHI Fei, CHEN Senfa. Air ticket discount pricing based on time varying[J]. Journal of Transportation Systems Engineering and Information Technology, 2010,10(1):112-116.
- [13] 周蔷,刘长有. 考虑 No-Show 的多航段航空机票定价模型[J]. 交通运输系统工程与信息, 2014,14(4):201-208.  
ZHOU Qiang, LIU Changyou. Air ticket pricing model of multi-leg airline considering no-show [J]. Journal of Transportation Systems Engineering and Information Technology, 2014,14(4):201-208.
- [14] 许洪,胡运权,李军. 航空公司定价动态模型与座位配置研究[J]. 系统工程理论与实践, 2004,24(12):44-48.  
XU Hong, HU Yunquan, LI Jun. Study on airline pricing and seat allocation [J]. Systems Engineering—Theory & Practice, 2004,24(12):44-48.
- [15] 罗利,彭际华. 竞争环境下的民航客运收益管理动态定价模型[J]. 系统工程理论与实践, 2007,27(11):15-25.  
LUO Li, PENG Jihua. A dynamic pricing model for airline revenue management with competition [J]. Systems Engineering—Theory & Practice, 2007,27(11):15-25.
- [16] 高金敏,乐美龙,曲林迟. 基于超模博弈的定价与舱位控制联合决策研究[J]. 交通运输系统工程与信息, 2015,15(6):1-7.  
GAO Jinmin, LE Meilong, QU Linchi. The joint decision making research of pricing and seat inventory control based on supermodel game [J]. Journal of Transportation Systems Engineering and Information Technology, 2015,15(6):1-7.
- [17] 李晓花,萧柏春. 航空公司收入管理价格与舱位控制的统一分析[J]. 管理科学学报, 2004,7(6):63-69.  
LI Xiaohua, XIAO Baichun. Comprehensive analysis of pricing and seat inventory control in airline revenue management [J]. Journal of Management Sciences in China, 2004,7(6):63-69.
- [18] 罗利,萧柏春. 航空客运平行航班动态定价模型[J]. 中国管理科学, 2012,20(3):104-111.  
LUO Li, XIAO Baichun. The dynamic pricing model for airline parallel flights [J]. Chinese Journal of Management Science, 2012,20(3):104-111.