

DOI:10.16356/j.1005-2615.2018.01.019

# 考虑界面滑移与剪切变形的钢-混凝土组合梁解析方法

黄 侨 李文贤 汪 炳

(东南大学交通学院, 南京, 210096)

**摘要:**为求解钢-混凝土组合梁在界面滑移与剪切变形双重影响下的变形与应力,本文引入 Timoshenko 梁双广义位移假定,建立了钢-混凝土简支组合梁弹性状态下的计算模型,并以跨中作用集中荷载为例,得到其全梁挠度与截面应力的解析解。同时对 4 根不同抗剪连接程度的钢-混凝土组合梁试验结果进行分析,与解析计算结果进行对比验证,并讨论了界面剪切刚度的取值对组合梁挠度的影响。结果表明理论计算所得挠度、应力均与试验值吻合良好;界面滑移将增大组合梁挠度,界面剪切刚度对这种增大效应具有重要影响;在计算组合梁挠度时,忽略剪切变形在一定程度上不安全。

**关键词:**钢-混凝土组合梁;滑移效应;剪切变形;解析计算;界面剪切刚度

**中图分类号:**U448.21 **文献标志码:**A **文章编号:**1005-2615(2018)01-0131-07

## Analytical Method of Steel-Concrete Composite Beam Based on Interface Slip and Shear Deformation

HUANG Qiao, LI Wenxian, WANG Bing

(School of Transportation, Southeast University, Nanjing, 210096, China)

**Abstract:** To solve the deformation and stress of the steel-concrete composite beam under the impact of interface slip and shear deformation, Timoshenko beam assumption is introduced to establish theoretical calculating model of simple steel-concrete composite beam in elastic state, which leads to the analytical solutions of deflection and section stress under mid-span concentrated load. By analyzing the test results of four simple composite beams with different connection degrees and comparing it with theoretical results, the value and the influence on deflection of interfacial shear stiffness are discussed. Results show that (1) theoretical results and experimental data are in good agreement; (2) the interface slip increases deflection, and the interfacial shear stiffness has an obvious influence on it; (3) neglecting shear deformation is unsafe to some extent when calculating the deflection of the composite beam.

**Key words:** steel-concrete composite beams; slip effect; shear deformation; analytical calculation; interfacial shear stiffness

钢-混凝土组合梁通过抗剪连接件将混凝土翼板和钢梁相连接,充分利用了这两种材料各自的优点,具有承载力高、刚度大和抗震性能好等特性,现已广泛应用于工程结构<sup>[1]</sup>。然而,抗剪连接件并不能使钢梁和混凝土完全成为一个整体,组合梁在承载弯曲过程中将发生界面滑移。这种滑移将降低

钢梁与混凝土间的组合效应,使组合梁在荷载作用下的变形增大,截面的抗弯承载力降低<sup>[2]</sup>。针对滑移对组合梁刚度和应力的影响,国内外学者提出了许多模型与方法进行计算推导。Girhammar 等<sup>[3]</sup>建立了微分控制方程,得到了两端简支组合梁挠度的弹性力学解析解。Wang<sup>[4]</sup>提出根据抗剪连接件

**基金项目:**国家自然科学基金(51278119)资助项目。

**收稿日期:**2017-08-12;**修订日期:**2017-12-09

**通信作者:**黄侨,男,教授,博士生导师,E-mail:qhuanghit@126.com。

**引用格式:**黄侨,李文贤,汪炳.考虑界面滑移与剪切变形的钢-混凝土组合梁解析方法[J].南京航空航天大学学报,2018,50(1):131-137. HUANG Qiao, LI Wenxian, WANG Bing. Analytical method of steel-concrete composite beam based on interface slip and shear deformation[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2018, 50(1):131-137.

的刚度来计算部分抗剪连接组合梁的最大挠度,并得到各种边界条件下的挠度计算公式。聂建国等<sup>[5-6]</sup>在建立相对滑移微分方程的基础上,对滑移引起的附加变形进行了分析,并由此定义了刚度折减系数,部分成果已纳入中国规范<sup>[7]</sup>。余志武等<sup>[8]</sup>采用 Goodman 的弹性夹层假设,建立了滑移和挠度相耦合的微分方程组。周东华等<sup>[9]</sup>提出了有效刚度法,对不同位置连接件的抗剪刚度根据发挥作用的大小进行折减。苗林等<sup>[10]</sup>利用最小势能原理与变分法,从能量的角度对考虑滑移的组合梁变形进行了推导。

以上文献均只考虑了滑移效应对组合梁受力的影响,当组合梁的高跨比较大时,剪切变形将不可忽略。因此有必要在计算中对界面滑移与剪切变形两种效应予以综合考虑。现有同时考虑滑移效应与剪切变形影响的算法中,李嵩林<sup>[11]</sup>将界面滑移与剪切变形的影响分别考虑为两项折减系数,叠加计算组合梁刚度。而 Schnabl S<sup>[12]</sup>采用矩阵位移形式。徐荣桥<sup>[13]</sup>、周凌宇<sup>[14]</sup>和孙飞飞<sup>[15]</sup>等分别基于最小势能原理和虚功原理的推导,其计算形式较为复杂,不便于工程应用。本文在 Timoshenko 梁假定的基础上,通过单元微段力学平衡与物理几何关系,推导建立了钢-混凝土简支组合梁计算模型,得到了跨中集中荷载下挠度与应力的解析解,概念清晰明确。同时讨论界面剪切刚度对挠度增大效应的影响,并对比具体试验数据与既有解析理论计算结果,验证了推导的正确性。

## 1 滑移及变形理论计算公式

### 1.1 基本假定

为简化分析,现作如下假定:

(1) 仅考虑正常使用状态,钢-混凝土组合梁处于弹性工作阶段,钢与混凝土均为均质弹性体。

(2) 钢梁与混凝土板在受力弯曲后,截面仍各自保持为平面。且钢梁与混凝土板具有相同的曲率与挠度,即不考虑组合梁掀起现象。

(3) 将抗剪连接件等效为均匀连续的弹性介质,单位长度的界面剪力与其位置处的相对滑移量成正比。

### 1.2 微分方程

将混凝土板按材料弹性模量之比折减宽度,换算为等高度的钢截面,即对组合梁上下层材料均有  $E=Es, G=G_s$ 。以组合梁左支座截面中性轴处为原点建立如图 1 坐标系,并分别用下标  $i=1,2$  表示上层换算后的混凝土板与下层钢梁。

Timoshenko 的梁理论认为梁承受荷载后,截面并非与梁轴线垂直,即引入截面转角  $\varphi$  作为独立

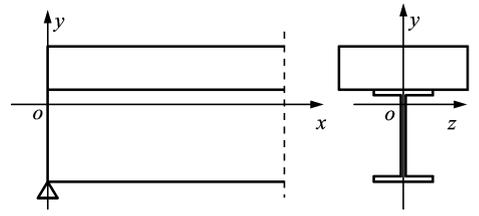


图 1 计算坐标系

Fig. 1 Calculated coordinate system

于挠度  $w$  之外的第 2 项广义位移,而不再由挠度的导数确定。此时,梁内任意一点的轴向位移与竖向位移可分别表示为

$$u = u_i(x) + y\varphi(x); \quad w = w(x) \quad (1)$$

式中  $u_i(x)$  为上下层梁截面质心处的轴向位移。

仅考虑梁截面的法向正应变与  $xoy$  平面内的切应变,二者表达式为

$$\epsilon_x = \frac{du_i}{dx} + y \frac{d\varphi}{dx}; \quad \gamma_{xy} = \frac{dw}{dx} + \varphi \quad (2)$$

根据线弹性假定,法向正应力为

$$\sigma_x = E \left( \frac{du_i}{dx} + y \frac{d\varphi}{dx} \right) \quad (3)$$

则上下层梁所分别承担的轴力与弯矩为

$$F_1 = F_2 = \int_{A_i} \sigma_x dA = EA_i \left( \frac{du_i}{dx} \pm c_i \frac{d\varphi}{dx} \right) \quad (4)$$

$$M_1 = M_2 = \int_{A_i} y \sigma_x dA = \pm c_i EA_i \frac{du_i}{dx} + EI_i \frac{d\varphi}{dx} \quad (5)$$

式中  $c_i$  为上下层梁截面质心到换算截面中性轴间的距离,  $I_i = \int_{A_i} y^2 dA$ 。

组合梁整个截面所承担的轴力与弯矩为

$$F = F_1 + F_2 = EA_1 \frac{du_1}{dx} + EA_2 \frac{du_2}{dx} \quad (6)$$

$$M = M_1 + M_2 = c_1 EA_1 \frac{du_1}{dx} - c_2 EA_2 \frac{du_2}{dx} + EI_0 \frac{d\varphi}{dx} \quad (7)$$

式中  $I_0 = I_1 + I_2$  为换算截面惯性矩,其本质是将混凝土与钢梁视为完全连接时所得的惯性矩。

组合梁滑移为

$$s(x) = u_1(x) - u_2(x) \quad (8)$$

由轴力方向平衡条件,有  $F=0$ ,滑移应变以各自截面面积反比例分配<sup>[14]</sup>,故有

$$\frac{du_1}{dx} = \frac{A_2}{A_1 + A_2} \frac{ds}{dx} = \frac{c_1}{c} \frac{ds}{dx} \quad (9)$$

$$\frac{du_2}{dx} = \frac{-A_1}{A_1 + A_2} \frac{ds}{dx} = -\frac{c_2}{c} \frac{ds}{dx} \quad (10)$$

式中  $c = c_1 + c_2$ ,为上下层梁截面质心间距离。将式(10)代入式(6,7),可得

$$F_1 = -F_2 = EA_0 \left( \frac{ds}{dx} + c \frac{d\varphi}{dx} \right) \quad (11)$$

$$M = cEA_0 \frac{ds}{dx} + EI_0 \frac{d\varphi}{dx} = cF_1 + EI_b \frac{d\varphi}{dx} \quad (12)$$

式中:  $A_0 = \frac{A_1 A_2}{A_1 + A_2}$ ,  $I_b = I_0 - c^2 A_0$ 。

现取梁微段进行受力分析,首先根据水平方向受力平衡与式(3)有

$$\frac{dF_1}{dx} = q_u(x) = k_s s(x) \quad (13)$$

式中:  $q_u(x)$  为单位长度界面剪力;  $k_s$  为界面剪切刚度,其大小与连接件类型、数量和布置等有关。

将式(13)求导并将  $\frac{ds}{dx}$  代入式(11)可得

$$F_1 = EA_0 \left( \frac{1}{k_s} \frac{d^2 F_1}{dx^2} + c \frac{d\varphi}{dx} \right) \quad (14)$$

将式(14)  $\frac{d\varphi}{dx}$  代入式(12)可得

$$M = \frac{I_0}{cA_0} F_1 - \frac{EI_b}{ck_s} \frac{d^2 F_1}{dx^2} \quad (15)$$

整理得

$$\frac{d^2 F_1}{dx^2} - \alpha^2 F_1 + ck_s \frac{M}{EI_b} = 0 \quad (16)$$

式中  $\alpha^2 = k_s \frac{I_0}{EI_b A_0}$ 。

### 1.3 求解

下面将关注简支梁承受跨中集中力  $P$  时的方程求解。由于边界条件的对称性,可以只讨论  $0 \leq x \leq l/2$  段的情况,其内力

$$M(x) = -\frac{Px}{2} \quad Q(x) = -\frac{P}{2} \quad (17)$$

且跨中受集中力的简支组合梁端部轴力为零、跨中轴力的导数为零,即有边界条件  $F_1(0) = 0$ ,  $\frac{dF_1}{dx} \Big|_{x=l/2} = 0$ , 代入求解微分方程,得左半梁轴力为

$$F_1(x) = \frac{ck_s P \cdot e^{-\alpha x}}{2\alpha^3 EI_b (1 + e^{\alpha l})} \cdot (-e^{\alpha l/2} + e^{\alpha l/2 + 2\alpha x} - e^{\alpha x} \alpha x - e^{\alpha l + \alpha x} \alpha x) \quad (18)$$

滑移分布为

$$s(x) = \frac{cA_0 P \cdot e^{-\alpha x}}{2k_s I_0 (1 + e^{\alpha l})} (e^{\alpha l/2} - e^{\alpha x} - e^{\alpha l + \alpha x} + e^{\alpha l/2 + 2\alpha x}) \quad (19)$$

对式(12)两边同时积分,得

$$-\frac{P}{4} x^2 = cEA_0 [s(x) - s(0)] + EI_0 [\varphi(x) - \varphi(0)] \quad (20)$$

对于  $x=l/2$ , 代入  $s(l/2) = \varphi(l/2) = 0$ , 可得  $\frac{Pl^2}{16} =$

$cEA_0 s(0) + EI_0 \varphi(0)$ , 即

$$\varphi(0) = \frac{Pl^2}{16EI_0} - \frac{cA_0 s(0)}{I_0} \quad (21)$$

$$\varphi(x) = -\frac{Px^2}{4EI_0} - \frac{cEA_0}{EI_0} [s(x) - s(0)] + \varphi(0) \quad (22)$$

至此已获得了左半梁  $s(x)$  和  $\varphi(x)$  的表达式。

Timoshenko 梁的截面剪力可由切应变计算得到,上下层梁所分别承担的剪力和截面总剪力为

$$Q_i = \frac{GA_i}{k_i} \gamma_{xy} = \frac{GA_i}{k_i} \left( \frac{d\omega}{dx} + \varphi \right) \quad (23)$$

$$Q = Q_1 + Q_2 = \left( \frac{GA_1}{k_1} + \frac{GA_2}{k_2} \right) \left( \frac{d\omega}{dx} + \varphi \right) \quad (24)$$

式中:  $k_i$  为上下层梁剪应力分布不均匀的修正系数,是一个只与截面形状有关的无量纲量。对于矩形截面  $k_1 = 1.2$ ; 对于复杂截面则需要通过  $k = \frac{A}{I^2} \int_A \frac{S^2}{b^2} dA$  求得<sup>[16]</sup>。经运算,本文试验的下层工字梁  $k_2 = 2.58$ 。

通过对式(24)两边同时积分,得

$$M(x) - M(0) = \left( \frac{GA_1}{k_1} + \frac{GA_2}{k_2} \right) \left[ \omega(x) - \omega(0) + \int_0^x \varphi(\zeta) d\zeta \right] \quad (25)$$

整理后将式(21,22)代入

$$\omega(x) = \frac{Px^3}{12EI_0} - \frac{Pl^2 x}{16EI_0} - \frac{Px}{2 \left( \frac{GA_1}{k_1} + \frac{GA_2}{k_2} \right)} + \frac{cA_0}{\alpha^2 I_0} \left( \frac{ds}{dx} - c \frac{Px}{2EI_b} \right) \quad (26)$$

即得到左半梁挠度分布函数,其中  $\frac{Px^3}{12EI_0} - \frac{Pl^2 x}{16EI_0}$  项为不计入滑移与剪切变形的组合梁挠度,其他部分为两种效应带来的附加项。如将  $x=l/2$  代入,则得跨中挠度为

$$\omega(l/2) = -\frac{Pl^3}{48EI_0} - \frac{Pl}{4 \left( \frac{GA_1}{k_1} + \frac{GA_2}{k_2} \right)} + \frac{c^2 A_0^2 P}{k_s I_0^2} \left( \frac{m}{\alpha} - \frac{l}{4} \right) \quad (27)$$

式中:  $m = \frac{1}{2} - \frac{1}{1 + e^{\alpha l}}$ 。实际应用中可将  $m \approx 0.5$ , 例如对本文试验 SCB1 的  $m = 0.4974$ , 误差仅约 0.5%。

另一方面,在有了  $s(x)$  和  $\varphi(x)$  表达式后,可以十分方便地求解组合梁换算截面在弹性状态下的应力。由式(3,9,10),可得

$$\sigma_x = E \left( \frac{\pm c_i}{c} - \frac{cA_0}{I_0} y \right) \frac{ds}{dx} - \frac{P}{2I_0} xy \quad (28)$$

$$\sigma_x \left( \frac{l}{2} \right) = \frac{\pm c_i m P}{\alpha I_b} - \left( \frac{l}{4} + \frac{c^2 m A_0}{\alpha I_b} \right) \frac{Py}{I_0} \quad (29)$$

通过几何特征与界面剪切刚度所共同确定的

轴力微分方程为整个计算的核心,继而代入边界条件,即可相应求解不同工况下的组合梁挠度与应力。

## 2 试验研究

### 2.1 试验概况

试验共设计4根配置不同个数栓钉的简支组合梁,计算跨径3.0 m,分别编号为SCB1~SCB4,其中试验梁SCB1的抗剪连接件按规范完全抗剪连接布置,即栓钉个数 $n_f = V_s / N_s^c$ ,其中 $N_s^c$ 为单个栓钉抗剪承载力,具体如表1所示。 $n/n_f$ 表示该梁栓钉个数与完全抗剪连接布置栓钉个数的比值。

表1 试验梁栓钉布置情况

Tab.1 Arrangement of test specimens' studs

试验梁编号	SCB1	SCB2	SCB3	SCB4
栓钉间距/mm	215	320	400	186
栓钉个数 $n$	28	20	16	32
$n/n_f$	1.00	0.71	0.57	1.14

试验梁上部混凝土板宽300 mm,高80 mm。工字型钢梁由10 mm的钢板焊接而成,上翼缘板宽120 mm,下翼缘板宽160 mm,腹板高150 mm。抗剪连接件为双排布置的 $\phi 13 \times 60$ 栓钉,栓钉横向间距为60 mm,纵向间距为186~400 mm。以SCB1为例,尺寸示意如图2所示。

试验采用跨中单点加载,并在正式加载前进行预加载,使试件各部位接触良好。试验梁加载过程如图3所示。另经材料试验得到混凝土和钢材弹性

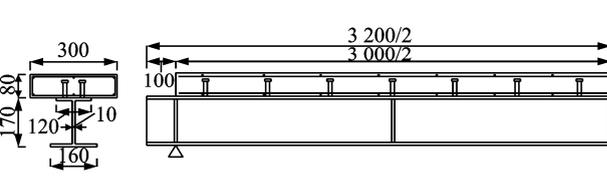


图2 试验梁SCB1尺寸

Fig.2 Size of SCB1



图3 试验梁加载过程

Fig.3 Loading process of specimen

模量 $E_c = 3.59 \times 10^4 \text{ N/mm}^2, E_s = 2.1 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$ 。

### 2.2 试验结果

图4为4根试验梁的荷载-跨中挠度曲线。由图4可知,对于不同栓钉间距的试验梁,其整个加载过程均可分为弹性阶段( $P \leq 0.6P_u$ )、弹塑性阶段和塑性阶段。同时可以看出,栓钉布置越稀疏的梁上下两部分的组合作用越弱,组合梁的抗弯刚度、极限承载力和延性均随抗剪连接程度的减小而减小,如SCB3在 $0.6P_u$ 的割线刚度对比SCB1下降8.1%,极限承载力与极限挠度下降达10.5%与30.6%。

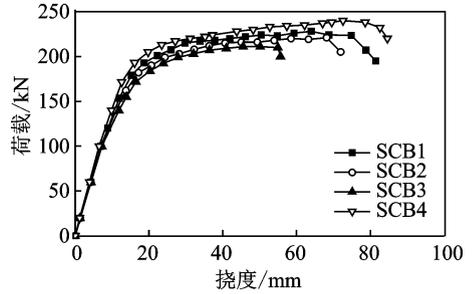


图4 试验梁荷载-跨中挠度曲线

Fig.4 Load-deflection curves of specimens

## 3 验算与讨论

### 3.1 界面剪切刚度

界面剪切刚度 $k_s$ 直接决定了钢梁与混凝土板之间组合作用的大小,计算组合梁挠度与应力时,需首先确定 $k_s$ 的取值。界面剪切刚度计算公式为 $k_s = n_s K / p$ ,其中, $n_s$ 为栓钉列数, $p$ 为栓钉纵向间距, $K$ 为单个栓钉抗滑移刚度。 $K$ 值往往由推出试验的结果确定,文献[5]取 $K = 0.66 N_s^c$ ,公路钢桥规<sup>[7]</sup>与钢结构设计规范<sup>[17]</sup>取 $K = N_s^c$ 。文献[4]对前人的试验数据进行了汇总,由结果可见栓钉抗滑移刚度的试验数据具有很大的离散性。经分析对比,文献[4]最终取 $K = N_s^c$ 。

本文亦采用将栓钉承载力作为抗滑移刚度的取值方法,设计并进行了1组推出试件的静载破坏试验。试验共包含3个试件,均采用与试验梁规格相同的栓钉和同一批次浇筑的混凝土,最终得到试验栓钉的抗剪承载力平均值为70.2 kN,继而计算得到各梁界面剪切刚度。对于SCB1~SCB4, $k_s$ 分别为 $6.552 \times 10^5, 4.68 \times 10^5, 3.744 \times 10^5$ 和 $7.488 \times 10^5 \text{ kN/m}^2$ 。

### 3.2 试验验证

图5给出了各梁理论挠曲线与实测值的对比,可见在不同连接程度下,两者均吻合良好。因本文理论公式建立于线弹性假定之上,随着荷载的不断增加,试验梁非线性的影响不断明显,理论曲线与实测值的偏差也逐渐加大。

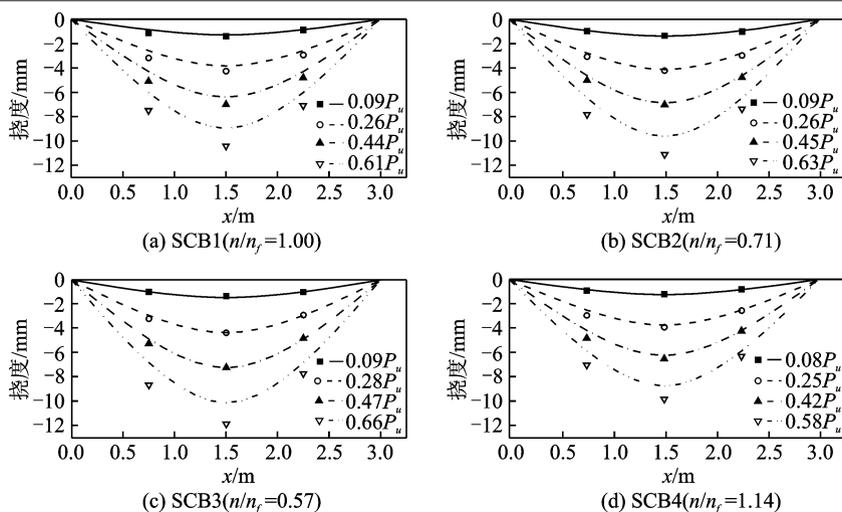


图 5 各梁理论计算所得挠度值与实测值的比较

Fig. 5 Comparison between theoretical values and tested values of specimens' deflection

图 6 给出了各梁跨中截面荷载-应变分布理论值与实测值的对比,可见在不同连接程度下,两者均吻合较好。由图 6 可知,由于界面滑移的存在,受弯的混凝土板与钢梁出现了各自的中性轴。当连接程度较低时( $\eta < 1$ ),这种现象更加明显,且混凝土板下缘出现了较大拉应变。可见,抗剪连接程度对组合梁的应力状态有直接影响,在设计中应予以重视。

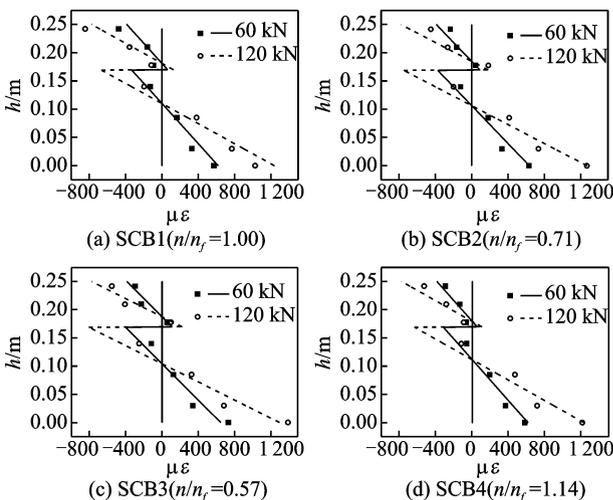


图 6 各梁跨中截面沿梁高应变试验值与计算值的比较

Fig. 6 Comparison between theoretical values and tested values of mid-span strain

### 3.3 计算方法对比

为更直观地考察滑移与剪切变形对挠度的增加效应与不同连接程度之间的关系,现将计算所得的跨中挠度表示为

$$\omega\left(\frac{l}{2}\right) = (1 + \eta)\omega_0\left(\frac{l}{2}\right) \quad (30)$$

式中: $\eta$ 为跨中挠度增长系数, $\omega_0\left(\frac{l}{2}\right)$ 为不考虑滑

移效应与剪切变形,即连接件抗剪刚度趋于无穷大的 Euler-Bernoulli 梁的跨中挠度,则跨中挠度增长系数可表示为

$$\eta = \omega\left(\frac{l}{2}\right) / \omega_0\left(\frac{l}{2}\right) - 1 \quad (31)$$

由此,图 7 给出了跨中挠度增长系数与  $k_s$  的关系曲线,并标识出试验梁连接程度的上下界。可以看到,不同界面剪切刚度的组合梁挠度被不同程度地放大,对于连接程度较弱的组合梁,这种放大效应甚至超过 50%。对比两种计算方法可知,本文方法与文献[7]算法所得结果整体较为接近,且更偏于安全;而对于连接程度较小的梁,文献[7]跨中挠度增长系数随着  $k_s$  的增加而增加有悖常理,本文算法更正了此不合理状况,两种算法的计算结果有较大差距。

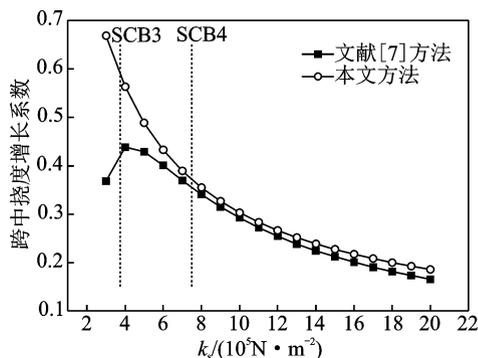


图 7 跨中挠度增长系数随界面剪切刚度的变化

Fig. 7 Mid-span deflection amplify factor with varied stiffness of connectors

表 2 列举了试验梁在 100 kN(0.42~0.47 倍的破坏荷载)作用下跨中挠度计算值与实测值的对比,并结合文献[6,10]中给出的解析算法进行计算对比。由于考虑了组合梁的剪切变形,本文方法计

表2 不同理论计算所得跨中挠度与实测值的比较

Tab. 2 Comparison between theoretical values and tested values of mid-span deflection

	SCB1	SCB2	SCB3	SCB4	平均值
实测值	7.01	7.02	7.21	6.51	
本文公式计算值	6.41	6.88	7.23	6.25	
计算/实测	0.91	0.98	1.00	0.96	0.96
文献[6]公式计算值	5.98	6.44	6.72	5.83	
计算/实测	0.85	0.92	0.93	0.90	0.90
文献[10]公式计算值	6.23	6.70	7.04	6.07	
计算/实测	0.89	0.95	0.98	0.93	0.94

算所得跨中挠度较文献[6]提高了约6%,偏于安全并与实测值更加吻合。

## 4 结束语

(1) 基于 Timoshenko 梁双广义位移假定,本文推导了考虑剪切变形的组合梁轴力微分方程,求解了跨中集中荷载作用下组合梁挠度与应力的解析表达式,概念清晰,易于实践。

(2) 将理论计算结果与实测值进行了比较,对于不同连接程度组合梁的弹性加载阶段,计算理论与实测所得的挠度与应力均吻合较好。这也验证了采用推出试验确定单钉抗剪承载力,继而得到组合梁界面剪切刚度的计算方法合理可行。

(3) 界面滑移将增大组合梁挠度,通过挠度增长系数这一概念,更加直观地表现了界面剪切刚度对组合梁受力性能的影响。对连接程度较低的组合梁,更正了规范跨中挠度增长系数随着连接程度的增加而增加的不合理状况。与未考虑剪切变形的解析算法相比,本文理论结果更加精确,且偏于安全。

## 参考文献

- [1] 黄侨. 桥梁钢-混凝土组合结构设计原理[M]. 北京: 人民交通出版社, 2004.  
HUANG Qiao. Design principle of steel-concrete composite bridge structures [M]. Beijing: China Communications Press, 2004.
- [2] 聂建国, 沈聚敏. 滑移效应对钢-混凝土组合梁弯曲强度的影响及其计算[J]. 土木工程学报, 1997, 30(1): 31-36.  
NIE Jianguo, SHEN Jumin. Slip effect on strength of composite steel-concrete beams [J]. China Civil Engineering Journal, 1997, 30(1): 31-36.
- [3] GIRHAMMAR U A, GOPU V K A. Composite beam-columns with interlayer slip-exact analysis[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 1993,

50(12): 1636-1649.

- [4] WANG Y C. Deflection of steel-concrete composite beams with partial shear interaction [J]. Journal of Structural Engineering, 1998, 124(10): 1159-1165.
- [5] 聂建国, 沈聚敏, 袁彦声. 钢-混凝土简支组合梁变形计算的一般公式 [J]. 工程力学, 1994, 11(1): 21-27.  
NIE Jianguo, SHEN Jumin, YUAN Yansheng. A general formula for predicting the deflection of simply supported composite steel-concrete beams with the consideration of slip effect [J]. Engineering Mechanics, 1994, 11(1): 21-27.
- [6] 聂建国, 沈聚敏, 余志武. 考虑滑移效应的钢-混凝土组合梁变形计算的折减刚度法 [J]. 土木工程学报, 1995(6): 11-17.  
NIE Jianguo, SHEN Jumin, YU Zhiwu. A reduced rigidity method for calculating deformation of composite steel-concrete beams [J]. Journal of Civil Engineering, 1995, 28(6): 11-17.
- [7] 中华人民共和国交通运输部. JTG D64—2015: 公路钢结构桥梁设计规范 [S]. 北京: 人民交通出版社, 2015.  
Ministry of Transport of the People's Republic of China. JTG D64—2015: Code for design of highway steel bridges [S]. Beijing: China Communications Press, 2015.
- [8] 余志武, 蒋丽忠, 李佳. 集中荷载作用下钢-混凝土组合梁界面滑移及变形 [J]. 土木工程学报, 2003, 36(8): 1-6.  
YU Zhiwu, JIANG Lizhong, LI Jia. The interface slip and deformation of steel-concrete composite beams under concentrated loads [J]. China Civil Engineering Journal, 2003, 36(8): 1-6.
- [9] 周东华, 孙丽莉, 樊江, 等. 弹性剪切连接组合梁的应力计算方法 [J]. 工程力学, 2011, 28(3): 157-162.  
ZHOU Donghua, SUN Lili, FAN Jiang, et al. A method for calculation of stresses of composite beams [J]. Engineering Mechanics, 2011, 28(3): 157-162.
- [10] 苗林, 陈德伟. 考虑层间滑移效应的组合梁解析计算 [J]. 同济大学学报: 自然科学版, 2011, 39(8): 1113-1119.  
MIAO Lin, CHEN Dewei. Closed-form solution of composite beam considering interfacial slip effects [J]. Journal of Tongji University: Natural Science, 2011, 39(8): 1113-1119.

- [11] 李嵩林, 王景全. FRP 型材-混凝土组合梁抗弯刚度计算方法[J]. 武汉理工大学学报(交通科学与工程版), 2016(6):1094-1100.
- LI Songlin, WANG Jingquan. The bending stiffness calculation of FRP profiles-concrete composite beam [J]. Journal of Wuhan University of Technology (Transportation Science & Engineering), 2016(6): 1094-1100.
- [12] SCHNABL S, SAJE M, TURK G, et al. Analytical solution of two-layer beam taking into account interlayer slip and shear deformation[J]. Journal of Structural Engineering, 2007, 133(6):886-894.
- [13] XU Rongqiao, WANG Guannan. Variational principle of partial-interaction composite beams using Timoshenko's beam theory[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2012, 60(1):72-83.
- [14] 周凌宇, 余志武, 蒋丽忠. 钢-混凝土组合梁界面滑移剪切变形的双重效应分析[J]. 工程力学, 2005, 22(2): 104-109.
- ZHOU Lingyu, YU Zhiwu, JIANG Lizhong. Analysis of composite beams of steel and concrete with slip and shear deformation[J]. Engineering Mechanics, 2005, 22(2): 104-109.
- [15] 孙飞飞, 李国强. 考虑滑移、剪力滞后和剪切变形的钢-混凝土组合梁解析解[J]. 工程力学, 2005, 22(2):96-103.
- SUN Feifei, LI Guoqiang. A closed-form solution for steel-concrete composite beams with slip, shear lag and shear deformation[J]. Engineering Mechanics, 2005, 22(2): 96-103.
- [16] 施炳华. 常用截面剪应力分布不均匀系数的计算公式[J]. 建筑结构学报, 1984, 5(2):66-70.
- WEI Binghua. Formula shear stress distribution coefficient of uniformity of common cross-section[J]. Journal of Building Structures, 1984, 5(2):66-70.
- [17] 中华人民共和国建设部. GB 50017—2003:钢结构设计规范[S]. 北京: 中国计划出版社, 2003.
- Ministry of Construction of the People's Republic of China. GB 50017—2003; Code for design of steel structures[S]. Beijing:China Planning Press, 2003.

(编辑:陈璐)