

DOI:10.16356/j.1005-2615.2017.06.0013

# 一种基于白噪声的多点激励随机信号生成方法

张步云<sup>1</sup> 陈怀海<sup>2</sup> 汪若尘<sup>1</sup> 王 勇<sup>1</sup> 曾发林<sup>1</sup>

(1. 江苏大学汽车工程研究院, 镇江, 212013; 2. 南京航空航天大学振动工程研究所, 南京, 210016)

**摘要:**为提高多输入多输出(Multiple input multiple output, MIMO)线性随机振动试验系统中具有相关特性的多路驱动信号生成精度,基于驱动谱非负定 Hermite 特性及矩阵分解理论提出了一种 CD(Cholesky decomposition)白噪声滤波信号生成方法。构造具有特定“频响特性”的传递系统,将一系列独立白噪声通过该系统得到具有预期相干特性、相位差以及自谱的平稳随机信号。建立悬臂梁两输入两输出线性振动系统仿真模型,将传统傅里叶逆变换时频转换方法与 CD 滤波法生成的驱动信号进行对比分析。结果表明新方法精度与参考值误差不足 1 dB。两轴振动试验验证结果表明,应用 CD 法既满足工程实际标准需求,又为振动环境试验提供理论依据。

**关键词:**驱动谱;白噪声;随机振动;Cholesky 分解;频响模型

**中图分类号:**O328 **文献标志码:**A **文章编号:**1005-2615(2017)06-0839-06

## New Random Signal Generating Method of Multiple Excitation Vibration System Based on White Noises

ZHANG Buyun<sup>1</sup>, CHEN Huaihai<sup>2</sup>, WANG Ruochen<sup>1</sup>, WANG Yong<sup>1</sup>, ZENG Falin<sup>1</sup>

(1. Automotive Engineering Research Institute, Jiangsu University, Zhenjiang, 212013, China;

2. Vibration Engineering Institute, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing, 210016, China)

**Abstract:** To improve the generating precision of driving signal in multiple-input multiple-out (MIMO) linear random vibration test system, a new method called Cholesky decomposition(CD) filter based on white noise is proposed according to the matrix decomposition theory in view of the nonnegative definite Hermite characteristic of driving power spectral density(PSD). The lower triangular matrix with particular frequency response transfer characteristics is constructed. A series of independent white noises are passed through the system, and the multiple stationary random signals with anticipative coherence performance, phases and self-PSD are obtained. A two-input two-output simulation system based on a cantilever beam is established to verify the effectiveness of the proposed method. The mixed reference spectrum including board and narrow random signals is set and the results between the traditional time-frequency transformation method based on Fourier transform and the new method are compared. The results show that the new method has high accuracy in the self-spectrum and cross-spectrum, and can meet the technical requirements of engineering application, thus improving the effect of random vibration environment test control.

**Key words:** driving spectrum; white noise; random vibration; Cholesky decomposition; frequency response model

**基金项目:**国家自然科学基金(51705205)资助项目;江苏省高校自然科学研究面上(16KJD460001)资助项目;江苏大学高级人才科研启动基金(15JDG166)资助项目。

**收稿日期:**2017-05-22;**修订日期:**2017-11-20

**通信作者:**张步云,男,讲师,E-mail:zhangby@ujs.edu.cn。

**引用格式:**张步云,陈怀海,汪若尘,等.一种基于白噪声的多点激励随机信号生成方法[J].南京航空航天大学学报,2017,49(6):839-844. ZHANG Buyun, CHEN Huaihai, WANG Ruochen, et al. New random signal generating method of multiple excitation vibration system based on white noises[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2017, 49(6): 839-844.

多点振动环境试验是工程机械产品、设备以及相关零部件在设计阶段进行可靠性与耐久性测试的有效手段。随机振动试验更符合产品实际承受的力学环境,是重要的环境试验类型之一<sup>[1-4]</sup>。随机信号生成、控制算法与结构传递特性辨识是多点随机振动闭环试验系统重要研究内容,其中随机信号生成精度与速度影响着振动系统的控制精度与收敛速度,是研究多点振动试验的关键问题。Smallwood 等<sup>[5-6]</sup>经过多年研究提出了较为系统的振动试验相关理论,针对不同类型的信号生成提出了时域随机化方法,将单段信号采用随机颠倒、组合等手段生成较长周期的随机信号。蒋瑜等<sup>[7-8]</sup>针对超高斯随机信号生成技术开展了深入研究,提出了具有指定功率谱密度(Power spectral density, PSD)分布的超高斯伪随机振动信号的生成技术,实现同时具有频域和幅值域的双域控制及均衡能力。关广丰等<sup>[9]</sup>针对六自由度电液振动台环境试验中驱动信号产生进行了研究,采用 Praks-McClellan 方法设计了 FIR 滤波器对一系列独立白噪声进行滤波,得到能够满足实时系统控制的驱动信号。这种方法生成的信号频带较窄,最高仅为 70 Hz,不适用宽频随机振动。贺旭东等<sup>[10]</sup>采用仅有零点的 FIR 数字滤波器系统,使得滤波白噪声输出序列能够满足随机振动试验驱动功率谱的要求。

虽然在单点信号生成中,FIR 滤波法产生的信号使整个系统稳定,但在多输入多输出(Multiple-input multiple-output, MIMO)振动系统中,驱动谱是以矩阵形式体现的,既包含自谱又包含互谱,这种方法在互谱生成中精度不高。本文忽略非线性因素,针对在 MIMO 线性随机振动试验系统中含有相干特性以及相位差元素的多路随机信号生成,依据多自由度线性振动理论中激励与响应在频域内的关系,以多路互相独立的白噪声信号为源信号,提出多点随机驱动信号的 CD(Cholesky decomposition)生成方法。并通过仿真算例与传统的时频转换方法进行对比,验证此方法在精度控制上的优势,为随机振动试验更精确地控制提供理论支撑。

## 1 线性 MIMO 振动系统驱动谱

具有  $n$  自由度的线性 MIMO 振动系统激励与响应在时域与频域的关系如图 1 所示。图中  $h(t)$  表示系统单位脉冲响应函数矩阵,其傅里叶变换  $H(f)$  表示系统的频率响应函数。

记  $\mathbf{X}(f)=[X_1(f), X_2(f), \dots, X_n(f)]^T$  为激励信号频谱向量,  $\mathbf{Y}(f)=[Y_1(f), Y_2(f), \dots,$

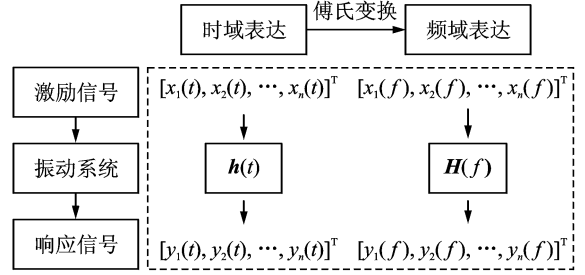


图 1 MIMO 系统激励与响应时频关系

Fig. 1 Time-frequency domain relationships between inputs and outputs of linear MIMO vibration system

$Y_n(f)]^T$  为响应信号频谱向量。两者关系为

$$\mathbf{Y}(f) = \mathbf{H}(f)\mathbf{X}(f) \quad (1)$$

将式(1)两边同时乘以自身的共轭转置并求其期望,得

$$\mathbf{E}[\mathbf{Y}(f)\mathbf{Y}^*(f)] = \mathbf{E}[\mathbf{H}(f)\mathbf{X}(f)\mathbf{X}^*(f)\mathbf{H}^*(f)] = \mathbf{H}(f)\mathbf{E}[\mathbf{X}(f)\mathbf{X}^*(f)]\mathbf{H}^*(f) \quad (2)$$

式中:  $\mathbf{E}[\mathbf{Y}(f)\mathbf{Y}^*(f)]$  为响应信号功率谱密度矩阵,记为  $\mathbf{S}_Y(f)$ ,  $\mathbf{E}[\mathbf{X}(f)\mathbf{X}^*(f)]$  为激励信号的功率谱密度矩阵,记为  $\mathbf{S}_X(f)$ 。故式(2)可写成

$$\mathbf{S}_Y(f) = \mathbf{H}(f)\mathbf{S}_X(f)\mathbf{H}^*(f) \quad (3)$$

易知激励与响应的功率谱密度矩阵均为 Hermite 矩阵,其对角元为自谱,是一组实数;非对角元为互谱,是复数,包含着不同信号之间的相干信息与相位差信息。在 MIMO 振动试验中,设定参考谱矩阵  $\mathbf{S}_R(f)$ ,通过频响函数估计的方式得到系统的实测频响矩阵  $\mathbf{G}(f)$ ,根据式(3)可得驱动谱矩阵

$$\mathbf{S}_D(f) = \mathbf{G}^{-1}(f)\mathbf{S}_R(f)[\mathbf{G}^*(f)]^{-1} \quad (4)$$

## 2 驱动信号生成

### 2.1 Cholesky 分解

从谱密度矩阵可实现的物理条件<sup>[11]</sup>,信号的功率谱密度矩阵为正定的 Hermite 矩阵。设  $\mathbf{A}=[a_{ij}] \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ,可将其通过 Cholesky 分解为一个下三角矩阵及其转置的乘积<sup>[12]</sup>,即

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{U}^T \quad (5)$$

式中:  $\mathbf{U}$  是下三角矩阵,其对角线元素为正。即

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_{11} & & & 0 \\ u_{21} & u_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ u_{n1} & u_{n2} & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix} \quad (6)$$

比较式(5)与式(6),得

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^j u_{ik}u_{jk} \quad (7)$$

有

$$u_{jj}u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} u_{jk}u_{ik} = v(i) \quad (8)$$

令式(8)中  $i=j$ , 则有  $u_{jj}^2 = v(j)$ , 从而由式(8)得

$$u_{ij} = v(i)/g_{ij} = v(i)/\sqrt{v(j)} \quad (9)$$

## 2.2 多路信号 CD 白噪声滤波法

由式(3)可知, MIMO 系统的激励与响应关系可在频域内用功率谱密度矩阵表示, 其连接纽带是系统的频域传递特性。相反地, 若将若干路独立的白噪声信号作为激励, 通过设计频响传递特性相关参数, 可得能够满足要求的具有相关特性的随机信号, 即驱动谱  $S_D(f)$  可以通过对白噪声信号进行线性变换求得。根据矩阵的 Cholesky 分解, 将分解的下三角矩阵对角元均置为 1, 可得

$$S_D(f) = U(f)S_W(f)U^T(f) \quad (10)$$

式中:  $S_W(f)$  为白噪声信号的功率谱密度矩阵, 是对角阵,  $U(f)$  是设计的频响模型, 其元素为

$$\begin{aligned} S_{W, kk} &= \left[ S_{D, kk} - \sum_{i=1}^{k-1} u_{ki}S_{W, ii}u_{ki}^* \right] \quad k=1, 2, \dots, n \\ u_{kk} &= 1 \quad k=1, 2, \dots, n \\ u_{jk} &= \frac{\left[ S_{D, kk}^* - \sum_{i=1}^{k-1} u_{ki}S_{W, ii}u_{ji}^* \right]}{S_{W, kk}} \quad j=k+1, \dots, n \end{aligned} \quad (11)$$

式中  $S_{W, kk}$  为第  $k$  路白噪声的功率谱密度。

## 3 仿真算例

以两输入两输出悬臂梁为研究对象, 预先设置控制点的参考谱值。设定功率谱的自谱、相干系数与相位差, 如图 2 所示。

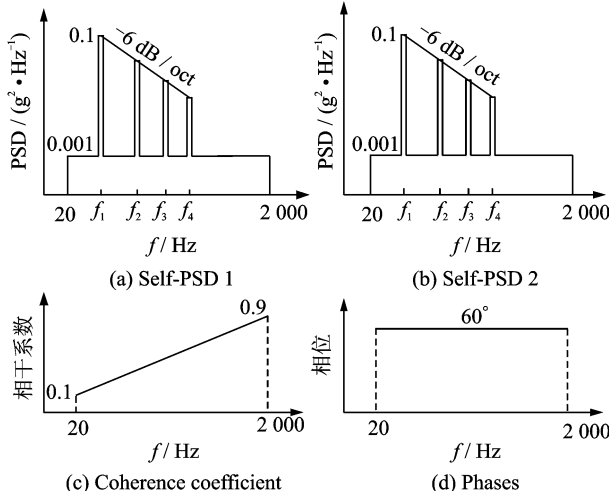


图 2 具有相干特性的两路驱动谱矩阵设置

Fig. 2 Driving PSD of two partially coherent random signals

按照工程经验及相关规范标准, 信号的分析频带设定为 20~2 000 Hz。自谱 1 与自谱 2 相同, 在低量级的宽带随机信号上叠加 4 个窄带随机信号, 宽带信号功率谱密度值为  $0.001 \text{ g}^2/\text{Hz}$ , 窄带随机信号中心频率为  $51n \text{ Hz}$ ,  $n=1, 2, 3, 4$ , 中心带宽为中心频率的 5%。相干系数在分析频带内对数坐标下从 0.1 线性变化到 0.9, 相位差为  $60^\circ$ 。

利用有限元法建立悬臂梁模型, 得到梁的频响函数矩阵。根据式(4)可得到理论驱动信号的功率谱密度矩阵。采用传统的时频转换方法, 即先将功率谱密度矩阵转换为驱动频谱, 再通过傅里叶逆变换得到单帧信号, 继而采用时域随机化方法得到“真实”的驱动信号。再利用本文提出的 CD 白噪声滤波法求得驱动谱, 与理论求得的参考谱和传统法进行比较, 如图 3~6 所示。图中黑色线条是参考值, 蓝色线条传统方法得到的驱动谱, 红色线条表示的是应用本文 CD 法获得的驱动谱。

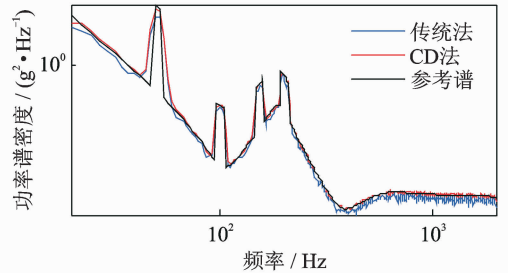


图 3 驱动谱自谱 1

Fig. 3 Comparison of driving self-PSD 1

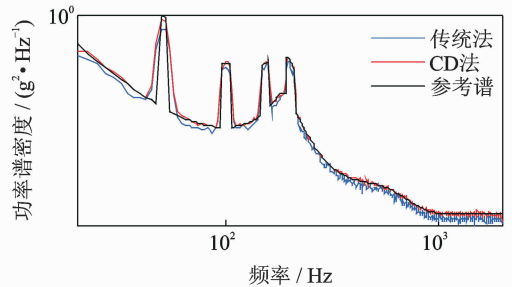


图 4 驱动谱自谱 2

Fig. 4 Comparison of driving self-PSD 2

从图 3 与图 4 可知在驱动自谱生成中, CD 滤波法要比传统方法精度高很多, 尤其是在高频区域, CD 滤波法得到的驱动谱与理论驱动谱一致性较高。从图 5 与图 6 可以看出, 与传统方法相比, 新方法在低频区域相干系数与相位相对精确, 而在高频区域误差较大, 但总体而言其精度控制要优于传统方法。进一步分析传统方法与 CD 法生成的驱动信号与参考值之间的误差, 结果如图 7 所示。

从图中可以看出, 在 200 Hz 以下的低频区

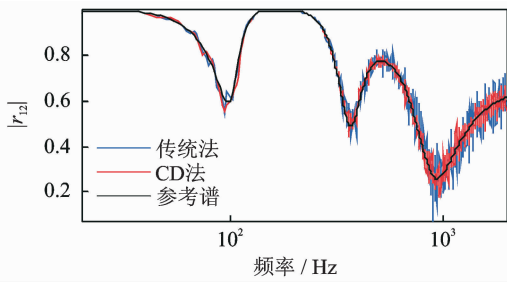


图 5 驱动谱相干函数比较

Fig. 5 Coherence function of driving PSD

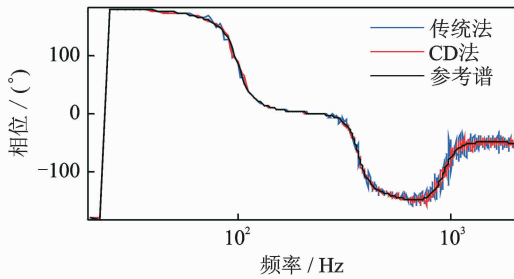


图 6 驱动谱相位差比较

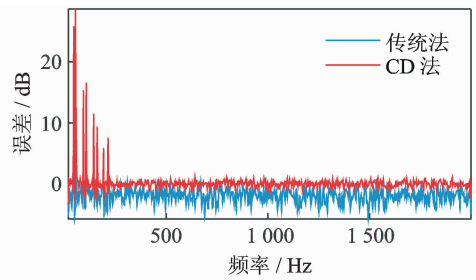
Fig. 6 Phase comparison of driving PSD

域,传统方法与 CD 法的误差均较大,其中驱动谱在 55,95 和 145 Hz 处的误差分别达到 28.34, 15.16 和 8.65 dB,这说明低频域控制难度大,效果差。但在 200 Hz 以上与参考值相比,CD 法比传统法明显有更高的控制精度:传统方法的误差最大达到 5 dB,而 CD 法的误差控制在 1.04 dB 以内。这种控制精度在工程中已经足够应用,更具有理论意义。

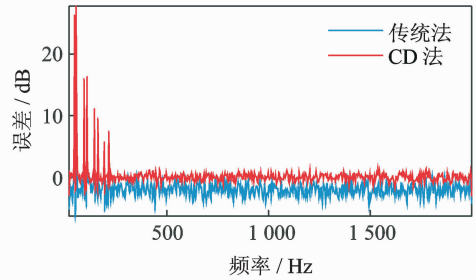
## 4 试验验证

为进一步验证由 CD 法生成的随机信号在 MIMO 试验系统中的应用,需在多轴试验台上开展试验验证,如图 8 所示。多轴振动试验台不同方向的解耦分为机械解耦与算法解耦,控制目标为互相垂直的两个方向(记为 X 向和 Y 向)上宽带随机与窄带随机混合的复杂振动。两个方向的自谱与仿真算例中的自谱一致,相位差为  $-\pi/3$ ,相干系数在对数范围内从 0.3 线性变换至 0.6。

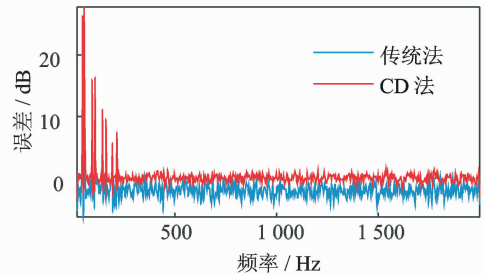
试验由 MATLAB 内嵌程序生成两路独立的白噪声,在测量获取系统频响函数的基础上利用 CD 法得到驱动信号。将信号通过数采设备发送至振动台,振动台面上布置两个 PCB 333B2 型加速度传感器以拾取加速度信号。试验中采取随机振动的雅克比控制算法<sup>[13]</sup>,该算法可针对 MIMO 系统中相位与相干系数提高控制精度,控制结果如图 9 所示。



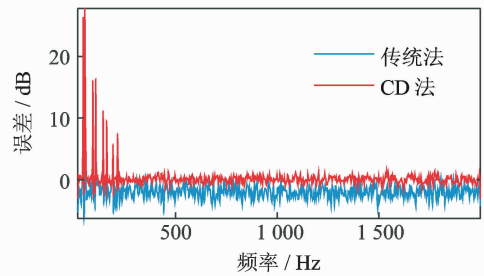
(a) Errors of driving PSD 1



(b) Errors of driving PSD 2



(c) Coherence errors



(d) Phase errors

图 7 传统法与 CD 法的误差分析

Fig. 7 Traditional method errors analysis compared with the new CD method

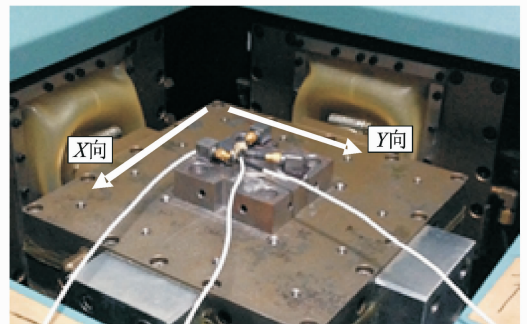


图 8 两轴向混合随机振动试验

Fig. 8 Mixed random vibration test in two-axis direction

从结果来看,系统中 4 个独立元素(两个自谱、相位差以及相干系数)均有良好的控制精度。自谱

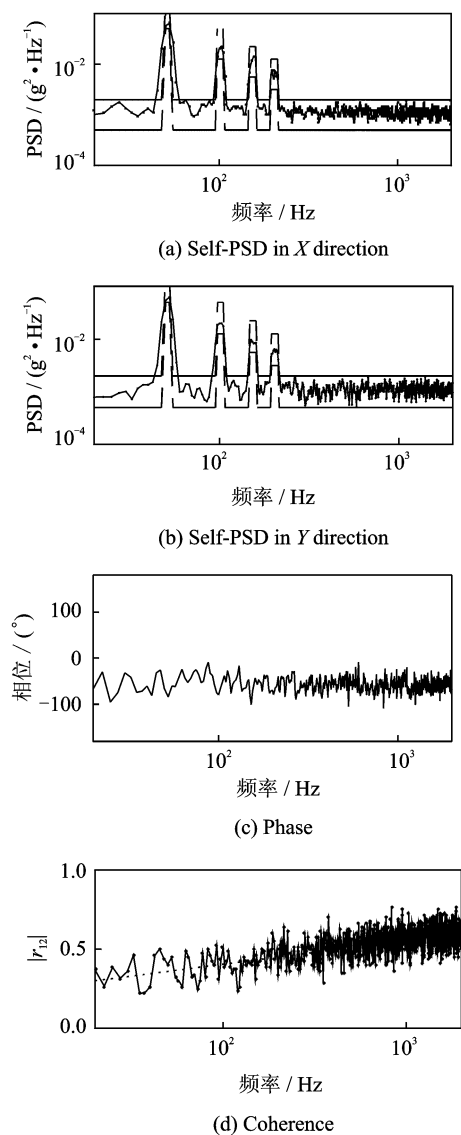


图 9 控制结果

Fig. 9 Control results

能控制在  $\pm 3$  dB 范围内, X 轴振动加速度总均方根值误差为 2.6%, Y 轴振动加速度总均方根值误差为 1.8%。相位差与相干系数的控制精度均能满足工程需求。

## 5 结 论

(1) 具有相关特性的多路随机信号在 MIMO 线性随机振动控制试验中起着重要的作用, 本文借鉴于多维线性振动理论中激励与响应在频域中的关系, 通过 Cholesky 分解方法构造“频响特性”模型, 对若干路独立的白噪声进行滤波得到满足一定要求的随机信号。

(2) 仿真与试验结果表明, 本文 CD 白噪声滤波法比传统方法具有更高的自谱生成精度, 对于自谱的生成, 两种方法在 200 Hz 以下的频带内误差

均较大, 而在 200 Hz 以上的中高频 CD 法的精度更高, 与参考值的误差基本不到 1 dB。在相干系数与相位差两个因素中, 低频精度较高, 中高频误差较大, 但总体精度足可满足工程实际需求。

(3) 工程中系统往往是非线性的, 信号生成机理及相互耦合关系更为复杂。本文方法以线性振动理论为基础, 并未涉及非线性相关问题。在后续的研究中, 应逐步考虑非线性因素的影响, 形成更为完整的多点随机信号生成方法体系。

## 参考文献:

- [1] 崔旭利, 陈怀海, 贺旭东, 等. 多输入多输出随机振动试验交叉比例控制算法[J]. 南京航空航天大学学报, 2010, 42(4):429-434.  
CUI Xuli, CHEN Huaihai, HE Xudong, et al. Cross proportional control algorithm for MIMO random vibration test [J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2010, 42(4):429-434.
- [2] 卢兆明, 周骅, 李仰钊. 混合振动试验在汽车电子设备中的应用和要点[J]. 环境技术, 2009, 2:35-41.  
LU Zhaoming, ZHOU Hua, LI Yangchao. Mixed mode vibration test applied to electrical and electronics equipment of road vehicles [J]. Environmental Technology, 2009, 2:35-41.
- [3] United States Department of Defense. MIL-STD-810G: Test method standard for environmental engineering considerations and laboratory tests [S]. 2008.
- [4] 张步云, 陈怀海, 贺旭东, 等. 磁流变阻尼器减振特性实验研究[J]. 南京航空航天大学学报, 2012, 44(6):855-861.  
ZHANG Buyun, CHEN Huaihai, HE Xudong, et al. Experimental study on damping characteristic of magneto-rheological damper [J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2012, 44(6):855-861.
- [5] SMALLWOOD D O, PAEZ T L. A frequency domain method for the generation of partially coherent normal stationary time domain signals [J]. Shock and Vibration, 1993, 1(1):45-53.
- [6] SMALLWOOD D O. Generating non-gaussian vibration for testing purpose [J]. Sound and Vibration, 2005:18-24.
- [7] 蒋瑜, 陈循, 陶俊勇, 等. 超高斯伪随机振动激励信号的生成技术 [J]. 振动工程学报, 2005, 18(2):179-183.  
JIANG Yu, CHEN Xun, TAO Junyong, et al. The technique of generating super-Gaussian and quasi-random vibration exciting signals [J]. Journal of Vibration Engineering, 2005, 18(2):179-183.

- [8] 蒋瑜, 陈循, 陶俊勇. 基于时域随机化的超高斯真随机驱动信号生成技术研究[J]. 振动工程学报, 2005, 18(4):491-494.  
JIANG Yu, CHEN Xun, TAO Junyong. Study on the generation of super-Gaussian and true-random drive signals using time domain randomization[J]. Journal of Vibration Engineering, 2005, 18(4):491-494.
- [9] GUAN Guangfeng, XIONG Wei, WANG Haitao, et al. Generation of time domain drive signals in MIMO random vibration control system[C]// Proceedings of the 7th JFPS International Symposium on Fluid Power. Toyama:[s. n.], 2008:295-300.
- [10] 贺旭东, 陈怀海. 利用 FIR 滤波器生成随机振动试验驱动信号的新方法[J]. 航空学报, 2003, 24(3): 220-222.  
HE Xudong, CHEN Huaihai. Generating the driving signals for random vibration test by FIR filter[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2003, 24(3):220-222.
- [11] 贺旭东, 陈怀海. 多点随机振动控制中的互谱矩阵研究[J]. 南京航空航天大学学报, 2004, 36(2):744-747.  
HE Xudong, CHEN Huaihai. Cross-spectra in multiple shaker random vibration test [J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2004, 36(2):744-747.
- [12] 张贤达. 矩阵分析与应用[M]. 北京:清华大学出版社, 2004:225-226.
- [13] 张步云, 陈怀海, 汪若尘, 等. 多输入多输出随机振动试验雅可比控制算法[J]. 振动工程学报, 2017, 30(4):549-555.  
ZHANG Buyun, CHEN Huaihai, WANG Ruochen, et al. Jacobi control algorithm for MIMO random vibration test [J]. Journal of Vibration Engineering, 2017, 30(4):549-555.

