

DOI:10.16356/j.1005-2615.2017.03.019

一种新的多输出重要性测度及其高效计算方法

左健巍 吕震宙 刘辉 巩祥瑞

(西北工业大学航空学院,西安,710072)

摘要:基本变量重要性测度分析是结构安全评估以及工程优化设计的一项必要工作。本文结合矩独立重要性测度思想和基于方差的重要性测度思想,提出了一种新的适用于多个输出的重要性测度。所提测度利用概率积分转化(Probability integration transformation, PIT),将输出的不确定性由输出的联合分布函数来表征。在多输出情况下,相比单纯基于方差的重要性测度,所提测度能够同时包含各个输出的不确定性及其相关性。而相比单纯的矩独立重要性测度,由于它使用方差来衡量变异性,因而求解过程更为简便。在计算多输出的分布函数时,本文采用基于分数矩的极大熵方法结合 Nataf 变换法,在保证求解精度的同时大大降低了模型调用次数。数值和工程算例说明了该测度的合理性以及计算方法的高效性。

关键词:多输出;重要性测度;概率积分转化;极大熵;Nataf 变换

中图分类号:V221; TB114.3 **文献标志码:**A **文章编号:**1005-2615(2017)03-0441-06

New Importance Measure for Multivariate Output and Its Effective Solution

ZUO Jianwei, LÜ Zhenzhou, LIU Hui, GONG Xiangrui

(School of Aeronautics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an, 710072, China)

Abstract: Importance measure for input random variables is a necessary component of safety evaluation and optimization design in engineering. In this paper, a new importance measure for multivariate output is introduced by combining notions of the moment-independent importance measure and the variance-based importance measure synthetically. The new measure is based on the multivariate probability integration transformation (PIT), in which the uncertainty of the multivariate output is represented in the form of its joint cumulative distribution function (CDF). Compared with variance-based measures, the new measure can take into account both of the uncertainty and the correlation information in the multivariate output. Compared with moment-independent measures, the solution procedure of new measure is more simple because the variability of the joint CDF is measured by variances. In this paper, maximum entropy method based on fractional moments and Nataf transformation are proposed to reduce model calls when the joint CDF is calculated. The calculation cost is saved without decreasing its accuracy. A numerical example and an engineering example are given to show the reasonableness of the proposed measure and the efficiency of the algorithm.

Key words: multivariate output; importance measure; probability integration transformation; maximum entropy method; Nataf transformation

基金项目:国家自然科学基金(51475370)资助项目;中央高校基本科研业务费(3102015BJ(II)CG009)资助项目。

收稿日期:2016-07-04; **修订日期:**2016-10-26

通信作者:吕震宙,女,教授,博士生导师, E-mail: zhenzhoulu@nwpu.edu.cn。

引用格式:左健巍,吕震宙,刘辉,等.一种新的多输出重要性测度及其高效计算方法[J].南京航空航天大学学报,2017,49(3):441-446. ZUO Jianwei, LÜ Zhenzhou, LIU Hui, et al. New importance measure for multivariate output and its effective solution[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2017, 49(3): 441-446.

在工程结构设计及风险评估中,需要考虑输入变量的不确定性对输出响应性能不确定性的影响程度。而输出响应性能往往不止一个。传统的单个输出性能下基于方差或矩独立重要性测度可以对每个输出单独进行分析,然而由于输出之间一般具有相关性,这样单独分析每个输出的方法会造成各个指标间不同程度的信息冗余,使得分析结果难以被解释^[1-2]。因此,更好的方法是把多输出看作一个整体来对待。

Campbell 等人基于对输出响应量的分解提出了一种简单实用性的重要性测度方法^[1]。它通过对输出响应量进行正交分解,提取包含信息最多的几个成分,再单独进行重要性分析。Lamboni 等人将其应用于农作物生长模型的分析中,并提出了一套新的综合测度^[3-4]。Gamboa 等人基于协方差分解,提出一种广义的重要性测度^[5],该测度求解过程相比 Campbell 所提测度更为高效,但它们本质上是等价的^[2]。这些方法直接把输出(协)方差作为输出不确定性的唯一衡量,相比输出的完整概率分布,损失了很多信息^[6]。因此,更好的重要性测度应该考虑输出的完整概率分布。Cui 等人^[7]将 Borgonovo^[8]在单输出下的矩独立指标扩展到多输出条件下,定义了基于联合概率密度函数(Probability density function, PDF)的重要性测度。虽然该测度全面考虑了多个输出响应的不确定性以及输出间的相关性,但文献^[7]在求解多输出的联合 PDF 时,采用的是直方图法,计算量大且输出的维数高时很难较准确地求得输出的联合 PDF。Li 等人^[9]综合前人在单输出条件下基于分布函数(Cumulative distribution function, CDF)的重要性测度方法^[10-12],通过使用概率积分转化(Probability integral transformation, PIT)方法^[13],提出了一种基于 CDF 的多输出重要性测度,该测度以联合 CDF 的 PIT 分布作为输出不确定性的度量,同 Cui 的测度一样包含了输出响应的完整不确定性及其相关性信息。由于计算时需要在循环内部求解 PIT 变量的分布函数和条件分布函数,并在全域内进行积分,它的求解过程依旧十分繁琐。本文在文献^[9]基础上,结合基于方差的重要性测度方法,提出一种新的多输出重要性测度。该测度同样利用 PIT 方法,在保留多输出响应不确定性和相关性信息的同时,将多维响应量化为单维。对单维 PIT 变量使用基于方差的重要性测度分析方法,所得测度同样能够很好地反映出输入变量不确定性对多输出响应不确定性的影响程度,且包含输出之间相关性的信息。由于无需对 PIT 变量再求分布函数并在全域内积分,而只需求其方差,所提

测度求解过程更为简便。文献^[14]提出一种基于分数矩的极大熵方法,可以高效估计输出响应的边缘概率密度函数,而联合概率密度函数可以使用文献^[15]所提 Nataf 变换法高效估计,本文将在这两种方法的基础上,改进多输出联合分布函数的解法,提出一种高效求解方法用于计算所提测度。

1 多输出重要性测度新指标

令 $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$ 表示一组独立输入变量, $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_m)^T$ 表示 \mathbf{X} 通过功能函数 $Y_r = g_r(X_1, \dots, X_n)$ ($r = 1, \dots, m$) 获得的输出响应。

令 $F_Y(Y_1, \dots, Y_m)$ 表示模型输出响应 $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_m)^T$ 的联合分布函数,则 \mathbf{Y} 的 m 维 PIT 可由式(1)获得

$$U = F_Y(Y_1, \dots, Y_m) \quad (1)$$

显然变量 U 中已经包含了多输出响应的单维信息及多输出之间的相关性信息,且 U 为单维随机变量,在比较 U 和 X_i 固定 $U | X_i$ 的分布差异时,可以采用 U 的方差 $V(U)$ 和 $U | X_i$ 的方差 $V(U | X_i)$ 的差异,并采用绝对值的形式以保留在后续求平均差异时 X_i 的影响。对 $V(U)$ 和 $V(U | X_i)$ 的绝对值差异 $|V(U) - V(U | X_i)|$ 求平均,可定义式(2)所示的新指标 ξ_i 来衡量 X_i 对多个输出综合统计特征的影响

$$\xi_i = \frac{E_{X_i} [|V(U) - V(U | X_i)|]}{V(U)} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_i}(x_i) |V(U) - V(U | X_i)| dx_i}{V(U)} \quad (2)$$

式中: $f_{X_i}(x_i)$ 为 X_i 的概率密度函数。 ξ_i 越大,表示固定 X_i 对输出响应的联合分布的变异性影响越大, X_i 就越重要。特别地,当 X_i 和输出响应 \mathbf{Y} 独立时, $V(U | X_i) = V(U)$ 在 X_i 的全域内恒成立, $\xi_i = 0$ 。当 \mathbf{Y} 的不确定性完全来自于 X_i 时, $V(U | X_i) = 0$ 在 X_i 的全域内恒成立, $\xi_i = 1$ 。

类似地,对任意组合的输入变量 $(X_{i_1}, \dots, X_{i_r})^T$ ($1 < r \leq n, i_r \in \{1, \dots, n\}$), 可定义联合重要性测度指标

$$\xi_{i_1, \dots, i_r} = \frac{E_{X_{i_1}, \dots, X_{i_r}} [|V(U) - V(U | X_{i_1}, \dots, X_{i_r})|]}{V(U)} = \frac{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_{i_1}, \dots, X_{i_r}}(x_{i_1}, \dots, x_{i_r}) |V(U) - V(U | X_{i_1}, \dots, X_{i_r})| dx_{i_1}, \dots, dx_{i_r} \right) / V(U)}{V(U)} \quad (3)$$

式中: $f_{X_{i_1}, \dots, X_{i_r}}(x_{i_1}, \dots, x_{i_r})$ 为 $(X_{i_1}, \dots, X_{i_r})^T$ 的联合概率密度函数。

2 新指标的求解

2.1 Monte-Carlo 法

求解 ξ_i 指标首先要计算输出响应的联合分布函数 $F_Y(Y_1, \dots, Y_m)$ 以及条件联合分布函数 $F_{Y_i|X_i}(Y_1, \dots, Y_m)$ 。由于 PIT 随机变量 U 是输出响应 \mathbf{Y} 的分布函数 $U = F_Y(Y_1, \dots, Y_m)$, U 的样本 $u_k (k=1, \dots, N)$ (N 为样本个数) 可以通过对 Y 求经验分布函数, 并由 \mathbf{Y} 的样本 $\mathbf{y}_k = \{y_{k1}, \dots, y_{km}\} (k=1, \dots, N)$ 来获得

$$F_Y^m(\mathbf{y}) = F_{Y_1, \dots, Y_m}^m(y_1, \dots, y_m) = \sum_{k=1}^N T(y_1 > y_{k1}, \dots, y_m > y_{km}) / N$$

$$T(y_1 > y_{1k}, \dots, y_m > y_{mk}) = \begin{cases} 1 & y_i > y_{ki} \quad i \in \{1, \dots, m\} \\ 0 & y_i \leq y_{ki} \quad i \in \{1, \dots, m\} \end{cases} \quad (4)$$

式中: $F_Y^m(\mathbf{y})$ 为 \mathbf{Y} 的经验分布函数; N 为样本点个数; $(y_{k1}, \dots, y_{km}) (k=1, \dots, N)$ 表示第 k 个随机样本。 ξ_i 指标具体求解步骤如下:

(1) 先根据输入变量 $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$ 的联合概率密度 $f_X(\mathbf{x})$, 产生 N 个输入变量 \mathbf{X} 的随机样本 $\mathbf{x}_k = (x_{k1}, \dots, x_{kn})^T (k=1, \dots, N)$, 通过代入功能函数 $Y_r = g_r(X_1, \dots, X_n) (r=1, \dots, m)$ 获得 N 个多输出随机样本 $\mathbf{y}_k = (y_{k1}, \dots, y_{km})^T$;

(2) 通过式(4)用经验分布函数 $F_Y^m(\mathbf{y})$ 估计 \mathbf{Y} 的联合分布函数 $F_Y(y_1, \dots, y_m)$, 根据 $U = F_Y(y_1, \dots, y_m)$ 获得 N 个 PIT 变量 U 的样本 $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_N)^T$, 然后使用 U 的样本方差 $\hat{V}(U)$ 估计无条件方差 $V(U)$: $\hat{V}(U) = \sum_{i=1}^N (u_i - \bar{u})^2 / N$; 其中, $\bar{u} = \sum_{i=1}^N u_i / N$ 为 U 的样本均值;

(3) 对第(1)步中 X_i 的每个样本 $x_{ki} (k=1, \dots, N; i=1, \dots, n)$, 根据条件密度 $f_{X_{-i}|X_i=x_{ki}}(\mathbf{x}_{-i})$ 获得 N_t 个条件样本 $\mathbf{x}_{t, \sim i} = (x_{t1}, \dots, x_{t, i-1}, x_{t, i+1}, \dots, x_{tn})^T (t=1, \dots, N_t)$, 代入功能函数获得 N_t 个多输出条件样本 $\mathbf{y}_t | x_{ki} (t=1, \dots, N_t)$, 由 $\mathbf{y}_t | x_{ki} (k=1, \dots, N; t=1, \dots, N_t)$ 获得经验分布函数 $F_{Y_i|x_{ki}}^m(\mathbf{y})$, 并由 $u_t | x_{ki} = F_{Y_i|x_{ki}}^m(y_t | x_{ki})$ 获得 $X_i = x_{ki}$ 情况下的 N_t 个条件样本 $\mathbf{u} | x_{ki} = \{u_1 | x_{ki}, \dots, u_{N_t} | x_{ki}\}$, 由此可以获得 $X_i = x_{ki}$ 时 $U | X_i = x_{ki}$ 的条件样本方差估计 $\hat{V}(U | X_i = x_{ki})$, 计算差值 $\Delta_{ki} = |\hat{V}(U) - \hat{V}(U | X_i = x_{ki})| (k=1, \dots, N)$;

(4) 经过上述步骤, ξ_i 可由 $\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{\Delta_{ki}}{\hat{V}(U)}$ 来估计。

2.2 新指标求解的 Nataf 方法

2.1 节 Monte Carlo 法简单直观, 易于编程实现。可将其收敛解作为精确对照解。然而 Monte Carlo 法的求解过程需要双层抽样且每一层均需大量样本, 内层还要对样本进行排序(求经验分布函数), 因而效率很低。为了提高求解联合分布函数的效率, 本节引入一种新的计算方法: 首先利用基于分数矩的极大熵法求解出各个输出的边缘概率密度函数, 再使用 Nataf 变换法获得多输出的联合概率密度函数。由联合密度函数积分得到联合分布函数。

2.2.1 基于分数矩的极大熵准则估计单个响应函数的边缘概率密度函数

多输出响应 $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_m)^T$ 中单个输出 $Y_j (j \in \{1, \dots, m\})$ 的概率密度函数 $f_{Y_j}(y_j)$ 的熵表示如下

$$H(f_{Y_j}) = - \int_{Y_j} f_{Y_j}(y_j) \ln(f_{Y_j}(y_j)) dy_j \quad (5)$$

熵是表示混乱度的一个量, 实际中认为熵最大的系统也是最稳定最能被利用的系统, 因此要估计 $f_{Y_j}(y_j)$ 的值时, 当某个估计 $\hat{f}_{Y_j}(y_j)$ 的熵最大时, 它与真实值最接近。

基于极大熵理论, 要找到 $\hat{f}_{Y_j}(y_j)$ 相当于将求解问题变成了一个优化的过程

$$\begin{cases} \text{目标:} & f_{Y_j}(y_j) \\ \text{最大化:} & - \int_{Y_j} f_{Y_j}(y_j) \ln(f_{Y_j}(y_j)) dy_j \\ \text{约束:} & \int_{Y_j} y_j^{\alpha_k} f_{Y_j}(y_j) dy_j = M_j^{\alpha_k} \end{cases} \quad (6)$$

式中 $M_j^{\alpha_k}$ 为输出响应的 $\alpha_k (k=0, 1, \dots, s)$ 阶分数矩。文献[15]指出, 采用分数矩比采用整数矩包含更多的样本信息, 因此对输出响应的概率密度函数的拟合也就更准确。

文献[14]通过构造拉格朗日函数, 求得 $f_{Y_j}(y_j)$ 的估计值 $\hat{f}_{Y_j}(y_j)$ 如下

$$\hat{f}_{Y_j}(y_j) = \exp\left(- \sum_{k=0}^s \lambda_k y_j^{\alpha_k}\right) \quad (7)$$

式中: $\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_s]^T$ 为拉格朗日乘数; $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1, \dots, \alpha_s]$ 为分数阶。 $\alpha_0 = 0, \lambda_0 = \ln \left[\int_{Y_j} \exp\left(- \sum_{k=1}^s \lambda_k y_j^{\alpha_k}\right) dy_j \right]$ 。具体求解过程见文献[14], 此处不再赘述。

该方法可以高效准确地估计出单个随机输出响应的边缘概率密度函数。本文使用该方法计算多输出响应的边缘概率密度函数, 用以求解后面的联合分布函数。

2.2.2 基于 Nataf 变换求解多输出的联合概率密度函数

Nataf 变换是原始变量空间到标准正态空间的转换过程的一个数学模型^[15],它根据每个随机变量的边缘概率密度函数、分布函数和随机变量之间的相关系数来求解变量之间的联合密度函数。因此为了求解多输出响应 $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_m)^T$ 的联合概率密度函数 $f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y})$, 须知道单个输出 $Y_j (j = 1, \dots, m)$ 的概率密度函数 $f_{Y_j}(y_j)$ 和累积分布函数 $F_{Y_j}(y_j)$, 以及多输出响应的相关系数矩阵 $\boldsymbol{\rho} = [\rho_{ij}] (i, j \in \{1, \dots, m\})$ 。Nataf 变换过程如下。

使用 Liu 和 der Kiureghian 的等概率转换原则^[16]

$$\begin{cases} \Phi(r_j) = F_{Y_j}(y_j) \\ r_j = \Phi^{-1}(F_{Y_j}(y_j)) \end{cases} \quad j = 1, \dots, m \quad (8)$$

其中引入标准正态随机向量 $\mathbf{R} = (r_1, \dots, r_m)^T$, 式中 $\Phi(\cdot)$ 和 $\Phi^{-1}(\cdot)$ 分别为标准正态变量的累积分布函数和逆累积分布函数。

根据 Nataf 变换理论, 利用隐函数求导法则, 可以推导出随机向量 \mathbf{Y} 的联合概率密度函数为

$$f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = f_{Y_1}(y_1) f_{Y_2}(y_2) \cdots f_{Y_m}(y_m) \frac{\varphi_m(\mathbf{R}, \boldsymbol{\rho}_0)}{\varphi(r_1) \varphi(r_2) \cdots \varphi(r_m)} \quad (9)$$

式中 $\varphi(\cdot)$ 为标准正态分布变量的概率密度函数。而

$$\varphi_m(\mathbf{R}, \boldsymbol{\rho}_0) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m \det(\boldsymbol{\rho}_0)}} \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{R}_i^T \boldsymbol{\rho}_0^{-1} \mathbf{R}_i\right) \quad (10)$$

对应于均值为 0、方差为 1 及相关系数矩阵为 $\boldsymbol{\rho}_0$ 的 m 维标准正态分布。其中 $\det(\boldsymbol{\rho}_0)$ 表示 $\boldsymbol{\rho}_0$ 的行列式的值。假设多输出响应 \mathbf{Y} 的相关系数矩阵 $\boldsymbol{\rho}$ 的各个分量为 ρ_{ij} , 则标准正态随机向量 \mathbf{R} 的相关系数矩阵 $\boldsymbol{\rho}_0$ 的各阶分量 ρ_{0ij} 可通过式(11)求解

$$\begin{aligned} \rho_{ij} = & \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{y_i - \mu_{y_i}}{\sigma_{y_i}}\right) \left(\frac{y_j - \mu_{y_j}}{\sigma_{y_j}}\right) f_{Y_i Y_j}(y_i, y_j) \cdot \\ & dy_i dy_j = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{F_{Y_i}^{-1}(\Phi(r_i)) - \mu_{y_i}}{\sigma_{y_i}}\right) \cdot \\ & \left(\frac{F_{Y_j}^{-1}(\Phi(r_j)) - \mu_{y_j}}{\sigma_{y_j}}\right) \varphi_2(r_i, r_j, \rho_{0ij}) dr_i dr_j \quad (11) \end{aligned}$$

式中: $f_{Y_i Y_j}(y_i, y_j)$ 为 Y_i 和 Y_j 的联合概率密度函数; $F_{Y_i}^{-1}(\cdot)$ 、 $F_{Y_j}^{-1}(\cdot)$ 分别为 Y_i 和 Y_j 的逆累积分布函数。

求解上述非线性方程, 即可完全确定 $\boldsymbol{\rho}_0$, $f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y})$ 也可确定。本文使用 Nataf 变换法求解各个输出之间的联合密度函数, 再积分求得联合分布函数。

2.2.3 完整求解过程

本小节给出所提指标的高效求解方法, 完整过

程如下。

第 1 步: 对每个输出 Y_j , 使用基于分数矩的极大熵方法计算每个输出的边缘概率密度函数 $f_{Y_j}(y)$, 并积分获得其边缘分布函数 $F_{Y_j}(y) (j = 1, \dots, m)$ 。其中, 计算分数矩 $M_{Y_j}^{q_k} (k = 0, 1, \dots, s; j = 1, \dots, m)$ 时, 使用文献[14]所给出的降维积分法, 将每个单个输出表示如下

$$y_j(\mathbf{x}) \approx y'_j(\mathbf{x}) = y_{j0} \prod_{i=1}^n \left(\frac{y_j(x_i, \boldsymbol{\mu}_{\sim i})}{y_j(\boldsymbol{\mu})}\right) \quad (12)$$

式中: $y_j(\boldsymbol{\mu})$ 表示所有输入变量取均值时单个输出的响应值; $y_j(x_i, \boldsymbol{\mu}_{\sim i})$ 表示除输入变量 X_i 以外其他输入变量都取均值 $\boldsymbol{\mu}_{\sim i}$ 时单个输出的响应值。则分数矩 $M_{Y_j}^{q_k}$ 即可由式(13)计算

$$M_{Y_j}^{q_k} \approx E\left[(y_j^{1-n}(\boldsymbol{\mu}) \times \prod_{i=1}^n y_j(x_i, \boldsymbol{\mu}_{\sim i})^{q_k}\right] = y_j^{(1-n)q_k}(\boldsymbol{\mu}) \times \prod_{i=1}^n E[(y_j(x_i, \boldsymbol{\mu}_{\sim i}))^{q_k}] \quad (13)$$

该方法将求多变量函数 $y_j(\mathbf{x})$ 的分数矩转变为求单变量函数 $y_j(x_i, \boldsymbol{\mu}_{\sim i})$ 的分数矩的乘积, 只需少量样本点(假设为 p 个)即可准确估计出单个输出 Y_j 的各阶分数矩(例如使用 Gauss 七点估计, 则样本点数量 $p = 7$)。

第 2 步: 求解输出两两间的相关系数 ρ_{ij} 。根据定义

$$\begin{aligned} \rho_{ij} = & \frac{\text{Cov}(Y_i, Y_j)}{\sigma_{Y_i} \cdot \sigma_{Y_j}} = \\ & \frac{E(Y_i Y_j) - E(Y_i) \cdot E(Y_j)}{\sqrt{E(Y_i^2) - E^2(Y_i)} \cdot \sqrt{E(Y_j^2) - E^2(Y_j)}} \quad (14) \\ & i, j = 1, \dots, m \end{aligned}$$

式中的期望值同样可以由降维积分法求得, 该步可以确定原始空间的相关系数矩阵 $\boldsymbol{\rho}$ 。

第 3 步: 由前两步所得边缘分布和相关系数矩阵 $\boldsymbol{\rho}$, 使用 Nataf 变换法求得多输出联合概率密度函数 $f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y})$; 并积分求得联合分布函数 $F_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y})$; 选取合适的数值积分方法(例如 Gauss 积分)用少量样本点即可获得无条件方差 $V(U) = V(F_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}))$ 的精确估计 $\hat{V}(U)$ 。

第 4 步: 固定第 1 步中 X_i 于每个样本点 $x_{ki} (k = 1, \dots, p; i = 1, \dots, n)$ 处, 代入功能函数获得 $X_i = x_{ki}$ 条件下的多输出响应函数 $Y_{\mathbf{x}_{\sim i}|X_i=x_{ki}}(\mathbf{x}_{\sim i})$ 。同样使用基于分数矩的极大熵方法求得有条件边缘概率密度函数 $f_{Y_j|X_i=x_{ki}}(\mathbf{y})$ 及分布函数 $F_{Y_j|X_i=x_{ki}}(\mathbf{y}) (j = 1, \dots, m)$, 再使用 Nataf 变换法求得联合分布函数 $F_{\mathbf{Y}|X_i=x_{ki}}(\mathbf{y})$ 。根据 $U | X_i = F_{\mathbf{Y}|X_i}(\mathbf{y})$ 计算条件方差 $V(U | X_i)$ 的估计值 $\hat{V}(U | X_i = x_{ki})$, 然后计算差值 $\Delta_{ki} = |\hat{V}(U) - \hat{V}(U | X_i = x_{ki})|$ 。

第5步: ξ_i 可由 $\hat{\xi}_i = \sum_{k=1}^p \frac{\Delta_{ki} \cdot A_k}{\hat{V}(U)}$ 来估计,其中

A_k 为积分点 x_{ki} 对应的权值。

3 算例分析

3.1 数值算例

考虑如下多输出功能函数

$$\begin{cases} g_1(\mathbf{X}) = 2X_1 - 3X_2 + X_3 + 8 \\ g_2(\mathbf{X}) = X_1 + 2X_2 + 4X_3 - 23 \end{cases}$$

式中: X_1, X_2, X_3 均为正态变量,且相互独立,均值矢量为 $[3, 4, 6]$, 标准差均为 1。

3种指标计算结果如表1所示。

表中: δ_i 为文献[7]所提基于PDF的多输出重要性测度指标, η_i 为文献[9]所提基于CDF的多输出重要性测度指标。在该算例中, ξ_i 指标与 δ_i 指标以及 η_i 指标所得重要性排序结果一致。使用 Monte Carlo 法 3 个指标模型调用次数均为 $(nN_i + 1)N$ 。而所提方法模型调用次数为 $(np + 1)mN_{opt}$, 其中, N_{opt} 为使用基于分数矩的极大嫡方法求解边概率密度时的优化次数。一般地, $N_{opt} \leq N$ 。上述算例中, Monte Carlo 法模型调用次数为 $(3 \times 50\,000 + 1) \times 50\,000 \approx 7.5 \times 10^9$, 而所提方法的模型调用次数为 $(3 \times 7 + 1) \times 3 \times 25 = 1\,650$, 运算次数大大减少。

表1 数值算例分析结果

Tab. 1 Results of the numerical example

Measures	δ_i	η_i	ξ_i (MC method)	$\hat{\xi}_i$ (Proposed Method)
X_1	0.235(3)	0.022 5(3)	0.121 27(3)	0.127 89(3)
X_2	0.542(1)	0.112 7(1)	0.449 58(1)	0.468 23(1)
X_3	0.537(2)	0.082 5(2)	0.434 66(2)	0.427 61(2)

3.2 工程算例

图1所示为一屋架结构。屋架上弦杆和其他压杆为钢筋混凝土杆,下弦杆和其他拉杆为钢杆。

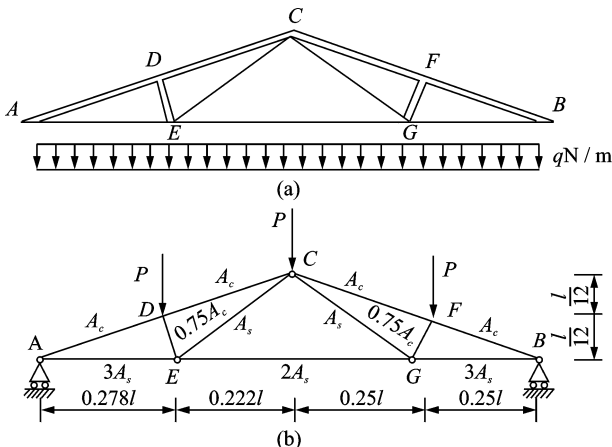


图1 屋架结构示意图

Fig. 1 Sketch map of the roof truss

假设屋架承受均布载荷 q , A_c, E_c, A_s, E_s, l 分别为 CD 段混凝土和 CE 段钢杆的横截面积、弹性模量和长度。 E_D, E_E 分别为 AD 段混凝土、AE 段钢杆弹性模量。由结构力学分析可得, AD 杆受压最危险, 内力 $F_{AD} = -1.185ql$; EC 杆受压最危险, 内力 $F_{EC} = 0.75ql$; C 点沿垂直地面方向位移为 $\Delta c = \frac{ql^2}{2} (\frac{3.81}{A_c E_c} + \frac{1.13}{A_s E_s})$ 。出于安全性和适用性, 以 C 点向下挠度不超过 3 cm 为约束条件。综上可得 3 个极限状态函数如下

$$g_1 = 0.03 - \frac{ql^2}{2} (\frac{3.81}{A_c E_c} + \frac{1.13}{A_s E_s})$$

$$g_2 = E_D A_c - 1.185ql$$

$$g_3 = E_E A_s - 0.75ql$$

假设所有变量均服从独立正态分布, 分布参数如表2所示, 不同指标的计算结果如表3所示。

表2 屋架结构基本随机变量分布参数

Tab. 2 Distribution parameters of basic random variables of the roof truss

随机变量	分布类型	均值	标准差
均布载荷 $q/$ ($N \cdot m^{-1}$)	正态	20 000	1 400
杆长 l/m	正态	12	0.12
截面积 A_c/m^2	正态	0.04	0.004 8
截面积 A_s/m^2	正态	9.82×10^{-4}	5.982×10^{-5}
弹性模量 E_D/Pa	正态	1.34×10^7	2.412×10^6
弹性模量 E_E/Pa	正态	3.35×10^8	4.02×10^7
弹性模量 E_c/Pa	正态	2×10^{10}	0.12×10^{10}
弹性模量 E_s/Pa	正态	1×10^{11}	0.06×10^{11}

表3 屋架算例3种指标计算结果

Tab. 3 Results of three indices of the roof truss example

随机变量	δ_i	η_i	ξ_i (MC method)	$\hat{\xi}_i$ (Proposed Method)
q	0.508(3)	0.018(3)	0.107(3)	0.105(3)
l	0.465(7)	0.003(7)	0.002(8)	0.003(8)
A_c	0.497(4)	0.010(4)	0.054(5)	0.054(5)
A_s	0.482(5)	0.008(5)	0.056(4)	0.061(4)
E_D	0.589(2)	0.023(2)	0.170(2)	0.177(2)
E_E	0.639(1)	0.039(1)	0.256(1)	0.258(1)
E_c	0.463(8)	0.002(8)	0.004(7)	0.003(7)
E_s	0.473(6)	0.006(6)	0.045(6)	0.042(6)

从计算结果来看, 本算例中 ξ_i 指标与 δ_i 指标以及 η_i 指标的重要性顺序基本一致。尤其是重要性排在前 3 位的变量, 3 种方法所得结果完全相同。存在微小的差异是因为 δ_i 指标以及 η_i 指标是完全基于概率分布的重要性测度指标, 而 ξ_i 指标是包含了分布信息(CDF)的基于方差的重要性测度指标, 其本质上是反映了输出响应分布函数方差与条件输出分布函数的方差之间的平均差异。这种差异一般不等同于完全使用联合密度函数或者

联合分布函数产生的差异,也不等同于对每一个输出响应单独直接求方差产生的差异,而是两种不同类型指标的一种综合。

4 结束语

本文提出了一种结构系统多输出情况下基于概率积分转化的重要性测度新指标,用以衡量输入变量不确定性对多输出响应整体分布函数变异性的影响。所提指标可以指导工程实际对输入变量进行重要性排序。新指标一方面使用概率积分转化,包含了多个输出响应联合分布函数的信息,另一方面以方差为标准,衡量联合分布函数的变异性受输入变量的影响。因而相比基于方差的多输出重要性测度指标,它包含了前者没有考虑的输出之间相关性的信息以及多输出的整体分布函数信息。相比完全基于概率分布的多输出重要性测度指标,它以方差来衡量变异性,求解过程更为简单直观。在求解新指标时,本文同时使用了基于分数矩的极大熵方法和 Nataf 变换法,大大提高了求解效率。

参考文献:

- [1] CAMPBELL K, MCKAY M D, WILLIAMS B J. Sensitivity analysis when model outputs are functions [J]. Reliability Engineering and System Safety, 2006, 91:1468-1472.
- [2] GARCIA-CABREJO O, VALOCCHI A. Global sensitivity analysis for multivariate output using polynomial chaos expansion[J]. Reliability Engineering and System Safety, 2014, 126:25-36.
- [3] LAMBONI M, MAKOWSKI D, LEHUGER S, et al. Multivariate global sensitivity analysis for dynamic crop models[J]. Field Crops Research, 2009, 113: 312-320.
- [4] LAMBONI M, MONOD H, MAKOWSKI D. Multivariate sensitivity analysis to measure global contribution of input factors in dynamic models[J]. Reliability Engineering and System Safety, 2011, 96:450-459.
- [5] GAMBOA F, JANON A, KLEIN T, et al. Sensitivity indices for multivariate outputs [J]. Comptes Rendus Mathematique, 2013, 351:307-310.
- [6] HELTON J C, DAVIS F J. Latin hypercube sampling and the propagation of uncertainty in analyses of complex systems[J]. Reliability Engineering and System Safety, 2003, 81(1): 23-69.
- [7] 崔利杰, 吕震宙, 赵新攀. 多失效模式下基本变量的重要性测度及解法[J]. 中国科学:物理学力学天文学, 2010, 40(12): 1532-1541.
CUI Lijie, LÜ Zhenzhou, ZHAO Xinpan. Importance measures of basic variable under multiple failure modes and their solutions[J]. Scientia Sinica Phys: Mech & Astron, 2010, 40(12):1532-1541.
- [8] BORGONOVO E. A new uncertainty importance measure [J]. Reliability Engineering and System Safety, 2007, 92: 771-784.
- [9] LI Luyi, LÜ Zhenzhou, WU Danqing. A new kind of sensitivity index for multivariate output[J]. Reliability Engineering and System Safety, 2015, 147: 123-131.
- [10] BORGONOVO E, ZENTER I, PELLEGGRI A, et al. On the importance of uncertain factors in seismic fragility assessment[J]. Reliability Engineering and System Safety, 2013, 109: 66-76.
- [11] BORGONOVO E, TARANTOLA S, PLISCHKE E, et al. Transformations and invariance in the sensitivity analysis of computer experiments[J]. Journal of the Royal Statistical Society: Series B(Statistical Methodology), 2014, 76:925-947.
- [12] BAUCCELLS M, BORGONOVO E. Invariant probabilistic sensitivity analysis[J]. Management Science, 2013, 59(11):2536-2549.
- [13] GENEST C, RIVEST L P. On the multivariate probability intergral transformation [J]. Statistical Probability Letter, 2001, 53:391-399.
- [14] ZHANG Xufang, PANDEY M D. Structural reliability analysis based on the concepts of entropy, fractional moment and dimensional reduction method[J]. Structural Safety, 2013, 43:28-40.
- [15] 吕震宙, 宋述芳, 李洪双, 等. 结构机构可靠性及可靠性灵敏度分析[M]. 北京:科学出版社, 2009.
- [16] LIU P L, DER KIUREGHIAN A. Multivariate distribution models with prescribed marginal and covariance[J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 1986, 1(2):105-112.

