

DOI:10.16356/j.1005-2615.2017.01.018

径向基点插值法计算效率的改进方法

胡海浪¹ 曹子龙¹ 关玉璞¹ 陈伟^{1,2}

(1. 南京航空航天大学江苏省航空动力系统重点实验室, 南京, 210016;

2. 先进航空发动机协同创新中心, 南京, 210016)

摘要:伽辽金弱形式和径向基点插值法(Radial basis point interpolation method, RPIM)的无网格法在解决偏微分方程问题中表现出良好的性能,但是在同时提高计算效率和精度方面存在困难。为了提高此类无网格法的计算效率,本文定义了一种基于背景网格的定义域,在计算定义域内的积分点插值时采用同一批节点,在插值计算过程中减少了部分矩阵计算次数,降低了 RPIM 无网格法的计算时间。在提高计算精度方面,本文提出一种杂交应力的无网格方法,用 Hellinger-Reissner(H-R)变分原理推导求解方程,采用无网格方法求解。数值算例表明,本文方法计算二维固体力学时,在具备良好的计算精度的同时提高了计算速度,具有较高的实际应用价值。

关键词:计算力学;无网格法;径向基点插值法;杂交应力

中图分类号:O343.1

文献标志码:A

文章编号:1005-2615(2017)01-0117-08

Improvement of Radial Point Interpolation Method in Computational Efficiency

HU Hailang¹, CAO Zilong¹, GUAN Yupu¹, CHEN Wei^{1,2}

(1. Jiangsu Province Key Laboratory of Aerospace Power System, Nanjing University of
Aeronautics & Astronautics, Nanjing, 210016, China;

2. Collaborative Innovation Center of Advanced Aero-Engine,
Nanjing, 210016, China)

Abstract: The meshless method with Galerkin weak form and radial basis point interpolation method (RPIM) shows good performance in solving partial differential equation (PDE), but it is difficult to improve the computational efficiency and accuracy at the same time. In order to improve the efficiency of the meshless method, this paper sets up a domain based on the background grid, and uses the same node during the process of integral interpolation within the domain, which can reduce some matrix computations and computing time of the RPIM method. In terms of accuracy, this paper proposes a meshless method of hybrid stress, i. e. , using Hellinger-Reissner (H-R) variational principle to derive the solving equations and using meshless method to solve the problem. Numerical example demonstrates that the new method has the higher computational accuracy and the faster computational speed when calculating two-dimensional solid mechanics, thus it has a high practical application value.

Key words: computational mechanics; meshless method; RPIM; hybrid stress

无网格法的近似函数是基于节点的近似,相比于有限元法,无网格方法降低了对网格的依赖性。

无网格法的主要近似方案有:移动最小二乘近似^[1]、点插值法^[2](Point interpolation method,

收稿日期:2016-03-18;修订日期:2016-09-20

通信作者:陈伟,男,教授,博士生导师,E-mail:nuaahlfr@163.com。

引用格式:胡海浪,曹子龙,关玉璞,等. 径向基点插值法计算效率的改进方法[J]. 南京航空航天大学学报,2017,49(1):117-124. HU Hailang, CAO Zilong, GUAN Yupu, et al. Improvement of radial point interpolation method in computational efficiency[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2017, 49(1): 117-124.

PIM)、重构核法子法^[3](Reproducing kernel particle method, RKPM)、径向基点插值法(Radial basis point interpolation method, RPIM)^[4,5]、单位分解法^[6](Partition of unity method, PUM)和自然邻接点插值^[7](Natural neighbor interpolation, NNR)等。考虑到移动最小二乘法得到的形函数不满足 Kronecker delta 函数性质,导致本质边界条件难以施加^[8]。为此, Liu 等给出点插值方法^[9-10],将其用于伽辽金全局弱势方案。但是点插值法采用多项式作为基函数,当节点按一定规律分布时,在计算过程中有时会出现矩阵奇异的情况。基函数采用径向基函数时,可克服这一缺点,但纯粹的径向基函数插值不具有二阶一致性,为此可在径向基函数插值时引入多项式基^[11],同时为了提高求解效率,一般采用局部形式的插值方法^[12]。相比于其他近似方案,径向基函数插值的优点在于它没有矩阵奇异性的问题,同时满足 Kronecker delta 函数性质以及二阶一致性。

相比于移动最小二乘法, RPIM 采用的基函数较为复杂,同时在使用 RPIM 近似时需要的节点数量较多,导致 RPIM 无网格法计算速度较慢。为了提高 RPIM 无网格法的求解效率, Hu 等^[13]将求解域分解为任意形状的子域,各子域之间的节点没有联系,减少了求解自由度。Afsari 等^[14]引入小波框架下的多尺度无网格技术,去除 RPIM 近似时的求逆步骤,减少了计算时间。张琰等^[15]提出了 RPIM 无网格法与有限元法耦合计算方法,但新方法已不是纯粹的无网格法,失去了一些无网格法的一些优势。因此, Cao 等^[16]将 RPIM 无网格法与无网格伽辽金法耦合,在一定程度上提高了计算精度,同样降低了一定的计算时间。本文在使用网格积分的 RPIM 方法中,提出在同一网格中的积分点的插值计算采用同一组节点,减少了插值过程中部分矩阵的计算次数,可降低 RPIM 无网格法的计算时间。然而,改变了插值计算方案可能降低 RPIM 无网格法的计算精度。在有限元法中,最初的单元都是基于位移求解的,称为位移元。位移元广泛应用后,计算精度低的问题逐渐显现,为了提高计算精度,一些杂交应力单元^[17-22]被提出来,表现出很好的计算精度。本文将基于 Hellinger-Reissner(H-R)变分原理推出的求解方程应用于 RPIM 无网格法中,以提高计算求解精度。

1 径向基函数插值

1.1 径向基函数

径向基(Radial basis function, RBF)是一类以

计算点和节点之间的距离为自变量的函数。在二维平面问题和三维问题中,计算点 X (坐标为 (x, y) 或 (x, y, z)) 和节点 X_i (坐标为 (x_i, y_i) 或 (x_i, y_i, z_i)) 之间的距离分别为

$$r_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} \quad (1)$$

$$r_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2} \quad (2)$$

径向基函数有很多种类,常见的有 4 种,分别为复合二次(Multiquadrics)函数、高斯(Gaussians)函数、逆复合二次(Reciprocal multiquadrics)函数和薄板样条(Thin-plate splines)函数,见表 1。

表 1 径向基函数

Tab. 1 Radial basis functions

名称	公式
Multiquadrics	$R_i(\mathbf{x}) = (c^2 + r_i^2)^{\frac{1}{2}}$
Gaussians	$R_i(\mathbf{x}) = \exp(-cr_i^2)$
Reciprocal multiquadrics	$R_i(\mathbf{x}) = (c^2 + r_i^2)^{-\frac{1}{2}}$
Thin-plate splines	$R_i(\mathbf{x}) = r_i^{2\beta} \log r_i$

表 1 中: c 为大于零的常数; β 为整数。另外复合二次函数和逆复合二次函数都属于广义复合二次函数,即

$$R_i(\mathbf{x}) = (\alpha d_c + r_i^2)^q \quad (3)$$

式中: d_c 为计算点在其局部支持域中与所有节点间距相关的特征长度,通常为支持域的节点平均间距; α 和 q 为 2 个形状参数。一般情况下,在二维固体力学问题中, $\alpha = 1$, $q = 1.03$ 为 MQ 函数的最优参数。本文的算例采用这两个值。

1.2 径向基函数插值

域 Ω 中共有 n 个数据对 $(\mathbf{x}_1, u_1), (\mathbf{x}_2, u_2), \dots, (\mathbf{x}_n, u_n)$, 采用添加多项式基的径向基点插值方法, 函数 $u(\mathbf{x})$ 在域 Ω 中的近似函数 $u^h(\mathbf{x})$ 可以表示为

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n R_i(\mathbf{x}) a_i + \sum_{i=1}^m p_i(\mathbf{x}) b_i = \mathbf{R}^T(\mathbf{x}) \mathbf{a} + \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{b} \quad (4)$$

式中: m 为多项式基函数的个数; a_i 和 b_i 为待定常数。式中有 $n+m$ 个未知数, 令近似函数 $u^h(\mathbf{x})$ 在节点 x_i 处的值等于函数 $u(\mathbf{x})$ 在该节点处的值 u_i , 可得 n 个线性方程, 写成矩阵的形式有

$$\mathbf{R}_0 \mathbf{a} + \mathbf{P}_m \mathbf{b} = \mathbf{u}_s \quad (5)$$

式中

$$\mathbf{R}_0 = \begin{bmatrix} R_1(r_1) & R_2(r_1) & \cdots & R_n(r_1) \\ R_1(r_2) & R_2(r_2) & \cdots & R_n(r_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_1(r_n) & R_2(r_n) & \cdots & R_n(r_n) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_m = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & \cdots & p_m(x_1) \\ 1 & x_2 & \cdots & p_m(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & p_m(x_n) \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\mathbf{a}^T = [a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n], \mathbf{b}^T = [b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_n]$$

$$\mathbf{u}_s^T = [u_1 \ u_2 \ \cdots \ u_n] \quad (7)$$

再引入 m 个约束方程

$$\sum_{i=1}^n p_j(x_i) a_i = \mathbf{P}_m^T \mathbf{a} = 0 \quad j=1,2,\dots,m \quad (8)$$

由式(5)得

$$\mathbf{a} = \mathbf{R}_0^{-1} \mathbf{u}_s - \mathbf{R}_0^{-1} \mathbf{P}_m \mathbf{b} \quad (9)$$

将式(9)代入式(8)得

$$\mathbf{b} = (\mathbf{P}_m^T \mathbf{R}_0^{-1} \mathbf{P}_m)^{-1} \mathbf{P}_m^T \mathbf{R}_0^{-1} \mathbf{u}_s \quad (10)$$

再将式(10)回代到式(9)得

$$\mathbf{a} = [\mathbf{R}_0^{-1} - \mathbf{R}_0^{-1} \mathbf{P}_m (\mathbf{P}_m^T \mathbf{R}_0^{-1} \mathbf{P}_m)^{-1} \mathbf{P}_m^T \mathbf{R}_0^{-1}] \mathbf{u}_s \quad (11)$$

令

$$\mathbf{C}_a = [\mathbf{R}_0^{-1} - \mathbf{R}_0^{-1} \mathbf{P}_m (\mathbf{P}_m^T \mathbf{R}_0^{-1} \mathbf{P}_m)^{-1} \mathbf{P}_m^T \mathbf{R}_0^{-1}] \quad (12)$$

$$\mathbf{C}_b = (\mathbf{P}_m^T \mathbf{R}_0^{-1} \mathbf{P}_m)^{-1} \mathbf{P}_m^T \mathbf{R}_0^{-1} \quad (13)$$

则 RPIM 方法的插值表达式为

$$\mathbf{N} = \mathbf{R}^T(\mathbf{x}) \mathbf{C}_a + \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{C}_b \quad (14)$$

形函数的导数为

$$\mathbf{N}_{,k} = \mathbf{R}_{,k}^T(\mathbf{x}) \mathbf{C}_a + \mathbf{p}_{,k}^T(\mathbf{x}) \mathbf{C}_b \quad (15)$$

1.3 基于网格定义域的 RPIM 方法

在 RPIM 方法中,点 \mathbf{x} 的近似函数由其定义域 Ω_x 中的节点构造。对点 \mathbf{x} 插值计算有贡献的节点确定方法有两种,以二维问题为例:

(1)先定义节点的定义域。如图 1(a)所示,节点 \mathbf{x}_i 定义域一般取半径为 $d_i = scale \times d_{ci}$ 的圆形或长宽分别为 $d_{xi} = scale_x \times d_{ci}$ 和 $d_{yi} = scale_y \times d_{ci}$ 的矩形区域,其中, d_{ci} 为节点 \mathbf{x}_i 处的节点平均距离, $scale, scale_x$ 和 $scale_y$ 是大于 1 的乘子,定义域覆盖计算点的节点即为点 \mathbf{x} 定义域 Ω_x 中的节点。

(2)直接定义计算点 \mathbf{x} 的定义域 Ω_x 。如图 1(b)所示,如以点 \mathbf{x} 为中心的矩形域,矩形的长和宽分别取为 $d_x = scale_x \times d_c$ 和 $d_y = scale_y \times d_c$, d_c 为计算点 \mathbf{x} 处的节点平均距离。本文参考的是第 2 种方法。

在有限元方法中,通过划分网格,将求解域离散成一系列单元,对全域的积分等价于对各单元的积分之和。而伽辽金型无网格方法中,域是通过节点离散的,因此积分方案有所不同,常见的积分方案有:节点积分、有限元网格积分、背景网格积分和移动最小二乘积分。本文采用了有网格的积分方案,此方法是对每个网格采用高斯积分的方案。

一般的 RPIM 无网格法研究中,对于积分网

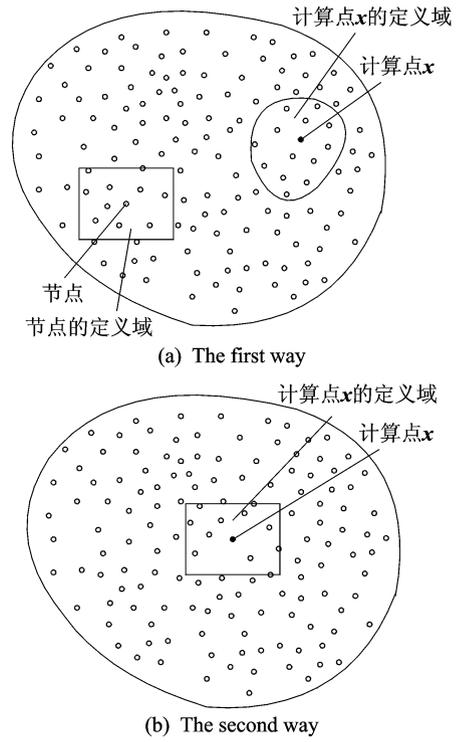


图 1 计算点的定义域定义方法

Fig. 1 Two ways to define support domain of point x

格内的每个高斯积分点,都要分别搜索该积分点对应的定义域内的节点,而本文定义每个网格内的积分点采用同一组节点计算形函数及其导数。因此定义了网格的定义域,如图 2 所示,以网格中点为中心的矩形域,矩形的长和宽分别取为 $d_x = scale_1 \times d_c$ 和 $d_y = scale_2 \times d_c$ 。在对网格内的积分点进行插值时,由于式(14,15)中的矩阵 \mathbf{C}_a 和 \mathbf{C}_b 是由矩阵 \mathbf{P}_m 和 \mathbf{R}_0 通过运算得到的,而由式(6)可知,当节点相同时,矩阵 \mathbf{P}_m 和 \mathbf{R}_0 相同,因此采用网格定义域作为该网格内所有积分点的定义域方法可以减少计算矩阵 \mathbf{C}_a 和 \mathbf{C}_b 的次数,由此可降低计算量。

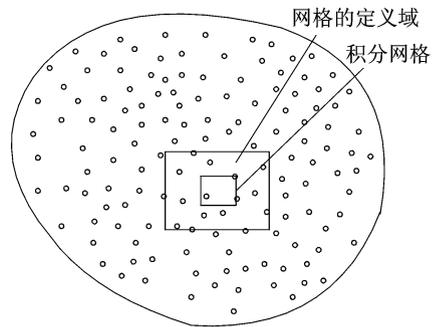


图 2 网格定义域的定义

Fig. 2 Definition of support domain of a grid

2 伽辽金型无网格法

以二维线弹性力学问题为例,二维平面力学问

题的控制方程为

$$\begin{cases} \text{平衡方程} & \sigma_{ij,j} + F_i = 0 & \text{域 } \Omega \text{ 内} \\ \text{力边界条件} & \sigma_{ij}n_j - \bar{T}_i = 0 & \text{面力边界 } \Gamma_t \text{ 上} \\ \text{位移边界条件} & u_i - \bar{u}_i = 0 & \text{位移边界 } \Gamma_u \text{ 上} \\ \text{几何方程} & \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) & \text{域 } \Omega \text{ 内} \\ \text{物理方程} & \sigma_{ij} = \mathbf{D}_{ijkl}\varepsilon_{kl} & \text{域 } \Omega \text{ 内} \end{cases} \quad (16)$$

式中: \bar{T} 为力边界上的表面力; \bar{u} 为位移边界上的已知位移; \mathbf{D}_{ijkl} 为本构张量。

原始的 RPIM 无网格法采用最小势能原理进行推导。根据最小势能原理, 伽辽金全局弱形式的变分方程为

$$\begin{aligned} \delta\Pi = & \int_{\Omega} \delta u_i (\sigma_{ij,j} + F_i) d\Omega - \\ & \int_{\Gamma_t} \delta u_i (\sigma_{ij}n_j - \bar{T}_i) d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

对式(17)第1项分部积分得

$$\begin{aligned} \delta\Pi = & \int_{\Omega} (-\delta u_{i,j}\sigma_{ij} + \delta u_i F_i) d\Omega + \\ & \int_{\Gamma_u} \delta u_i \sigma_{ij}n_j d\Gamma + \int_{\Gamma_t} \delta u_i \bar{T}_i d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

如果位移边界条件自动满足, 则式(18)可简化为

$$\delta\Pi = \int_{\Omega} (-\delta u_{i,j}\sigma_{ij} + \delta u_i F_i) d\Omega + \int_{\Gamma_t} \delta u_i \bar{T}_i d\Gamma = 0 \quad (19)$$

考虑到应力张量的对称性有

$$\delta\Pi = \int_{\Omega} (-\delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} + \delta \mathbf{u}^T \mathbf{F}) d\Omega + \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{T}} d\Gamma = 0 \quad (20)$$

位移插值为

$$\mathbf{u} = \mathbf{N} \mathbf{d} \quad (21)$$

式中

$$\begin{aligned} \mathbf{d} &= [u_x^1 \quad u_y^1 \quad u_x^2 \quad u_y^2 \quad \cdots \quad u_x^n \quad u_y^n]^T \quad (22) \\ \mathbf{N} &= \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \cdots & N_n & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & \cdots & 0 & N_n \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (23)$$

因此应变为

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \mathbf{d} \quad (24)$$

式中

$$\mathbf{B} = [B_1 \quad B_2 \quad \cdots \quad B_n] \quad (25)$$

$$\mathbf{B}_k^T = \begin{bmatrix} N_{k,x} & 0 & N_{k,y} \\ 0 & N_{k,y} & N_{k,x} \end{bmatrix} \quad (26)$$

将式(21, 2, 4)和物理方程 $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}$ 代入式(20), 有

$$\begin{aligned} \delta\Pi = & \delta \mathbf{d}^T \left[-\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega + \right. \\ & \left. \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{F} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{T}} d\Gamma \right] = 0 \end{aligned} \quad (27)$$

其中, 对于平面应力问题有

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (28)$$

式中: E 为弹性模量; ν 为泊松比。考虑到 $\delta \mathbf{d}$ 的任意性, 有

$$\mathbf{K} \mathbf{d} = \mathbf{Q} \quad (29)$$

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega \quad (30)$$

$$\mathbf{Q} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{F} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{T}} d\Gamma \quad (31)$$

以上方程是通过最小势能原理推导而得。

采用 H-R 变分原理来推导线弹性力学问题, 推导过程如下, 变分泛函为

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{HR}} = & \int_{\Omega} \left[-\frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{S} \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}^T (\mathbf{D} \mathbf{u}) - \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{F}} \right] dV - \\ & \int_{\Gamma_t} \bar{\mathbf{T}}^T \mathbf{u} dS - \int_{\Gamma_u} \mathbf{T}^T (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) dS \end{aligned} \quad (32)$$

求解域中任意计算点的应力, 由此计算点的定义域内的节点应力进行插值计算求得

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{P} \boldsymbol{\beta} \quad (33)$$

式中

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \cdots & N_n & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \cdots & 0 & N_n & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & \cdots & 0 & 0 & N_n \end{bmatrix}^T \quad (34)$$

设位移边界条件自动满足, 并将式(21, 33)代入式(32)得

$$\Pi_{\text{HR}} = -\frac{1}{2} \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{H} \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{G} \mathbf{d} - \mathbf{Q}^T \mathbf{d} \quad (35)$$

$$\mathbf{H} = \int_{\Omega} \mathbf{P}^T \mathbf{S} \mathbf{P} dV \quad (36)$$

$$\mathbf{G} = \int_{\Omega} \mathbf{P}^T \mathbf{B} dV \quad (37)$$

缩掉参数 $\boldsymbol{\beta}$, 有

$$\frac{\partial \Pi_{\text{HR}}}{\partial \boldsymbol{\beta}} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\beta} = \mathbf{H}^{-1} \mathbf{G} \mathbf{d} \quad (38)$$

代回式(35), 有

$$\Pi_{\text{HR}} = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{G} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{G} \mathbf{d} - \mathbf{Q}^T \mathbf{d} \quad (39)$$

由式(39)可得到待解方程

$$\frac{\partial \Pi_{\text{HR}}}{\partial \mathbf{d}} = 0 \Rightarrow (\mathbf{G} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{G}) \mathbf{d} = \mathbf{Q} \quad (40)$$

由上述推导可以看出, 最小势能原理求解的推导中消除了应力项, 而 H-R 变分原理的求解推导中保留了应力项, 这两种方法求解的效果将在下文的算例中进行比较。

3 算例

3.1 悬臂梁

如图3所示悬臂梁, 受端部载荷作用的悬臂梁

的解析解为

$$u_x = \frac{Py}{6EI} \left[(6L - 3x)x + (2 + \nu) \left(y^2 - \frac{D^2}{4} \right) \right] \quad (41)$$

$$u_y = -\frac{P}{6EI} \left[3\nu y^2 (L - x) + \frac{1}{4} (4 + 5\nu) D^2 x + x^2 (3L - x) \right] \quad (42)$$

$$\sigma_x = \frac{P(L - x)y}{I} \quad (43)$$

$$\sigma_y = 0 \quad (44)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{P}{2I} \left(\frac{D^2}{4} - y^2 \right) \quad (45)$$

式中: E 为弹性模量; ν 为泊松比; I 为悬臂梁截面惯性矩; P 为端部载荷。

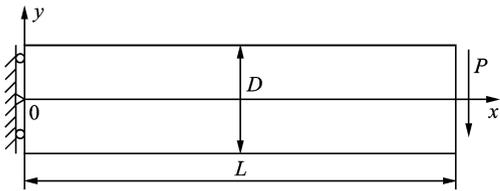


图 3 悬臂梁
Fig. 3 Cantilever beam

计算中, 相关参数取为 $E = 1\ 000\ \text{Pa}$, $\nu = 0.3$, $P = 6\ \text{N}$, $D = 12\ \text{m}$, $L = 48\ \text{m}$ 。节点分布方案如图 4 所示。采用 3 种方案进行求解计算。方案 1: 基于节点定义域的 RPIM 方法(原始 RPIM 方法); 方案 2: 基于网格定义域的 RPIM 方法; 方案 3: 基于网格定义域的 RPIM 方法, 同时使用 HR 变分原理推导的求解方程对问题进行求解。悬臂梁的积分网格如图 5 所示, 对于每个网格都采用 4×4 的高斯积分方案。

本文影响域采用矩形区域, $scale_1 = scale_2 = 3$, 梁左边界和右边界的边界条件按照精确解(式

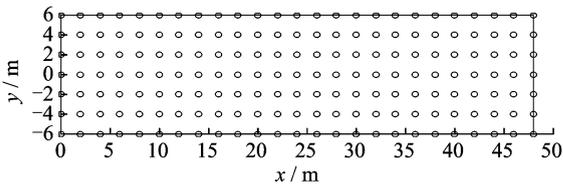


图 4 悬臂梁 175 个离散点的无网格模型

Fig. 4 Meshless models with 175 data points of cantilever beam

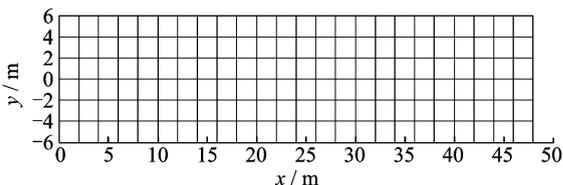


图 5 悬臂梁积分网格

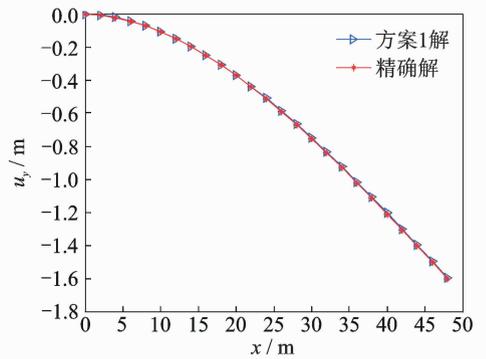
Fig. 5 Background grids of cantilever beam

(41~45)施加。为了进行误差分析, 定义如下两个误差范数

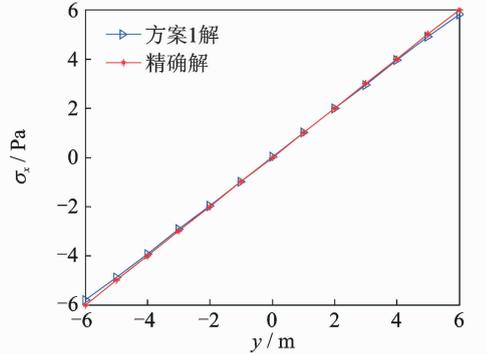
$$L_u = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^N (\mathbf{u}_i^h - \mathbf{u}_i)^T (\mathbf{u}_i^h - \mathbf{u}_i)}}{\sqrt{\sum_{i=1}^N \mathbf{u}_i^T \mathbf{u}_i}} \times 100\% \quad (46)$$

$$L_\sigma = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^N (\boldsymbol{\sigma}_i^h - \boldsymbol{\sigma}_i)^T (\boldsymbol{\sigma}_i^h - \boldsymbol{\sigma}_i)}}{\sqrt{\sum_{i=1}^N \boldsymbol{\sigma}_i^T \boldsymbol{\sigma}_i}} \times 100\% \quad (47)$$

方案 1 沿着 $y=0$ 处, y 方向的位移求解结果, 以及沿着 $x = \frac{L}{2}$ 处, x 方向的应力结果分别如图 6(a, b) 所示。



(a) Displacement u_y along $y=0$



(b) Stress σ_x along $x=L/2$

图 6 方案 1 的计算结果

Fig. 6 Numerical results of plan 1

影响半径 $r = scale_x = scale_y$ 从 1.5~3.0 变化时 3 种方案的计算误差和计算时间如表 2 所示。计算结果表明, 除了少量数据有偏差, 位移与应力的计算误差随着影响半径的增大而减小。在 $r = 1.5$, $r = 2.0$ 和 $r = 3.0$ 时, 方案 3 的位移误差最小; $r = 1.5$ 时, 方案 3 的应力误差最小; $r = 2.0$ 和 $r = 3.0$ 时, 3 种方案的计算误差几乎相同。计算时间随着影响半径的增大而增长, 整体看来方案 2 的计算时间最短, 方案 1 的计算时间最长, 方案 3 的计算时间与方案 2 的计算时间相近, 方案 3 的计算误差整体上低于其余两个方案。

表2 悬臂梁算例3种方案计算结果的比较

Tab.2 Comparison of three plans for cantilever beam

影响半径	方案	$L_u/\%$	$L_\sigma/\%$	计算时间/s
$r=1.5$	方案1	2.83	5.85	0.52
	方案2	1.70	4.01	0.27
	方案3	0.19	3.11	0.27
$r=2.0$	方案1	1.76	4.07	0.64
	方案2	1.76	4.07	0.31
	方案3	1.64	4.08	0.33
$r=2.5$	方案1	0.99	1.05	0.88
	方案2	1.76	4.07	0.31
	方案3	1.64	4.08	0.33
$r=3.0$	方案1	0.47	2.64	1.22
	方案2	0.47	2.64	0.42
	方案3	0.41	2.72	0.54

考虑节点不规则分布情况,不规则节点分布悬臂梁如图7所示。当影响半径 $r=3$ 时,计算位移与应力的误差结果,如表3所示。

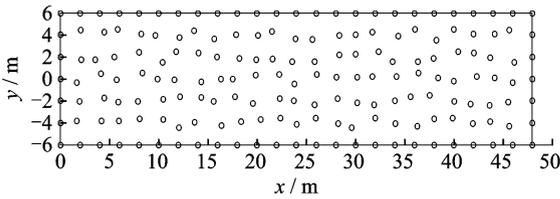


图7 175个不规则分布离散点的无网格模型

Fig.7 Meshless models with 175 irregular data points

表3 不规则节点分布时的计算结果

Tab.3 Computational results for irregularly node distribution

方案	$L_u/\%$	$L_\sigma/\%$	计算时间/s
方案1	0.54	3.15	1.29
方案2	0.54	3.19	0.42
方案3	0.48	3.16	0.56

计算结果表明,不规则节点分布时方案3的位移误差最小,3种方案的应力计算误差接近;方案2的计算时间最短,方案1的计算时间最长,方案3的计算时间和方案2的接近。另外,不规则节点分布比规则节点分布的计算精度低。

3.2 具有中心圆孔的无限大平板

在 x 方向受均匀拉伸 σ_0 ,具有半径为 a 的中心圆孔的无限大平板,其解析解为

$$u_r = \frac{\sigma_0}{4G} \left[r \left(\frac{\kappa - 1}{2} + \cos 2\theta \right) + \frac{a^2}{r} \left[1 + (1 + \kappa) \cos 2\theta \right] - \frac{a^4}{r^3} \cos 2\theta \right] \quad (48)$$

$$u_\theta = \frac{\sigma_0}{4G} \left[(1 - \kappa) \frac{a^2}{r} - r - \frac{a^4}{r^3} \right] \sin 2\theta \quad (49)$$

$$\sigma_x = \sigma_0 \left[1 - \frac{a^2}{r^2} \left(\frac{3}{2} \cos 2\theta + \cos 4\theta \right) + \frac{3a^4}{2r^4} \cos 4\theta \right] \quad (50)$$

$$\sigma_y = -\sigma_0 \left[\frac{a^2}{r^2} \left(\frac{1}{2} \cos 2\theta - \cos 4\theta \right) - \frac{3a^4}{2r^4} \cos 4\theta \right] \quad (51)$$

$$\tau_{xy} = -\sigma_0 \left[\frac{a^2}{r^2} \left(\frac{1}{2} \sin 2\theta + \sin 4\theta \right) + \frac{3a^4}{2r^4} \sin 4\theta \right] \quad (52)$$

式中: (r, θ) 为极坐标,其坐标原点位于圆孔中心; G, κ 表达式为

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (53)$$

$$\kappa = 3 - 4\nu (\text{平面应变}) \quad (54)$$

$$\kappa = \frac{3 - \nu}{1 + \nu} (\text{平面应力}) \quad (55)$$

考虑到对称性,取模型的右上部分按平面应力问题进行分析。需要将相关参数取为 $E=1\ 000\ \text{Pa}, \nu=0.3, \sigma_0=1\ \text{Pa}, a=1\ \text{m}$ 。节点分布方案即离散点的无网格模型如图8所示,积分网格如图9所示,对于每个网格采用 4×4 的高斯积分方案。在平板的下边界和左边界分别施加对称的边界条件,在中心圆孔边界 $r=a$ 处施加自由边界条件。在板的右边界和上边界按式(50~52)给出的应力施加边界条件。

图10比较了不同方法得到的板左边界上各点的正应力 σ_x (图10(a)) 和板下边界上各点的正应

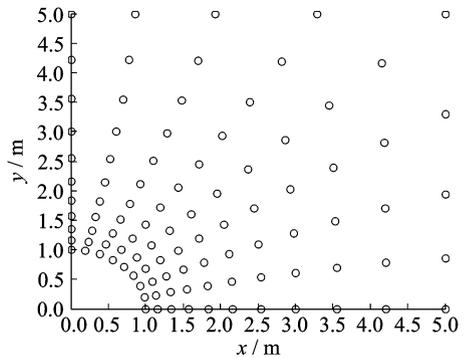


图8 平板右上部分55个离散点的无网格模型

Fig.8 Meshless models with 55 data points on upper-right portion of flat

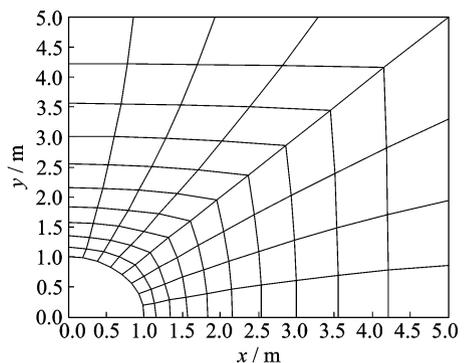


图9 平板右上部分积分网格

Fig.9 Background grids on upper-right portion of flat

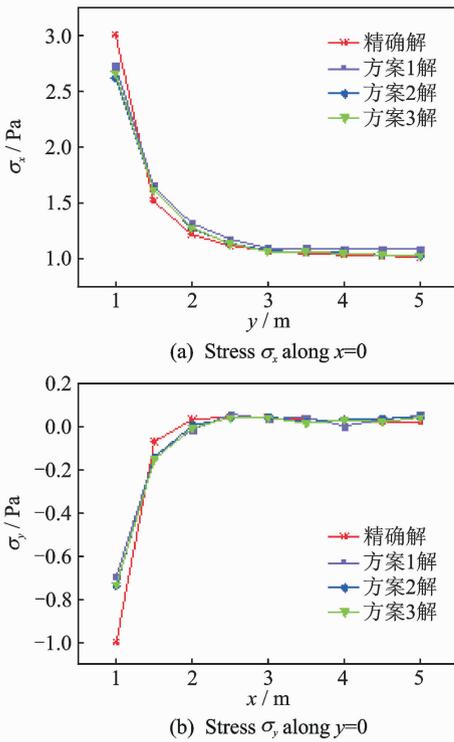


图 10 3 种方案的计算结果

Fig. 10 Numerical results of three plans

力 σ_y (图 10(b))。不同方法的误差和计算时间如表 4 所示。由表 4 可见,对于两种计算误差,方案 3 的计算精度都处于中等水平,但方案 1 和方案 2 都有某个应力的计算精度处于最差。另外方案 1 的计算时间较长,后两个方案的计算时间接近。

表 4 平板算例 3 种方案计算结果的比较

Tab. 4 Comparison of three plans for flat

方案	$L_{\sigma_x}/\%$	$L_{\sigma_y}/\%$	计算时间/s
方案 1	7.87	31.33	0.57
方案 2	9.09	27.03	0.27
方案 3	8.36	27.92	0.28

4 结束语

本文在研究 RPIM 无网格法计算效率时发现,在使用有网格计算积分时,传统的方法在每个积分点都需要进行重新搜索节点,再进行插值,这一过程增大了计算量。本文通过将同一网格中的积分点用同一组节点插值,降低了 RPIM 无网格法的计算时间,另外将 H-R 变分原理推导的求解方程引入 RPIM 方法。由算例结果可以看出,该方法可提高改变积分方式后的 RPIM 无网格法的计算精度,同时对计算时间只产生很小的影响。

参考文献:

- [1] MIRZAEI D, DEGHAN M. A meshless based method for solution of integral equations[J]. Applied Numerical Mathematics, 2010, 60(3): 245-262.
- [2] SHAMEKHI A, SADEGHY K. Cavity flow simulation of Carreau-Yasuda non-Newtonian fluids using PIM meshfree method [J]. Applied Mathematical Modelling, 2009, 33(11): 4131-4145.
- [3] CHENG R J, LIEW K M. A meshless analysis of three-dimensional transient heat conduction problems [J]. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2012, 36(2): 203-210.
- [4] WENDLAND H. Meshless Galerkin methods using radial basis functions[J]. Mathematics of Computation of the American Mathematical Society, 1999, 68 (228): 1521-1531.
- [5] KORMANN K, Larsson E. An RBF-Galerkin approach to the time-dependent Schrödinger equation [R]. Technical Report 2012-024, 2012.
- [6] LE P B, RABCZUK T, MAI-DUY N, et al. A moving IRBFN-based integration-free meshless method [J]. CMES: Computer Modeling in Engineering and Sciences, 2010, 61(1): 63-109.
- [7] LI Qinghua, CHEN Shenshen, KOU Guangxiao. Transient heat conduction analysis using the MLPG method and modified precise time step integration method[J]. Journal of Computational Physics, 2011, 230(7): 2736-2750.
- [8] 程玉民. 移动最小二乘法研究进展与述评[J]. 计算机辅助工程, 2009, 18(2): 5-11. CHENG Yumin. Advances and review on moving least-square methods[J]. Computer Aided Engineering, 2009, 18(2): 5-11.
- [9] LIU Guirong. Mesh free methods: Moving beyond the finite element method[M]. USA: CRC Press, 2002.
- [10] LIU Guirong, GU YuanTong. A point interpolation method for two-dimensional solids[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2001, 50(4): 937-951.
- [11] POWELL M J. The theory of radial basis function approximation in 1990 [J]. Advances in Numerical Analysis, 1992, 2: 105-210.
- [12] WANG Jianguo, LIU Guirong. A point interpolation meshless method based on radial basis functions[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2002, 54(11): 1623-1648.

- [13] HU Dean, LI Yangyang, HAN Xu, et al. A sub-domain RPIM with condensation of degree of freedom [J]. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2013, 37(9): 1161-1168.
- [14] AFSARI A, MOVAHHEDI M. Proposing a wavelet based meshless method for simulation of conducting materials[J]. *Progress in Electromagnetics Research M*, 2013, 31: 159-169.
- [15] 张琰, 王建国, 张丙印. 径向基点插值无网格法与有限元耦合法[J]. *清华大学学报(自然科学版)*, 2008, 48(6): 951-954.
ZHANG Yan, Wang Jianguo, Zhang Bingyin. Coupled FEM and meshless radial point interpolation method[J]. *J Tsinghua Univ (Sci & Tech)*, 2008, 48(6): 951-954.
- [16] CAO Yang, YAO Linyuan, YIN Yu. New treatment of essential boundary conditions in EFG method by coupling with RPIM[J]. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2013, 26(3): 302-316.
- [17] RAH K, VAN PAEPEGEM W, HABRAKEN A M, et al. A partial hybrid stress solid-shell element for the analysis of laminated composites[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2011, 200(49): 3526-3539.
- [18] WANG H, QIN Q. Fundamental-solution-based hybrid FEM for plane elasticity with special elements [J]. *Computational Mechanics*, 2011, 48(5): 515-528.
- [19] RAH K, van PAEPEGEM W, DEGRIECK J. A novel versatile multilayer hybrid stress solid-shell element[J]. *Computational Mechanics*, 2013, 51(6): 825-841.
- [20] MA Xu, CHEN Wanji. Refined 18-DOF triangular hybrid stress element for couple stress theory[J]. *Finite Elements in Analysis and Design*, 2013, 75: 8-18.
- [21] REZAIEE-PAJANDA M, KARKONB M. Hybrid stress and analytical functions for analysis of thin plates bending. [J]. *Latin American Journal of Solids & Structures*, 2014, 11(4): 556-579.
- [22] MA Xu, CHEN Wanji. 24-DOF quadrilateral hybrid stress element for couple stress theory[J]. *Computational Mechanics*, 2014, 53(1): 159-172.

