

DOI:10.16356/j.1005-2615.2016.06.008

修形面齿轮传动系统的动态特性分析

李晓贞 高 瞩 王晓军

(常州工学院机械与车辆工程学院,常州,213002)

摘要:为改善面齿轮传动系统的动态性能,研究了面齿轮传动系统的齿廓修形技术,推导了齿廓修形的圆柱齿轮、刀具齿轮和面齿轮的齿廓方程,建立了包含齿侧间隙、时变啮合刚度、修形参数、综合相对误差、支承刚度和支撑阻尼等参数的面齿轮传动系统振动模型,采用 Runge-Kutta 数值积分法对齿廓修形的面齿轮传动系统求解。研究结果表明:当齿条刀具的抛物线修形系数变化时,系统的动态响应特性将出现简谐响应、次谐波响应和混沌响应 3 类稳态响应。

关键词:面齿轮;齿廓修形;动态响应

中图分类号:TH132.4 **文献标志码:**A **文章编号:**1005-2615(2016)06-0828-07

Dynamic Characteristics of Modified Face-Gear Drive System

Li Xiaozhen, Gao Zhu, Wang Xiaojun

(School of Mechanical and Automotive, Changzhou Institute of Technology, Changzhou, 213002, China)

Abstract: In order to improve the dynamic characteristics of face-gear drive system, the modified method for face-gear drive system is studied, and the equations of the cylindrical gear, alter gear and face-gear are obtained. The dynamic model is established by the concentrated parameter method, which includes modified backlash, time-varying meshing stiffness, profile modifying parameter, general transmission error, brace stiffness, and support damping, etc. The Runge-Kutta numerical integral method is used to calculate the dynamic equation. The results show that changing the modified parameter will change the dynamics characteristics of the face-gear drive system, and three kinds of steady state responses, i. e. harmonic, sub-harmonic and chaotic responses are shown.

Key words: face gear; tooth profile modification; dynamic response

面齿轮传动是圆柱齿轮与圆锥齿轮相啮合的一种齿轮传动,当两齿轮的轴向夹角为 90° 时,圆锥齿轮的轮齿分布在一个圆平面内,故将此圆锥齿轮称为面齿轮。面齿轮传动的功能与锥齿轮传动类似,但相对锥齿轮传动具有一些独特的优点^[1-8],符合航空动力传动中高速、重载和减振的要求,成

为当前齿轮传动的研究热点。目前,面齿轮传动主要应用于直升机传动系统,在高速重载的直升机主减速器中,面齿轮轮齿将发生扭转变形、弯曲变形、热变形等,影响齿面的载荷分布、降低轮齿的承载能力、增大系统的振动和噪声,并可能导致边缘接触等现象发生^[9-12]。为改善面齿轮传动的啮合性

基金项目:江苏省高校自然科学研究(16KJB460003)面上资助项目;常州工学院校级科研基金(YN1503)资助项目。

收稿日期:2016-03-31;**修订日期:**2016-08-22

通信作者:李晓贞,男,博士,讲师,E-mail:lixz@czu.cn。

引用格式:李晓贞,高瞩,王晓军.修形面齿轮传动系统的动态特性分析[J].南京航空航天大学学报,2016,48(6):828-834.Li Xiaozhen, Gao Zhu, Wang Xiaojun. Dynamic characteristics of modified face-gear drive system[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2016, 48(6): 828-834.

能,通常采用修形的方法,魏冰阳等研究了面齿轮副中的圆柱齿轮双鼓修形对面齿轮传动的啮合特性的影响,修形能降低接触路径对安装误差的敏感性^[13];赵宁等分析了直齿面齿轮修形对承载接触特性的影响,结果表明修形能提高面齿轮传动的有效重合度,还能避免边缘接触、改善齿面载荷分布与承载传动误差、提高传动的稳定性^[14]。本文的修形方法是首先对齿条刀具进行抛物线修形,用修形的齿条刀具范成加工圆柱齿轮和刀具齿轮,得到齿廓修形的圆柱齿轮和刀具齿轮,然后用齿廓修形的刀具齿轮包络得到齿廓修形的面齿轮。本文主要研究面齿轮传动系统中圆柱齿轮和面齿轮的齿廓修形方法,推导齿廓修形的面齿轮和圆柱齿轮的齿面方程,分析齿廓修形参数对面齿轮传动系统动态特性的影响,为面齿轮传动的修形设计提供理论参考。

1 圆柱齿轮齿面方程

齿廓修形的圆柱齿轮和刀具齿轮齿廓曲面是由抛物线修形的齿条刀具包络加工得到。标准齿条刀具齿廓 A_0 是直线,在图 1 中用实线表示,抛物线修形的齿条刀具齿廓 A_s 如图 1 中虚线所示。图 1 中包含两个坐标系,分别为齿条刀具坐标系 $O_i-X_iY_iZ_i$ 和抛物线修形的齿廓曲面坐标系 $O_p-X_pY_pZ_p$,修形抛物线系数 a_p ,在齿条刀具的节线位置修形量最大。

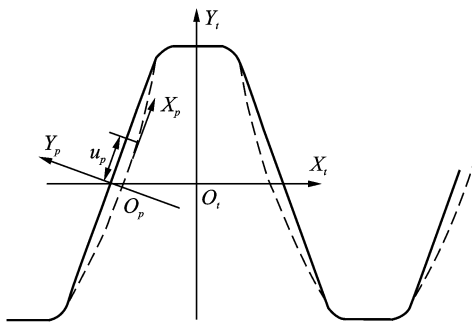


图 1 齿条刀具抛物线修形

Fig. 1 Parabolic modification of rack cutter

抛物线修形的齿条刀具齿廓曲面在坐标系 $O_p-X_pY_pZ_p$ 中的齿面方程为

$$\mathbf{r}_p = \begin{cases} x_p = u_p \\ y_p = a_p \cdot u_p^2 \\ z_p = l_p \end{cases} \quad (1)$$

式中: u_p 为抛物线齿廓上任一点到 Y_p 轴的距离;

l_p 为齿条刀具齿宽。

通过齐次坐标转换到刀具齿条坐标系 $O_i-X_iY_iZ_i$ 的刀具齿条方程为

$$\mathbf{r}_i = [\mathbf{M}_{ip}] \cdot \mathbf{r}_p \quad (2)$$

式中: $[\mathbf{M}_{ip}]$ 为由坐标系 $O_p-X_pY_pZ_p$ 到坐标系 $O_i-X_iY_iZ_i$ 的齐次坐标转换矩阵,其表达式为

$$[\mathbf{M}_{ip}] = \begin{bmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha & 0 & -\frac{\pi m}{4} + a_p \cdot \left(\frac{m}{\cos\alpha}\right)^2 \cdot \cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & -a_p \cdot \left(\frac{m}{\cos\alpha}\right)^2 \cdot \sin\alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

其中: m 为齿条刀具的模数; α 为齿条刀具的压力角。

齿条刀具包络加工圆柱齿轮或刀具齿轮的坐标系如图 2 所示,包络加工过程中包含 3 个坐标系,分别为圆柱齿轮或刀具齿轮的固定坐标系 $O_s-X_sY_sZ_s$,圆柱齿轮或刀具齿轮的随动坐标系 $O_m-X_mY_mZ_m$,齿条刀具坐标系 $O_i-X_iY_iZ_i$ 。包络加工过程中,圆柱齿轮或刀具齿轮转过角度 φ_m 时,齿条刀具移动距离 $\varphi_m r_m$, r_m 为圆柱齿轮或刀具齿轮的分度圆直径。

圆柱齿轮或刀具齿轮的齿廓曲面由抛物线修形的齿条刀具齿面包络加工得到,其齿面方程为

$$\begin{cases} \mathbf{r}_i(l_p, u_p, \varphi_m) = [\mathbf{M}_s] \cdot \mathbf{r}_i \\ f(l_p, u_p, \varphi_m) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

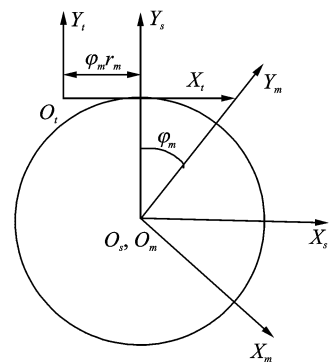


图 2 齿条刀具包络加工坐标系

Fig. 2 Coordinate system of envelope processing on rack cutter

式中: $[\mathbf{M}_s]$ 为坐标系 $O_i-X_iY_iZ_i$ 到坐标系 $O_m-X_mY_mZ_m$ 的齐次坐标转换矩阵。

2 齿廓修形的面齿轮齿面方程

齿廓修形的面齿轮齿廓曲面由齿廓修形的刀具齿轮包络加工得到,刀具齿轮的齿面是包络过程的母面,包络加工坐标系如图3所示。图3中 $O_s-X_s Y_s Z_s$ 为刀具齿面的固定坐标系; $O_m-X_m Y_m Z_m$ 为刀具齿面的随动坐标系; $O_{f0}-X_{f0} Y_{f0} Z_{f0}$ 为面齿轮的固定坐标系; $O_f-X_f Y_f Z_f$ 为面齿轮的随动坐标系; r_m 为刀具齿轮的分度圆半径; φ_m 和 φ_f 分别为包络加工过程中刀具和面齿轮的转角; d 为坐标平面 $O_s-X_s Y_s Z_s$ 和 $O_{f0}-Y_{f0} Z_{f0}$ 的距离,随刀具齿轮的运动而变化。根据图3中的坐标关系,得齿廓修形的面齿轮齿面方程为

$$\begin{cases} \mathbf{r}_{fm} = [\mathbf{M}_{fm}] \cdot \mathbf{r}_i \\ \frac{\partial \mathbf{r}_{fm}}{\partial \alpha_k} \times \frac{\partial \mathbf{r}_{fm}}{\partial u_k} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_{fm}}{\partial \varphi_m} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

式中: $[\mathbf{M}_{fm}]$ 为刀具齿轮坐标系 $O_m-X_m Y_m Z_m$ 到面齿轮坐标系 $O_f-X_f Y_f Z_f$ 的齐次坐标转换矩阵; \mathbf{r}_{fm} 为坐标系 $O_f-X_f Y_f Z_f$ 中的刀具齿面方程。

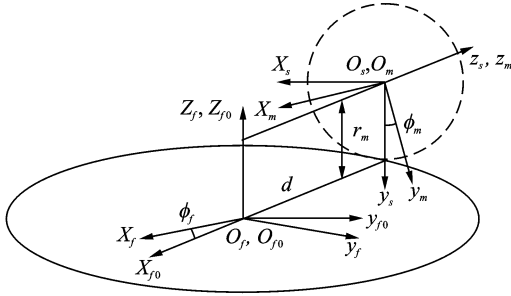


图3 面齿轮包络加工坐标系

Fig. 3 Coordinate system of envelope processing on face gear

3 面齿轮传动系统动力学模型

根据面齿轮传动的啮合原理,传动系统中圆柱齿轮无轴向力作用,面齿轮无径向力作用,比锥齿轮传动的振动自由度明显减少。基于集中参数理论建立的齿廓修形面齿轮传动系统的动力学模型如图4所示。图4中, c_s 为面齿轮传动系统的啮合阻尼; k_s 为面齿轮传动系统的啮合刚度; b 为传动过程中的齿侧间隙; e_0 为系统的综合传动误差; k_f 和 k_1 分别为面齿轮和圆柱齿轮的支撑刚度; c_f 和 c_1 分别为面齿轮和圆柱齿轮的支撑阻尼。设主动圆柱齿轮的输入扭矩为 T_1 ,从动面齿轮所受扭矩为 T_f 。根据图4所示的啮合关系,面齿轮传动系

统共包含6个自由度,分别为圆柱齿轮沿 x 和 z 方向的振动位移 x_1 和 z_1 ,面齿轮 x 和 z 方向的振动位移 x_f 和 z_f ,2个齿轮绕各自轴线的扭转振动 θ_1 和 θ_f 。

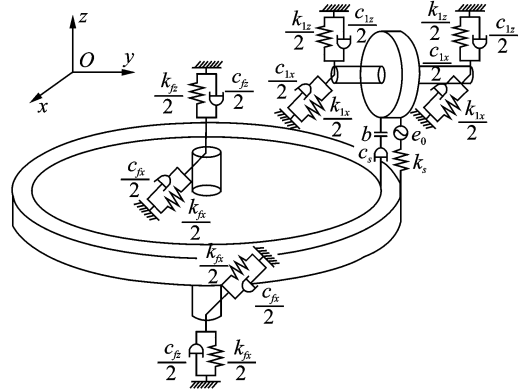


图4 面齿轮传动系统的动力学模型

Fig. 4 Dynamic model of face gear drive system

齿廓修形的面齿轮传动中,在载荷作用下啮合接触位置将沿啮合线方向产生弯曲变形,而面齿轮传动系统的重合度不是整数,轮齿的啮合刚度呈周期性变化,因此轮齿啮合线方向的弯曲变形量也呈周期性变化,综合考虑相对误差、修形等因素,啮合点沿啮合线方向的相对振动位移 x_n 为

$$\begin{aligned} x_n = & (r_1 \theta_1 - r_f \theta_f + z_1 - z_f) \cos \alpha + \\ & (x_1 - x_f) \sin \alpha - e_n(t) \end{aligned} \quad (5)$$

式中: α 为齿轮副的啮合角; r_1 和 r_f 分别为啮合点到各齿轮轴线的距离; $e_n(t)$ 为齿轮副的法向静态传递相对误差,包括修形量、基节偏差、齿距偏差、齿形相对误差和齿距累计相对误差等,参考文献[10]的方法,将其表示为啮合频率的简谐函数

$$e_n(t) = e_0 + A_e \sin(\omega_0 t + \varphi_e) \quad (6)$$

式中: e_0 为面齿轮传动系统的齿轮副综合传动相对误差,与齿廓修形参数有关的常量; A_e 为与齿廓修形参数有关的传动相对误差幅值; ω_0 为齿轮副的啮合角频率,与系统的转速有关; φ_e 为初相位。

面齿轮传动系统中沿啮合线方向的载荷 F_n 与沿各坐标轴方向的载荷分别为

$$\begin{cases} F_n = k(t) f(x_n) + c_s \dot{x}_n \\ F_{1x} = -F_{fx} = F_n \cos \alpha \\ F_{1z} = -F_{fz} = F_n \sin \alpha \end{cases} \quad (7)$$

式中: $k(t)$ 为系统的时变啮合刚度; $f(x_n)$ 为齿侧间隙函数。

时变啮合刚度 $k(t)$ 按照石川法分别计算出圆

柱齿轮和面齿轮单齿啮合刚度,然后根据齿轮副的重合度和转速,将齿轮副综合啮合刚度简化成与啮合频率有关的矩形波周期函数,最后根据傅里叶展开并略去高阶项,得

$$k(t) = k_m + \sum_{l=1}^{N_k} A_l \cos(l\omega_0 t + \varphi_k) \quad (8)$$

式中: k_m 为平均啮合刚度,含与圆柱齿轮和面齿轮的修形参数有关的修正参数; A_l 为时变啮合刚度 l 阶谐波幅值; N_k 表示傅里叶的第 k 项展开式; φ_k 为初相位。

面齿轮副啮合刚度的周期性变化是面齿轮传动系统动态激励的主要形式。齿廓修形也将对齿轮啮合刚度产生较大的影响,本文通过CATIA软件建立不同修形量的面齿轮副模型,利用有限元分析软件求得包含修形量的轮齿综合啮合刚度,如图5所示,图中实线是通过式(8)得到的啮合刚度,虚线为有限元分析的结果,两个结果较接近,尤其平均啮合刚度近似相等。

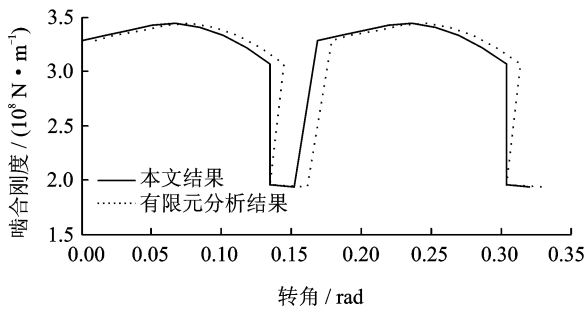


图5 面齿轮啮合刚度

Fig.5 Meshing stiffness of face gear

齿侧间隙函数 $f(x_n)$ 的表达式为

$$f(x_n) = \begin{cases} x_n - b_m & x_n > b_m \\ 0 & |x_n| \leq b_m \\ x_n + b_m & x_n < -b_m \end{cases} \quad (9)$$

式中 b_m 为法向平均齿侧间隙 b 的一半。

图4所示的齿廓修形的面齿轮传动系统振动微分方程为

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + c_{1x} \dot{x}_1 + k_{1x} x_1 = F_{1x} \\ m_1 \ddot{z}_1 + c_{1z} \dot{z}_1 + k_{1z} z_1 = F_{1z} \\ I_1 \ddot{\theta}_1 = -T_1 + F_n r_1 \\ m_f \ddot{x}_f + c_{fx} \dot{x}_f + k_{fx} x_f = F_{fx} \\ m_f \ddot{z}_f + c_{fz} \dot{z}_f + k_{fz} z_f = F_{fz} \\ I_f \ddot{\theta}_f = -T_f + F_n r_f \end{cases} \quad (10)$$

式中: m_1 和 m_f 分别为圆柱齿轮和面齿轮的集中质量; I_1 和 I_f 分别为圆柱齿轮和面齿轮的集中转

动惯量; x_1 与 x_f 分别为圆柱齿轮和面齿轮沿 x 方向的振动位移; z_1 和 z_f 分别圆柱齿轮和面齿轮沿 z 轴方向的振动位移; θ_1 和 θ_f 为圆柱齿轮和面齿轮绕各自轴线的扭转振动角度; c_{1x} 和 c_{1f} 为系统的支撑阻尼; k_{1x} 和 k_{1f} 为系统的支撑刚度。

4 系统的动态特性分析

采用自适应步长的Runge-Kutta数值积分法,对系统的非线性微分方程(10)求解,得到量纲一表示的系统动态响应。

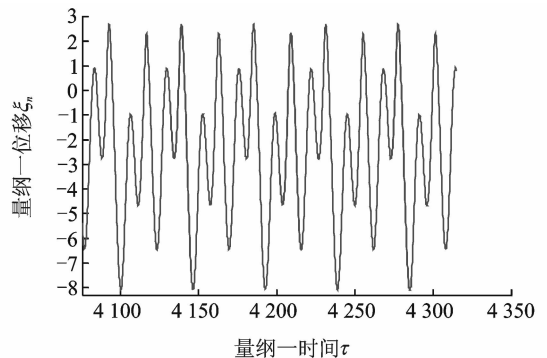
表1 面齿轮传动系统主要参数

Tab.1 Parameters value of face gear drive system

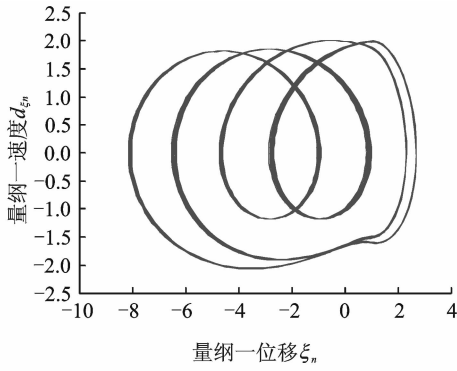
参数	数值	参数	数值
圆柱齿轮齿数 z_1	25	面齿轮齿数 z_f	100
模数 m/mm	4	齿宽 B/mm	30
输入功率 p/kW	10	输入转速 $s_n/(\text{r} \cdot \text{min}^{-1})$	2 000
支撑刚度 $k_{1x}/(\text{N} \cdot \text{m}^{-1})$	2.75×10^5	支撑刚度 $k_{1z}/(\text{N} \cdot \text{m}^{-1})$	4.65×10^5
支撑刚度 $k_{fx}/(\text{N} \cdot \text{m}^{-1})$	4.25×10^5	支撑刚度 $k_{fz}/(\text{N} \cdot \text{m}^{-1})$	4.55×10^5
支撑阻尼 $c_{1x}/(\text{N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1})$	1.05×10^5	支撑阻尼 $c_{1z}/(\text{N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1})$	1.05×10^5
支撑阻尼 $c_{fx}/(\text{N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1})$	1.55×10^5	支撑阻尼 $c_{fz}/(\text{N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1})$	1.55×10^5
啮合刚度 $k_m/(\text{N} \cdot \text{m}^{-1})$	3.18×10^8	啮合阻尼 $c_h/(\text{N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1})$	6 635.6

当齿条刀具抛物线修形系数 $a_p=0$ 时,面齿轮传动系统的动态响应呈现4倍周期谐波响应,如图6所示。由图6可见,系统响应的时-位移呈4倍周期响应(图6(a));平面相图为一闭合的非圆且非椭圆曲线(图6(b));Poincaré截面为4个离散的点(图6(c))。

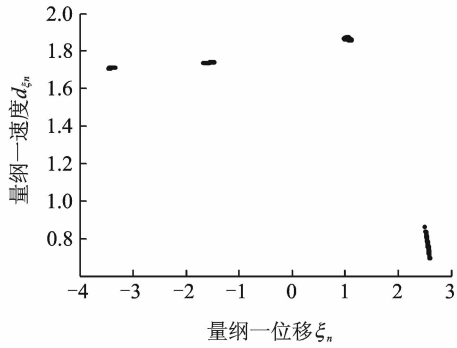
当齿条刀具抛物线修形系数 $a_p=0.01$ 时,系统为简谐振动响应,如图7所示。由图7可见,时



(a) Diagram of time and displacement



(b) Phase plane

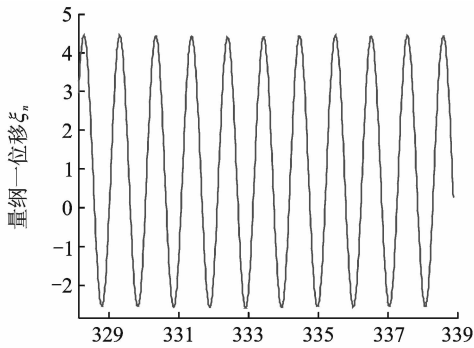


(c) Section diagram of Poincaré

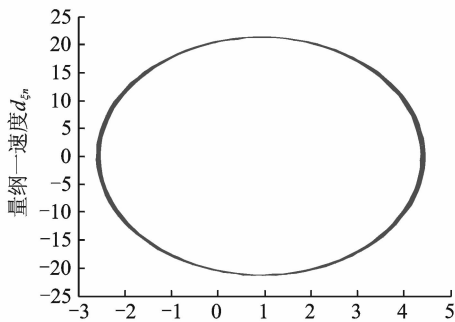
图6 $a_p=0$ 时4倍周期谐波响应

Fig. 6 Four times periodic harmonic response when $a_p=0$

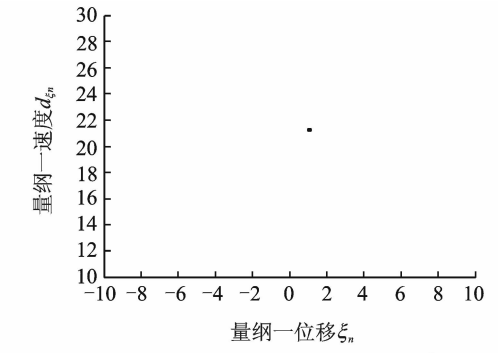
间-位移响应为单周期简谐波(图7(a));平面相图为闭合的非圆且非椭圆曲线(图7(b));Poincaré截面为1个离散点(图7(c))。



(a) Diagram of time and displacement



(b) Phase plane

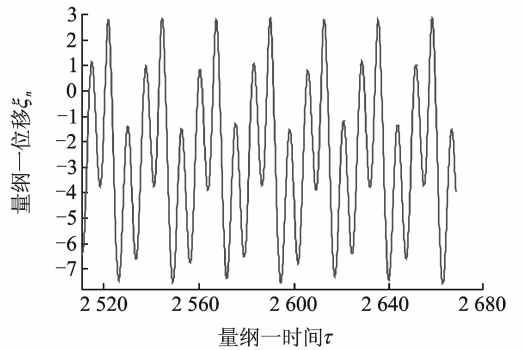


(c) Section diagram of Poincaré

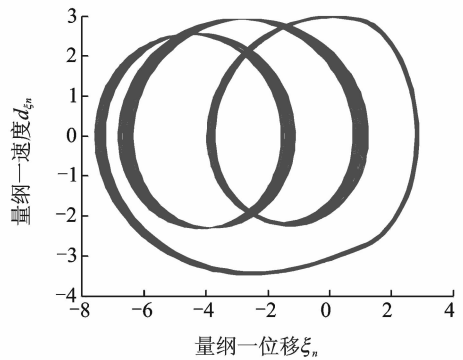
图7 $a_p=0.01$ 时简谐振动响应

Fig. 7 Harmonic response when $a_p=0.01$

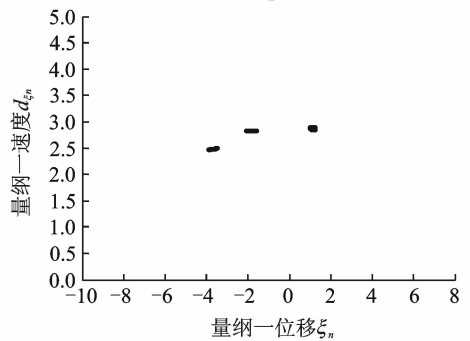
当齿条刀具抛物线修形的抛物线系数 $a_p=0.015$ 时,面齿轮传动系统的动态响应呈现3倍周期谐波响应,如图8所示。由图8可见,系统响应



(a) Diagram of time and displacement



(b) Phase plane



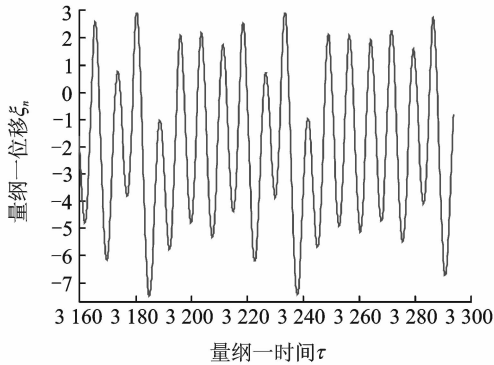
(c) Section diagram of Poincaré

图8 $a_p=0.015$ 时3倍周期谐波响应

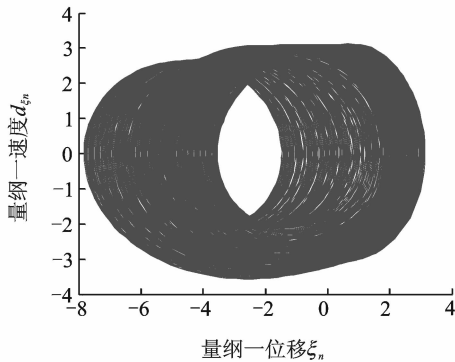
Fig. 8 Three times periodic harmonic response when $a_p=0.015$

的时间-位移呈3倍周期响应(图8(a));平面相图为一闭合的非圆且非椭圆曲线(图8(b));Poincaré截面为3个离散的点(图8(c))。

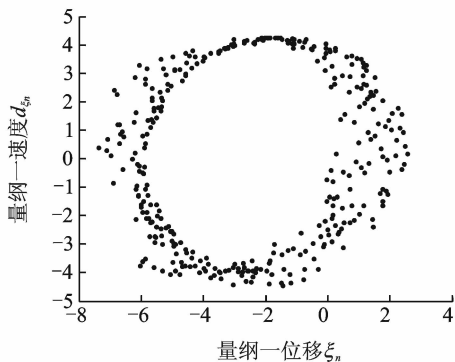
图9为当齿条刀具抛物线修形系数 $a_p = 0.022$ 时的系统动态响应图。由图9可见,时间-位移为非周期、无规则的振动曲线(图9(a));系统的平面相图由一系列相互缠绕和交叉,但不重复且不封闭的曲线构成(图9(b));Poincaré截面为一列不重合的离散点组成,这些离散点分布在一定的区域内(图9(c))。



(a) Diagram of time and displacement



(b) Phase plane



(c) Section diagram of Poincaré

图9 $a_p = 0.022$ 时混沌响应

Fig. 9 Chaotic response when $a_p = 0.022$

5 结 论

(1)分析了圆柱齿轮和面齿轮的齿廓修形方

法,用包络法推导了齿廓修形的圆柱齿轮和面齿轮齿面方程。

(2)采用集中质量法建立了齿廓修形的面齿轮传动系统动力学模型,模型中考虑修形参数、啮合阻尼、啮合刚度、支撑阻尼、支撑刚度、齿侧间隙和综合误差等因素,应用Runge-Kutta数值积分法求解系统的非线性振动微分方程,得到系统的动态响应特性。

(3)通过分析修形参数对系统动态特性的影响,确定在特定工况下合理的修形参数,使得面齿轮传动系统的振动特性处于周期响应状态,从而达到减小振动、降低噪声的目的。

参考文献:

- [1] Zanzi C, Predrero I. Application of modified geometry of face gear drive[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2005, 194(37): 3047-3066.
- [2] Litivin F L, Fuentes A, Howkins M. Design generation and TCA of new type of asymmetric face-gear drive with modified geometry[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2001, 190(43):5837-5865.
- [3] Barone S, Borgianni L, Forte P. Evaluation of the effect of misalignment and profile modification in face gear drive by a finite element meshing simulation[J]. Journal of Mechanical Design, Transaction of the ASME, 2004, 126(5):916-924.
- [4] David G L, Robert F H, Gregory F H, et al. Evaluation of carburized and ground face gear[R]. Montreal; NASA Technical Memorandum 209188, 1999: 118-124.
- [5] Ohshima F, Yoshino H. Study on high reduction face gear (1st report, meshing analysis)[J]. Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, 2006, 72(8):2676-2682.
- [6] Litivin F L, Alfonso F, Clandio Z Z, et al. Design, generation and TCA of new type of asymmetric face-gear drive with modified geometry[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2001, 190(3):5837-5865.
- [7] Hanschun R F, Lewicki D, Bossler R B. Experimental testing of prototype face-gear for helicopter transmission[R]. Montreal; NASA Technical Memorandum 105434, 1992:1-10.
- [8] Monsak P, Kazem K. Efficient evaluation of spur gear tooth mesh load using pseudo-interference stiff-

- ness estimation method[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2002, 37(8):769-786.
- [9] 李政民卿, 朱如鹏. 面齿轮传动的承载接触分析[J]. *南京航空航天大学学报*, 2010, 42(2):219-223.
Li Zhengminqing, Zhu Rupeng. Load tooth contact analysis on face gear drive[J]. *Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics*, 2010, 42(2):219-223.
- [10] 王三民, 沈允文, 董海军, 等. 含间隙和时变啮合刚度的弧齿锥齿轮传动系统非线性振动特性研究[J]. *机械工程学报*, 2003, 39(2):28-32.
Wang Sanmin, Shen Yunwen, Dong Haijun. Nonlinear dynamical characteristics of a spiral bevel gear system with backlash and time-varying stiffness[J]. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2003, 39(2):28-32.
- [11] 杨振, 王三民, 范叶森, 等. 正交面齿轮传动系统非线性振动特性研究[J]. *振动与冲击*, 2010, 29(9):218-221.
Yang Zhen, Wang Sanmin, Fan Yesen, et al. Nonlinear dynamics of face-gear transmission system[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2010, 29(9):218-221.
- [12] 李晓贞, 赵庆彬, 朱如鹏. 圆柱齿轮修形的面齿轮传动系统的动态特性分析[J]. *中南大学学报*, 2015, 46(9):3231-3237.
Li Xiaozhen, Zhao Qingbin, Zhu Rupeng. Dynamics characteristics of face gear drive system for modifying pinion[J]. *Journal of Central South University*, 2015, 46(9):3231-3237.
- [13] 魏冰阳, 吴聪, 袁群威. 小轮双鼓修形的面齿轮传动啮合特性分析[J]. *河南科技大学学报*, 2012, 33(2):16-19.
Wei Bingyang, Wu Cong, Yuan Qunwei. Tooth contact analysis of face gear drive based on pinion double crowned[J]. *Journal of Henan University of Science and Technology*, 2012, 33(2):16-19.
- [14] 赵宁, 郭辉, 方宗德, 等. 直齿面齿轮修形及承载接触分析[J]. *航空动力学报*, 2008, 23(11):2142-2146.
Zhao Ning, Guo Hui, Fang Zongde, et al. Modification and loaded contact analysis of spur face gear[J]. *Journal of Aerospace Power*, 2008, 23(11):2142-2146.

