

DOI:10.16356/j.1005-2615.2016.05.014

可靠性及可靠性灵敏度分析的改进点估计方法

张永利 吕震宙 李生兰

(西北工业大学航空学院,西安,710072)

摘要:针对低维高度非线性问题,提出了一种可靠性及可靠性灵敏度分析的改进的点估计方法。基本思想是首先由空间分割来降低局部子空间中功能函数的非线性程度,然后用低精度的稀疏网格积分探索子空间中功能函数的概率响应特性,最后组合子空间中的信息来得到所需的可靠性及其灵敏度分析结果。方法的优点是适用于低维高度非线性功能函数的失效概率和可靠性灵敏度分析,由于无需求解功能函数的梯度函数,因此适用于复杂的隐式功能函数。另外,由于方法利用少量均匀抽样来估计对失效概率贡献最大的点,并依据其进行子空间的划分,从而使得子空间的划分更有利于提高可靠性及可靠性灵敏度分析的效率。用算例对所提方法进行了验证,结果表明:在低维高度非线性条件下,所提算法的精度和效率比类似的三点估计、直接稀疏网格积分方法有明显优势。

关键词:可靠性;可靠性灵敏度;非线性;空间分割;稀疏网格;点估计

中图分类号:V221;TB114.3 **文献标志码:**A **文章编号:**1005-2615(2016)05-0705-09

Improved Point Estimation Method for Analyzing Reliability and Reliability Sensitivity

Zhang Yongli, Lü Zhenzhou, Li Shenglan

(School of Aeronautics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an, 710072, China)

Abstract: For low-dimensional and high-nonlinear performance function, an improved point estimation method is proposed for analyzing reliability and reliability sensitivity. In the proposed method, input space is firstly separated into some subspaces to reduce the nonlinearity of performance function in these subspaces. Secondly, low-level sparse grid integration method is used to estimate probabilistic response character in the subspaces. Finally, the probabilistic response characters in every subspace are combined to obtain the reliability and reliability sensitivity. The obvious advantage of the proposed method is its applicability for the reliability and reliability sensitivity of low-dimensional and high-nonlinear model, and it is also adaptive to complex implicit function because it is gradient free. Moreover, input space is partitioned according to the most probable point estimated by uniformly sampling few samples, which helps to improve the estimation efficiency of the reliability and reliability sensitivity. Several test examples demonstrate that for low-dimensional and high-nonlinear model the proposed method is more pre-

基金项目:国家自然科学基金(51475370)资助项目。

收稿日期:2015-09-24;**修订日期:**2016-05-12

通信作者:吕震宙,女,教授,博士生导师,E-mail:zhenzhoulu@nwpu.edu.cn。

引用格式:张永利,吕震宙,李生兰. 可靠性及可靠性灵敏度分析的改进点估计方法[J]. 南京航空航天大学学报, 2016,48(5):705-713. Zhang Yongli, Lü Zhenzhou, Li Shenglan. Improved point estimation method for analyzing reliability and reliability sensitivity[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2016,48(5):705-713.

cise and efficient than existing point estimation methods, i. e., the three-point estimation and the direct sparse grid integral method.

Key words: reliability; reliability sensitivity; nonlinear; space partition; sparse grid; point estimation

在可靠性及可靠性灵敏度分析过程中,点估计方法由于不要求功能函数的导函数和寻找设计点而得到了广泛的应用。该类方法直接利用功能函数在一些特征点处的函数值及权函数来近似计算功能函数的低阶矩(主要是一到四阶矩),然后由功能函数的各阶矩来近似失效概率^[1]。基于函数矩的可靠性灵敏度分析则依据灵敏度的定义,将失效概率对基本变量分布参数的偏导数转化成功能函数的各阶矩对基本变量分布参数的偏导数的形式,再将此偏导数转化成特征函数矩的形式。常用的点估计方法有两点估计、三点估计及稀疏网格积分等。Rosenblueth 首先提出了两点估计法^[2-3],用以计算单变量或多变量函数三阶(包括三阶)以下的概率矩;随后 Gorman 推导出了考虑输入随机变量前四阶矩的三点估计法(Three-point estimate, TPE)^[4];Seo 和 Kwak 利用试验设计技术也得到了相同的计算公式^[5];然而 Gorman 和 Zhao 在实际使用中发现了 TPE 的一些不足,例如当功能函数的非线性程度较高时,TPE 的精度会很低^[4,6],因此该方法不适合高度非线性情况;文献[7]通过用 Nataf 变换替代传统方法中的 Rosenblatt 变换,将上述点估计方法推广到输入变量相关情况下的前四阶矩求解当中。近年来,以 Smolyak 准则为基础的稀疏网格方法(Sparse grid, SG)被广泛地应用到数值积分^[8,9]、插值^[10-11]、微分方程的求解^[12]、区域重要性测度估计^[13]以及随机不确定性的传递中,并且已经被证明是一种特别适用于高维情况的有效离散化方法,但对于高度非线性问题,由于功能函数的复杂性,往往需要采用高精度的稀疏网格,这将导致计算量,即模型调用次数大幅度增加。由此可见对于高度非线性问题,SG 方法的效率仍然有待提高。

如果能够降低功能函数的复杂性和非线性程度,则可以利用 SG 方法来进行有效的可靠性及相应的灵敏度分析,而空间分割则可以有效降低子空间中功能函数的复杂性和非线性程度,因此采用空间分割与低精度稀疏网格相结合的方法来进行相应的可靠性及可靠性灵敏度分析。空间分割的关键是分割策略,合理的分割策略才可以提高可靠性及其灵敏度分析的效率。由于实际工程问题中的失效概率一般非常小,使用输入变量的联合概率密

度函数进行等概率空间分割时,会导致失效域中的子空间数量远远小于在安全域中的子空间数量,这将使得求解可靠性及其灵敏度的效率非常低下。本文将利用文献[14]中的方法来近似求得用于空间划分的重要抽样密度函数,其思想是在输入变量可能的取值区域进行均匀抽样,将落入失效域中的联合概率密度函数值最大的点作为重要抽样密度函数的密度中心,从而构造一个近似优化的重要抽样密度函数,并且在功能函数具有复杂性和高度非线性时,能够有效避免“多值”问题导致的寻找优化重要抽样密度函数的困难。本文按照此优化后的重要抽样密度函数对输入空间进行分割,使得对失效概率贡献较大的区域的子空间划分得较为密集,对失效概率影响小的区域的子空间划分得比较稀疏,从而达到了节约计算成本的目的。

在实际的工程应用中所面对的往往是高维高度非线性的复杂问题。目前已经存在多种降维技术可以有效地解决高维问题,比如渐进空间法^[15]等可以将任意的高维模型降至低维,然而这种降维的代价是非线性程度的进一步增大。因此解决低维高度非线性问题就显得非常必要,这类问题的解决再结合有效的降维技术就有望解决工程中的高维高度非线性难题,这也是本文研究的背景和所提方法的价值所在。

1 可靠性及可靠性灵敏度分析的矩方法

对于功能函数 $g(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 为不确定性输入变量,其失效概率可以表示成积分的形式

$$P_f = \int_F f_X(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\mathbf{R}^n} I_F f_X(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (1)$$

式中: $f_X(\mathbf{x})$ 表示 X 的联合概率密度函数; $F = \{\mathbf{x}; g(\mathbf{x}) \leq 0\}$ 为 $g(\mathbf{x})$ 定义的失效域; $I_F = \begin{cases} 1, \mathbf{x} \in F \\ 0, \mathbf{x} \notin F \end{cases}$ 为失效域 F 的指示函数; \mathbf{R}^n 表示整体 n 维输入变量空间。在数学上可靠性灵敏度是由失效概率 P_f 对基本变量 x_i 的分布参数 θ_{x_i} 的偏导数予以表达的

$$\frac{\partial P_f}{\partial \theta_{x_i}} = \int_{\mathbf{R}^n} I_F(\mathbf{x}) \frac{\partial f_X(\mathbf{x})}{\partial \theta_{x_i}} d\mathbf{x} \quad (2)$$

1.1 功能函数矩的计算

功能函数 $g(\mathbf{x})$ 的前四阶概率矩 α_{mg} ($m=1,2,3,4$) 为

$$\begin{aligned} \alpha_{1g} &= \int g(\mathbf{x}) f_X(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ \alpha_{2g} &= \left[\int (g(\mathbf{x}) - \alpha_{1g})^2 f_X(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right]^{\frac{1}{2}} \\ \alpha_{mg} \alpha_{2g}^m &= \int (g(\mathbf{x}) - \alpha_{1g})^m f_X(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \quad m=3,4 \end{aligned} \quad (3)$$

TPE 和稀疏网格积分法是常用的计算前四阶矩的点估计方法, TPE 的具体内容见文献[4, 5], SG 方法由于其高效性而得到了广泛的应用^[8-12, 16], 它的思想及实现过程可归纳如下:

设 \mathbf{S}_j^i 和 w_j^i 表示第 j 个变量一维空间中的第 i_j 个积分点和权重, 则 n 维空间中 k 精度下所有稀疏网格积分点的集合 $\mathbf{S}_n^{(k)}$ 由以下 Smolyak 准则选取

$$\mathbf{S}_n^{(k)} = \bigcup_{k+1 \leq |i| \leq q} \mathbf{S}_1^{i_1} \otimes \mathbf{S}_2^{i_2} \otimes \cdots \otimes \mathbf{S}_p^{i_p} \quad (4)$$

式中: \otimes 表示张量积计算; $q=k+n$; $|i|=i_1+i_2+\cdots+i_n$ 为多维指标之和。依据 Smolyak 准则, 集合 $\mathbf{S}_n^{(k)}$ 中相应于第 l 个积分点 $\xi^{(l)} = [\xi_{j_1}^{i_1}, \dots, \xi_{j_n}^{i_n}] \in \mathbf{S}_n^{(k)}$ 的权重 $w^{(l)}$ 为

$$w^{(l)} = (-1)^{q-|i|} \binom{n-1}{q-|i|} (w_{j_1}^{i_1} \cdots w_{j_n}^{i_n}) \quad (5)$$

则对非线性函数 $g(\mathbf{x})$ 的积分可以由式(6)求得, 并且能够达到 $2k+1$ 阶多项式精度^[8]

$$\begin{aligned} \int g(\mathbf{x}) f_X(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} &\approx \sum_{l=1}^{M_n^{(k)}} w^{(l)} g(T^{-1}(\xi^{(l)})) = \\ &\sum_{l=1}^{M_n^{(k)}} w^{(l)} g(s^{(l)}) \end{aligned} \quad (6)$$

式中: $M_n^{(k)}$ 表示 k 阶精度下相应的积分点个数; $T^{-1}(\cdot)$ 为任意分布的变量 \mathbf{x} 向积分点空间变换函数的反函数, 且在积分点 $\xi^{(l)}$ 处的函数值为 $s^{(l)}$, 则 SG 方法求解功能函数 $g(\mathbf{x})$ 的前四阶矩的积分^[16] 可以表示为

$$\begin{aligned} \alpha_{1g} &= \int g(\mathbf{x}) f_X(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \approx \sum_{l=1}^{M_n^{(k)}} w^{(l)} g(s^{(l)}) \\ \alpha_{2g} &= \left[\int (g(\mathbf{x}) - \alpha_{1g})^2 f_X(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right]^{\frac{1}{2}} \approx \\ &\left[\sum_{l=1}^{M_n^{(k)}} w^{(l)} (g(s^{(l)}) - \alpha_{1g})^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ \alpha_{mg} \alpha_{2g}^m &= \int (g(\mathbf{x}) - \alpha_{1g})^m f_X(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \approx \end{aligned}$$

$$\sum_{l=1}^{M_n^{(k)}} w^{(l)} (g(s^{(l)}) - \alpha_{1g})^m \quad m=3,4 \quad (7)$$

基于 Smolyak 准则的稀疏网格能够在一定程度上克服传统数值积分计算量随变量维数呈指数级增长的维数灾难问题, 对高维积分问题有很好的适用性, 通过调整精度 k 可以方便地提高积分精度。但是对于非线性程度很高的模型, 即使提高精度 k 也未必可以达到理想的精度。

1.2 基于前四阶矩的失效概率近似方法

基于功能函数概率矩近似失效概率的四阶矩方法包含高阶矩标准化技术法 (High-order moment standardization technique, HOMST)^[17]、Edgeworth 级数法^[17] 和频率曲线法^[17-21] 等。本文采用 HOMST 方法, 可靠度指标 β_{4M} 和失效概率 P_f 分别为

$$\beta_{4M} = \frac{3(\alpha_{4g} - 1)\beta_{2M} + \alpha_{3g}(\beta_{2M}^2 - 1)}{\sqrt{(5\alpha_{3g}^2 - 9\alpha_{4g} + 9)(1 - \alpha_{4g})}} \quad (8)$$

$$P_f = \Phi(-\beta_{4M}) \quad (9)$$

式中: $\beta_{2M} = \frac{\alpha_{1g}}{\alpha_{2g}}$, 且当 $\alpha_{3g} = 0$ 时, $\beta_{4M} = \beta_{2M}$ 。

1.3 可靠性灵敏度分析的点估计方法

根据可靠性灵敏度的定义, 由失效概率 P_f 与可靠度指标 β_{4M} 的关系, 以及 β_{4M} 与 α_{mg} ($m=1, \dots, 4$) 的关系, 可以采用函数求导法则推出考虑前四阶矩时 P_f 对基本变量 X_i 的第 r 个分布参数 $\theta_{x_i}^{(r)}$ 的灵敏度为

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_f}{\partial \theta_{x_i}^{(r)}} &= \frac{\partial P_f}{\partial \beta_{4M}} \frac{\partial \beta_{4M}}{\partial \theta_{x_i}^{(r)}} = \\ \frac{\partial P_f}{\partial \beta_{4M}} &\left(\frac{\partial \beta_{4M}}{\partial \beta_{2M}} \left(\frac{\partial \beta_{2M}}{\partial \alpha_{1g}} \frac{\partial \alpha_{1g}}{\partial \theta_{x_i}^{(r)}} + \frac{\partial \beta_{2M}}{\partial \alpha_{2g}} \frac{\partial \alpha_{2g}}{\partial \theta_{x_i}^{(r)}} \right) + \right. \\ &\left. \frac{\partial \beta_{4M}}{\partial \alpha_{3g}} \frac{\partial \alpha_{3g}}{\partial \theta_{x_i}^{(r)}} + \frac{\partial \beta_{4M}}{\partial \alpha_{4g}} \frac{\partial \alpha_{4g}}{\partial \theta_{x_i}^{(r)}} \right) \end{aligned} \quad (10)$$

式中: $\frac{\partial P_f}{\partial \beta_{4M}}, \frac{\partial \beta_{4M}}{\partial \beta_{2M}}, \frac{\partial \beta_{4M}}{\partial \alpha_{3g}}$ 和 $\frac{\partial \beta_{4M}}{\partial \alpha_{4g}}$ 以及 α_{kg} 对 $\theta_{x_i}^{(k)}$ 的偏导数 $\frac{\partial \alpha_{mg}}{\partial \theta_{x_i}^{(r)}}$ 的具体表达形式在文献[1]中有详细说明, 此处不再赘述。

2 基于空间分割的改进点估计法

2.1 基本思想

基于空间分割的点估计方法通过空间分割后的子空间来降低功能函数的复杂性和非线性程度, 从而达到提高计算效率的目的, 其基本思想是: 首先利用文献[14]中所介绍的方法使用少量样本近似最可能失效点 (Most probable point, MPP), 并

以该点为密度中心构造近似优化的重要抽样密度函数 $h_X(\mathbf{x})$; 然后按照 $h_X(\mathbf{x})$ 对输入空间进行划分 (Space partition, SP), 进而在每个子空间中使用低精度的 SG 积分法探索功能函数的概率响应特性; 最后组合所有子空间中的信息得到所需的可靠性及可靠性灵敏度结果。本文以下部分用 SG-SP 表示本文方法。

2.2 空间划分策略及划分后的失效率概率和可靠性灵敏度

空间划分策略总体上可分为两步:

步骤 1 借鉴文献[14]中提出的 MPP 近似方法, 构造重要抽样密度函数 $h_X(\mathbf{x})$ 。

(1) 对系统的可靠度指标作出保守的假设, 然后根据 MPP 估计中生成样本的最小区间 (表 1) 使用输入变量的累积分布函数的反函数确定“合适区间”的边界;

表 1 MPP 估计中生成样本的最小区间

Tab. 1 The least required interval for sample generation in MPP estimation

β_{assume}	1	2	3	4	5	6	7	8
下端点	$F^{-1}(5 \times 10^{-3})$	$F^{-1}(5 \times 10^{-5})$	$F^{-1}(5 \times 10^{-7})$	$F^{-1}(5 \times 10^{-9})$	$F^{-1}(5 \times 10^{-12})$	$F^{-1}(5 \times 10^{-16})$	$F^{-1}(5 \times 10^{-19})$	$F^{-1}(5 \times 10^{-24})$
上端点	$F^{-1}(1 - 5 \times 10^{-3})$	$F^{-1}(1 - 5 \times 10^{-5})$	$F^{-1}(1 - 5 \times 10^{-7})$	$F^{-1}(1 - 5 \times 10^{-9})$	$F^{-1}(1 - 5 \times 10^{-12})$	$F^{-1}(1 - 5 \times 10^{-16})$	$F^{-1}(1 - 5 \times 10^{-19})$	$F^{-1}(1 - 5 \times 10^{-24})$

根据式(1,2), 失效率概率和可靠性灵敏度在空间分割后可以表示为

$$P_f = \int I_F(\mathbf{x}) f_X(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int I_F(\mathbf{x}) \frac{f_X(\mathbf{x})}{h_X(\mathbf{x})} h_X(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \sum_{i_1=1}^{N_1} \sum_{i_2=1}^{N_2} \dots \sum_{i_n=1}^{N_n} \int_{U_{i_1}} \int_{U_{i_2}} \dots \int_{U_{i_n}} I_F(\mathbf{x}) \frac{f_X(\mathbf{x})}{h_X(\mathbf{x})} \frac{h_X(\mathbf{x})}{\int_{U_{i_1, i_2, \dots, i_n}} h_X(\mathbf{t}) d\mathbf{t}} \left(\int_{U_{i_1, i_2, \dots, i_n}} h_X(\mathbf{t}) d\mathbf{t} \right) d\mathbf{x} = \sum_{i_1=1}^{N_1} \sum_{i_2=1}^{N_2} \dots \sum_{i_n=1}^{N_n} P_{i_1, i_2, \dots, i_n} E_{h_{i_1, i_2, \dots, i_n}} \left(I_F(\mathbf{x}) \frac{f_X(\mathbf{x})}{h_X(\mathbf{x})} \right) \quad (11)$$

(2) 在这些“合适区间”内均匀抽取 N_{MPP} 个样本 $\mathbf{x}^{(j)}$ ($j=1, \dots, N_{\text{MPP}}$);

(3) 对于 n 维独立随机变量 \mathbf{X} , 根据 $W_j = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_{i \cdot j})$ 分别计算这些样本的权重系数 $W = (W_1, \dots, W_{N_{\text{MPP}}})$, 其中 f_{X_i} 表示第 i 维变量的边缘概率密度函数;

(4) 失效域中权重系数最大的样本点即为 MPP 的近似值;

(5) 将输入变量联合密度函数 $f_X(\mathbf{x})$ 的中心平移至 MPP 处, 形成重要抽样密度函数 $h_X(\mathbf{x})$ 。

步骤 2 根据 $h_X(\mathbf{x})$ 等概率划分输入变量空间, 生成子空间。

这种划分策略的结果是: 对失效概率贡献较大的地方空间分割比较密集, 在影响小的地方则较为稀疏, 提高了后续失效概率计算的效率。

$$\sum_{i_1=1}^{N_1} \sum_{i_2=1}^{N_2} \dots \sum_{i_n=1}^{N_n} P_{i_1, i_2, \dots, i_n} E_{h_{i_1, i_2, \dots, i_n}} \left(\frac{I_F(\mathbf{x})}{h_X(\mathbf{x})} \frac{\partial f_X(\mathbf{x})}{\partial \theta_{x_i}^{(r)}} \right) \quad (12)$$

式中: U_{i_j} ($i_j=1, 2, \dots, N_j, j=1, 2, \dots, n$) 表示第 j 个变量的第 i_j 个小区间; N_j 表示第 j 个变量被划分的总区间数; $h_{i_1, i_2, \dots, i_n}(\mathbf{x}) = \frac{h_X(\mathbf{x})}{\int_{U_{i_1, \dots, i_n}} h_X(\mathbf{t}) d\mathbf{t}}$ 表示

基本变量 X_1, X_2, \dots, X_n 的第 i_1, i_2, \dots, i_n 个小区间形成的输入变量子空间 $U_{i_1, i_2, \dots, i_n} = \{U_{i_1} \cap U_{i_2} \cap \dots \cap U_{i_n}\}$ 的联合概率密度函数; $E_{h_{i_1, i_2, \dots, i_n}}(\cdot)$ 表示以 $h_{i_1, i_2, \dots, i_n}(\mathbf{x})$ 为密度函数所求得的期望; $P_{i_1, i_2, \dots, i_n} = \int_{U_{i_1, i_2, \dots, i_n}} h_X(\mathbf{t}) d\mathbf{t}$ 。

2.3 SG-SP 方法的实现步骤及计算量

结合前面介绍的 SG 方法, 可以按照以下步骤估计失效率概率和可靠性灵敏度:

步骤 1 根据近似优化的重要抽样概率密度函数 $h_X(\mathbf{x})$ 将输入空间等概率划分成若干个子空间。

步骤 2 在子空间 U_{i_1, i_2, \dots, i_n} 中, 产生 $M_n^{(k)}$ 个稀疏网格积分点 $s_{i_1, i_2, \dots, i_n}^{(l)}$ ($l=1, 2, \dots, M_n^{(k)}$) 和对应的权重系数 $\omega_{i_1, i_2, \dots, i_n}^{(l)}$ 。

步骤 3 按照式(13,14)计算 P_f 和 $\frac{\partial P_f}{\partial \theta_{x_i}^{(k)}}$

$$P_f = \sum_{i_1=1}^{N_1} \sum_{i_2=1}^{N_2} \cdots \sum_{i_n=1}^{N_n} P_{i_1, i_2, \dots, i_n} \cdot \left(\sum_{l=1}^{M_n^{(k)}} \omega_{i_1, i_2, \dots, i_n}^{(l)} I_F(s_{i_1, i_2, \dots, i_n}^{(l)}) \frac{f_X(s_{i_1, i_2, \dots, i_n}^{(l)})}{h_X(s_{i_1, i_2, \dots, i_n}^{(l)})} \right) \quad (13)$$

$$\frac{\partial P_f}{\partial \theta_{x_i}^{(r)}} = \sum_{i_1=1}^{N_1} \sum_{i_2=1}^{N_2} \cdots \sum_{i_n=1}^{N_n} P_{i_1, i_2, \dots, i_n} \cdot \left(\sum_{l=1}^{M_n^{(k)}} \omega_{i_1, i_2, \dots, i_n}^{(l)} \frac{I_F(s_{i_1, i_2, \dots, i_n}^{(l)})}{h_X(s_{i_1, i_2, \dots, i_n}^{(l)})} \frac{\partial f_X(s_{i_1, i_2, \dots, i_n}^{(l)})}{\partial \theta_{x_i}^{(r)}}$$

从式(13,14)可以看出,SG-SP 方法的总计算量为 $M_n^{(k)} \cdot \prod_{i=1}^n N_i + N_{MPP}$, 式中 N_{MPP} 表示用来估计 MPP 的样本量。尽管每个子空间中 SG 方法产生的积分点数 $M_n^{(k)}$ 比较小,但是总的计算量却与维数成指数关系,所以该方法只适合低维的情况。

3 算 例

在以下算例中,将蒙特卡洛 (Monte Carlo, MC) 数字模拟方法的结果作为参考解,分别使用 TPE, SG 积分方法和本文 SG-SP 方法来估计失效概率和可靠性灵敏度,从计算结果精度和总模型调用次数两方面来比较。

在使用 SG-SP 方法计算时,为了方便比较,对同一功能函数 $g(\mathbf{x})$, 假定每一维输入变量 X_j 划分段数 N_j 相同,即 $N_1 = N_2 = \cdots = N_n = N$ 。同时为了充分证明本文所提方法的优势,在使用 SG 积分方法计算前四阶矩时,精度 k_1 取结果稳定时的最小值。根据式(8~10),这些稳定的结果用来计算 P_f 和 $\frac{\partial P_f}{\partial \theta_{x_i}^{(r)}}$, 而 $\frac{\partial P_f}{\partial \theta_{x_i}^{(r)}}$ 包含的其他积分运算由精度为 k_2 的稀疏网格估计, P_f 不随 k_2 变化。

3.1 算例 1

假设功能函数为 $g(x_1, x_2) = a + 0.00463 \cdot (x_1 + x_2 - 20)^q - 0.2357(x_1 - x_2)$, 其中独立的输入随机变量 x 服从正态分布,即 $x_i \sim N(10, 3)$ ($i=1, 2$)。功能函数中指数 q , 常数 a 和使用 SG-SP 方法估计 MPP 时均匀抽取的样本量 N_{MPP} 如表 2 所示。

表 2 q, a 和 N_{MPP} 的取值情况

Tab. 2 Values of q, a and N_{MPP}

q	1	2	3	4
a	2.5	2.5	2.5	5.0
N_{MPP}	200	200	200	1 000

a 和 q 取不同值时前四阶中心矩和失效概率及可靠性灵敏度的计算结果见表 3~10, 其中计算量表示总的模型函数调用次数。

表 3 $q=1, N=17$ 时输出量的前四阶中心矩

Tab. 3 First four central moments of output under $q=1, N=17$

方法	α_{1g}	α_{2g}	α_{3g}	α_{4g}
MC	2.500 176	0.999 994	0.000 856 64	3.000 582
TPE	2.500 000	1.000 183	0.000 740 40	3.000 000
SG($k_1=3$)	2.500 000	1.000 183	0.000 000 00	3.000 000

表 4 $q=1, N=17$ 时可靠性及可靠性灵敏度分析结果

Tab. 4 Reliability and reliability sensitivity analysis results under $q=1, N=17$

方法	精度	计算量	$P_f/10^{-3}$	$(\partial P_f / \partial \mu_{x_1}) / 10^{-3}$	$(\partial P_f / \partial \sigma_{x_1}) / 10^{-3}$	$(\partial P_f / \partial \mu_{x_2}) / 10^{-3}$	$(\partial P_f / \partial \sigma_{x_2}) / 10^{-3}$
MC		10^7	6.216 5	4.053 5	7.022 6	-4.215 8	7.596 4
TPE		207	6.206 3	4.045 4	7.009 6	-4.215 0	7.599 1
SG	$k_2=1$	31	6.217 7	0.000 0	14.621 0	0.000 0	14.621 0
	$k_2=2$	119	6.217 7	-1.473 5	3.224 6	1.098 0	4.085 9
	$k_2=3$	207	6.217 7	4.054 2	7.023 4	-4.216 6	7.597 6
SG-SP	$k=1$	489	6.200 7	4.044 8	6.873 4	-4.166 2	7.303 7
	$k=2$	1 645	6.178 4	4.038 7	7.071 9	-4.179 2	7.567 9

表5 $q=2, N=13$ 时输出量的前四阶中心矩Tab. 5 First four central moments of output under $q=2, N=13$

方法	α_{1g}	α_{2g}	α_{3g}	α_{4g}
MC	2.583 1	1.006 8	0.005 4	3.003 6
TPE	2.583 3	1.006 9	0.002 9	2.940 7
SG($k_1=5$)	2.583 3	1.006 9	0.004 5	3.002 3

表6 $q=2, N=13$ 时可靠性及可靠性灵敏度分析结果Tab. 6 Reliability and reliability sensitivity analysis results under $q=2, N=13$

方法	精度	计算量	$P_f/10^{-3}$	$(\partial P_f/\partial \mu_{x_1})/$	$(\partial P_f/\partial \sigma_{x_1})/$	$(\partial P_f/\partial \mu_{x_2})/$	$(\partial P_f/\partial \sigma_{x_2})/$
				10^{-3}	10^{-3}	10^{-3}	10^{-3}
MC		10^7	5.100 2	3.454 3	5.964 0	-3.454 4	5.964 5
TPE		207	5.106 1	3.368 0	7.674 9	-3.356 8	7.651 6
SG	$k_2=1$	59	5.087 4	0.000 0	9.344 2	0.000 0	9.344 2
	$k_2=2$	147	5.087 4	-1.662 9	3.166 6	1.662 9	3.166 6
	$k_2=3$	235	5.087 4	3.355 6	7.585 6	-3.355 8	7.585 6
	$k_2=4$	411	5.087 4	3.450 7	5.970 5	-3.450 7	5.970 5
SG-SP	$k=1$	369	5.122 4	3.429 0	5.756 1	-3.448 6	5.826 6
	$k=2$	1 045	5.084 4	3.440 1	5.922 6	-3.442 2	5.923 5

表7 $q=3, N=13$ 时输出量的前四阶中心矩Tab. 7 First four central moments of output under $q=3, N=13$

方法	α_{1g}	α_{2g}	α_{3g}	α_{4g}
MC	2.499 4	1.692 9	-0.005 085 189	20.965 100
TPE	2.499 9	1.639 7	-0.001 133 728	6.254 750
SG($k_1=7$)	2.500 0	1.695 7	0.000 000 000	21.376 600

表8 $q=3, N=13$ 时可靠性及可靠性灵敏度分析结果Tab. 8 Reliability and reliability sensitivity analysis results under $q=3, N=13$

方法	精度	计算量	$P_f/10^{-3}$	$(\partial P_f/\partial \mu_{x_1})/$	$(\partial P_f/\partial \sigma_{x_1})/$	$(\partial P_f/\partial \mu_{x_2})/$	$(\partial P_f/\partial \sigma_{x_2})/$
				10^{-3}	10^{-3}	10^{-3}	10^{-3}
MC		10^7	40.183 6	-9.185 1	15.593 6	-26.296 8	42.565 1
TPE		207	63.575 9	-10.428 6	35.911 6	-41.510 4	60.889 1
SG	$k_2=1$	59	70.194 0	0.000 0	66.126 5	0.000 0	66.126 5
	$k_2=2$	147	70.194 0	8.577 4	-10.929 5	-28.559 8	25.663 1
	$k_2=3$	235	70.194 0	-3.197 5	34.882 5	-39.550 0	59.277 6
	$k_2=10$	2 987	70.194 0	-5.608 3	51.796 8	-43.014 7	100.587 0
SP-SG	$k=1$	369	35.567 2	-10.891 1	9.318 4	-23.476 2	38.193 5
	$k=2$	1 045	40.617 8	-9.103 6	16.344 2	-26.389 9	42.290 2

表9 $q=4, N=12$ 时输出量的前四阶中心矩Tab. 9 First four central moments of output under $q=4, N=12$

方法	α_{1g}	α_{2g}	α_{3g}	α_{4g}
MC	9.494 9	14.725 0	10.078 4	204.550 0
TPE	9.497 6	12.142 3	3.714 9	15.237 7
SG($k_1=9$)	9.500 4	14.732 1	10.034 4	205.124 5

表 10 $q=4, N=12$ 时可靠性及可靠性灵敏度分析结果

Tab. 10 Reliability and reliability sensitivity analysis results under $q=4, N=12$

方法	精度	计算量	$P_f/10^{-7}$	$(\partial P_f/\partial \mu_{x_1})/10^{-7}$	$(\partial P_f/\partial \sigma_{x_1})/10^{-7}$	$(\partial P_f/\partial \mu_{x_2})/10^{-7}$	$(\partial P_f/\partial \sigma_{x_2})/10^{-7}$
SG-SP	$k=8$ $N=40$	133 200	1.158 6	1.427 7	4.920 6	-1.427 6	4.919 8
TPE		207	1.35×10^6	8.19×10^4	-3.17×10^5	-8.25×10^4	-3.17×10^5
SG	$k_2=1$	119	2.28×10^6	0	3.11×10^5	0	3.11×10^5
	$k_2=2$	207	2.28×10^6	5.55×10^4	-9.33×10^4	-5.55×10^4	-9.33×10^4
	$k_2=10$	3 023	2.28×10^6	5.79×10^4	8.15×10^5	-5.79×10^4	8.15×10^5
SG-SP	$k=1$	1 144	1.184 8	1.443 8	4.905 8	-1.451 2	4.961 6
	$k=2$	1 720	1.161 3	1.428 0	4.907 6	-1.430 3	4.924 7

结果分析: $q=1$ 和 $q=2$ 时,功能函数的非线性程度比较低,SG 方法在计算量小于 SG-SP 方法的最低计算量时已经得到了精度略高于后者的结果,在这种情况下 SG 方法无疑更具有优势。TPE 方法在 $q=1$ 时具有和 SG 方法相当的计算效率,但是在 $q=2$ 时该方法的部分计算结果出现较大的偏差。

从 $q=3$ 和 $q=4$ 时的计算结果来看,随着非线性程度的增加,在前四阶矩的计算中,TPE 方法的计算结果已经部分错误,而 SG 方法的精度高于 TPE 方法。在表 8,10 中,两种对照方法的结果几乎完全错误,即使提高 SG 方法的精度水平,也无法得到与 MC 解接近的结果。而 SG-SP 方法所得结果随着 k 的增加而逐渐收敛,且 $k=1$ 时就已经达到了可用的精度。 $q=4$ 时的情况同时也表明了所提方法在失效概率数量级较小时的良好适用性。需要说明的是,当 $q=4$ 时,由于模型的可靠性及可靠性灵敏度过小,使用 MC 方法无法得到稳定的结果,并且前面 3 种情况已经证明了 SG-SP 方法的计算结果随着 N 和 k 的增加收敛于真实解,所以此情况下可以取 $N=40, k=8$ 时的计算结果作为参考解。

以 $q=4$ 时的情况为例,简要说明 SG-SP 方法中 N 与 k 的选取方法。显然,为了获得要求的计算精度,可以通过增大 N 和 k 的取值来实现。 N 的取值越大,则在划分的子空间中功能函数的复杂性和非线性程度越低,这时就可以采用较小的 k 值来达到要求的精度。相反, N 的取值越小,则要达到要求的精度就需要采用较大的 k 值来实现。一般来说 k 值较小时的结果较稳定。图 1 给出了本算例在 k 取 1,2,3 和 4 时计算失效概率的均方误差随总计算次数变化的曲线,从图 1 中可以看出:在相同计算量下, $k=1$ 时的均方误差最小,而相同均方误差情况下, $k=1$ 时的总计算量最小。因此

一般情况下,在 SG-SP 方法中建议 k 取 1 或 2,然后通过增加 N 来达到要求的计算精度。

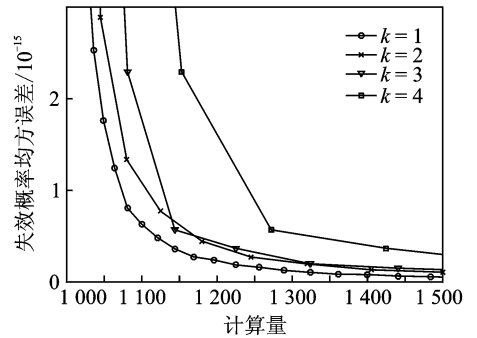


图 1 均方误差与计算量的关系曲线

Fig. 1 Mean square error of failure probability varying with computation

3.2 算例 2

在汽车工程领域中,前轴承载着车辆前部的重力,所以必须保证其有足够的可靠性。工字梁由于具有良好的抗弯性能和质量较轻的特点而被广泛地应用于前轴的设计中。图 2 为汽车前轴示意图,工字梁危险截面形状如图 3 所示。已知危险截面的最大正应力为 $\sigma=M/W_x$ 和 $\tau=T/W_\rho$,其中 $M=2.5 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{mm}$ 和 $T=2.1 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{mm}$ 分别为前轴所受的弯矩和扭矩, W_x 和 W_ρ 分别为结构的截面系数和极截面系数,且有

$$W_x = \frac{(h-2t)^3}{500h} + \frac{b}{6h} [h^3 - (h-2t)^3] \quad (15)$$

$$W_\rho = 0.8bt^2 + \frac{100}{3}t^3(h-2t) \quad (16)$$

根据前轴的材料特性,给定前轴的静强度极限为 $\sigma_s=600 \text{ MPa}$,故由静强度分析并构件模型的功能函数为 $g=\sigma_s - \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$,工字梁的几何参数 b, t, h 为相互独立的正态输入变量,其分布参数如表 11 所示。采用 TPE 和 SG 方法作为对照,表 12 为这两种方法对前四阶中心矩的估计结果。使用

SG-SP 方法对该结构进行可靠性及可靠性灵敏度分析时,将变量空间分割成 $8^3 = 512$ 个子空间,均匀抽取 400 个样本估计 MPP。失效概率及可靠性灵敏度的计算结果如表 13 所示。

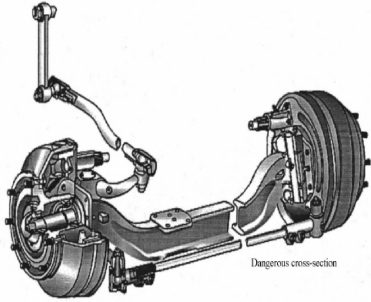


图 2 汽车前轴示意图

Fig. 2 Diagram of front axle

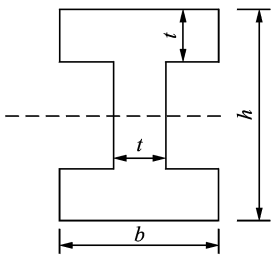


图 3 工字梁截面

Fig. 3 Cross section of front axle

表 11 输入变量的分布参数

Tab. 11 Distribution parameters of input variables

输入变量	记号	均值 μ/mm	标准差 σ/mm
b	x_1	65	3.50
t	x_2	12	0.10
h	x_3	85	4.50

表 12 输出量的前四阶中心矩

Tab. 12 First four central moments of output

方法	$\alpha_{1g}/10^{-8}$	$\alpha_{2g}/10^{-8}$	α_{3g}	α_{4g}
MC	2.570 5	0.663 8	-0.891 1	4.598 0
TPE	2.570 6	0.661 6	-0.768 1	3.291 9
SG($k_1=5$)	2.570 6	0.663 8	-0.891 9	4.622 0

结果分析:从以上计算结果可以发现两种对照方法 SG 和 TPE 估计的前四阶矩与参考值差别不大,但是基于前四阶矩的可靠性及可靠性灵敏度分析结果却几乎全部错误,而使用本文中所建立的 SG-SP 方法在 $k=2$ 时已经具有良好精度,计算量为 3 984。可靠性灵敏度反映了基本变量分布参数对失效概率的影响程度,无量纲正则化的可靠性灵敏度可以用于基本变量分布参数对可靠度的重要性排序。为了把失效概率控制在理想的范围,研究者可以依据这种重要性排序来决定哪些变量应该被重点考虑,这在工程上具有重要意义。

表 13 可靠性及可靠性灵敏度分析结果

Tab. 13 Reliability and reliability sensitivity analysis results

方法	k	计算量	P_f	$\partial P_f / \partial \mu_{x_1}$	$\partial P_f / \partial \sigma_{x_1}$	$\partial P_f / \partial \mu_{x_2}$	$\partial P_f / \partial \sigma_{x_2}$	$\partial P_f / \partial \mu_{x_3}$	$\partial P_f / \partial \sigma_{x_3}$
MC		10^7	0.002 742	-0.398 9	0.202 3	-8.289 8	22.622 7	-0.157 7	0.044 15
TPE		918	0.006 278	-0.259 2	-0.197 2	-23.974 0	38.562 6	-0.078 0	-0.112 0
SG	$k_2=1$	126	0.001 826	0.000 0	5.471 8	0.000 0	19.151 3	0.000 0	4.255 9
	$k_2=2$	324	0.001 826	0.779 7	-2.210 8	-6.559 6	15.783 3	0.420 6	-1.787 9
	$k_2=3$	720	0.001 826	-0.317 4	0.154 2	-7.897 9	16.311 2	-0.124 1	0.017 4
	$k_2=10$	23 292	0.001 826	-0.232 1	0.119 5	-4.671 4	10.794 1	-0.094 0	0.029 70
SG-SP	$k=1$	912	0.002 566	-0.347 6	0.084 9	-7.781 1	21.291 9	-0.110 6	-0.095 1
	$k=2$	3 984	0.002 719	-0.400 7	0.200 9	-8.217 5	22.420 0	-0.156 6	0.040 6

4 结束语

本文将空间分割思想,SG 积分方法和最可能失效点估计方法结合在一起,提出了一种适合低维高度非线性模型可靠性及可靠性灵敏度分析的新方法。常用的传统点估计方法在非线程度逐渐增加的情况下所计算的结果的误差也逐渐增大,甚至出现了严重的错误,而 SG-SP 方法却使用不大的计算量即可获得稳定的结果。需要再次强调的是在高维情况下,该方法的计算量会随着维数呈指数增加,在

非线性程度低的情况下,与传统的点估计方法相比并不占有优势,但是在低维度、非线性程度较高的问题上本文方法体现出了明显的高效率和高精度的优势,与降维技术相结合将有望解决高维高度非线性问题。在 SG-SP 方法中,有关计算量随着维数呈指数增长问题将有望采用自适应空间剖分的方法加以解决,这将是作者后续的研究工作。

参考文献:

[1] 吕震宙,宋述芳,李洪双,等. 结构机构可靠性及可靠

- 性灵敏度分析[M].北京:科学出版社,2009.
- Lü Zhenzhou, Song Shufang, Li Hongshuang, et al. The reliability and reliability sensitivity analysis for structure and machine system[M]. Beijing: Science Press, 2009.
- [2] Rosenblueth E. Point estimation for probability moments[J]. Proceedings of the National Academy of Science, 1975, 72(10): 3812-3814.
- [3] Rosenblueth E. Two-point estimates in probability [J]. Applied Mathematical Modeling, 1981, 5(5): 329-335.
- [4] Gorman M. Reliability of structural systems [D]. Cleveland: Case Western Reserve University, 1980: 320-332.
- [5] Seo H S, Kwak B M. Efficient statistical tolerance analysis for general distributions using three-point information [J]. International Journal of Production Research, 2002, 40(4): 931-944.
- [6] Zhao Yangang, Ono T. New point estimates for probability moments[J]. Journal of Engineering Mechanics, 2000, 126(4): 433-436.
- [7] Li Hongshuang, Lü Zhenzhou, Yuan Xiukai. Nataf transformation based point estimate method[J]. Chinese Science Bulletin, 2008, 53(17):2586-2592.
- [8] Gerstner T, Griebel M. Numerical integration using sparse grids [J]. Number Algorithms, 1998, 18(01):209-232.
- [9] Novak E, Ritter K. High dimensional integration of smooth functions over cubes[J]. Numerische Mathematik, 1996, 75(1):79-97.
- [10] Klimke A. Sparse grid interpolation toolbox—User's guide[R]. IANS Report 2006/001, 2006.
- [11] Barthelmann V, Novak E, Ritter K. High dimensional polynomial interpolation on sparse grid [J]. Advances in Computational Mathematics, 2000, 12(4):273-288.
- [12] Xiu D B, Jan S H. High-order collocation methods for differential equations with random inputs[J]. SIAM Journal on Scientific Computing, 2005, 27(3): 1118-1139.
- [13] 李璐祎,吕震宙. 基本变量区域重要性测度及其稀疏网格解[J]. 力学学报, 2013, 45(4):569-579.
- Li Luyi, Lü Zhenzhou. Regional importance measure of the basic variable and its sparse grid solution[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2013, 45(4):569-579.
- [14] Mohsen R, Mahmoud M. A new efficient simulation method to approximate the probability of failure and most probable point[J]. Structural Safety, 2012, 39(4):22-29.
- [15] Luo Xiaopeng, Lü Zhenzhou, Xu Xin. Reproducing kernel technique for high dimensional model representations (HDMR)[J]. Computer Physics Communications, 2014, 185(12):3099-3108.
- [16] Xiong Fenfen, Greene S, Wei Chen, et al. A new sparse grid based method for uncertainty propagation [J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2010, 41(3):335-349.
- [17] Zhao Yangang, Ono T. Moment methods for structural reliability[J]. Structural Safety, 2001, 23(1): 47-75.
- [18] Zhao Yangang, Ono T. On the problems of the fourth moment method[J]. Structural Safety, 2004, 26(3): 343-347.
- [19] Zhao Yangang, Lu Zhaohui. Applicable range of the fourth-moment method for structural reliability[J]. Journal of Asian Architecture and Building Engineering, 2007, 6(1):151-158.
- [20] Zhao Yangang, Alfredo H S, Ang H M. System reliability assessment by method of moments[J]. Journal of Structural Engineering, 2003, 129(10):1341-1349.
- [21] Hong H P. Point-estimate moment-based reliability analysis[J]. Civil Engineering System, 1996, 13(4): 281-294.