

DOI:10.16356/j.1005-2615.2016.05.005

## 基于失真度评估的时变聚焦多波束形成算法

窦法旺 夏伟杰 金雪

(南京航空航天大学电子信息工程学院,南京,210016)

**摘要:**为了在保证声呐成像质量的前提下,缓解近场聚焦精度与计算复杂度之间的矛盾,文中提出了一种基于失真度评估的时变聚焦多波束形成算法。首先,建立近场时变聚焦模型,将聚焦点的时间结构和半圆形阵列的空间结构联系起来,获得了各个聚焦点精确的延时信息;其次,在兼顾波束方向图的各项性能指标的基础上,利用二阶锥规划(Second-order cone programming, SOCP)方法设计了各个聚焦点的最优权值;最后,构建散焦波束失真度的评估模型,并在失真度阈值的约束下,合理地选择了几个必要的聚焦面。仿真和测试结果表明,该算法减轻了硬件计算和存储的压力,提高了工程的可实现性,而且对复杂多变的探测场景取得了很好的成像效果。

**关键词:**多波束形成;失真度评估;时变聚焦;二阶锥规划

**中图分类号:**TN911.72 **文献标志码:**A **文章编号:**1005-2615(2016)05-0642-07

## Time-Varying Focused Multi-beam Forming Algorithm Based on Distortion Evaluating

*Dou Fawang, Xia Weijie, Jin Xue*

(College of Electronic and Information Engineering, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics,  
Nanjing, 210016, China)

**Abstract:** On the premise of guaranteeing the image quality of imaging sonar and alleviating the contradiction between focused precision and computational complexity, a time-varying focused multi-beam forming method based on distortion evaluating is proposed. Firstly, the focal points of time structure are combined with the spatial structure of semicircular array to obtain accurate phase information of all focused points through near-field time-varying focus model. Then the optimal weights are designed by using second-order cone programming(SOCP), which balances various performance indicators of beam pattern. Finally, some necessary focused planes are selected by a kind of evaluation model, which is established to evaluate the degree of beam distortion. The simulation and experimental results show that computation and storage requirements are alleviated, engineering application can be realized easily, and high image quality can be achieved for complex and changeable scenes by the method.

**Key words:** multi-beam forming; distortion evaluating; time-varying focus; second-order cone programming

海洋安全与开发、堤坝缺陷检测等国防和国民经济领域的重大需求,使得水下声呐成像技术日渐

**基金项目:**江苏省高校优势学科建设工程资助项目;江苏省产学研联合创新资金(BY2014003-14)资助项目。

**收稿日期:**2016-02-02;**修订日期:**2016-04-09

**通信作者:**夏伟杰,男,副教授,E-mail: nuaaxwj@nuaa.edu.cn。

**引用格式:**窦法旺,夏伟杰,金雪.基于失真度评估的时变聚焦多波束形成算法[J].南京航空航天大学学报,2016,48(4):642-648. Dou Fawang, Xia Weijie, Jin Xue. Time-varying focused multi-beam forming algorithm based on distortion evaluating[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2016, 48(4): 642-648.

受到重视<sup>[1-2]</sup>。声呐成像质量与聚焦精度密切相关,但是目前关于聚焦波束形成的研究大多集中在目标检测、语音提取和医学超声成像等方面<sup>[3-4]</sup>,针对水下声呐成像的研究较少。传统的多波束成像声呐多采常规波束形成技术<sup>[5]</sup>,虽然算法复杂度小,但是探测时无法动态调整权值进行实时聚焦,不能满足对复杂多样的场景精细成像的要求。自适应波束形成技术<sup>[6-7]</sup>虽然可以自动调节本身的参数以适应周围环境的变化,但是算法复杂度较高,稳健性能较差,不能满足对探测场景进行实时、稳定成像的要求。对于成像波束的优化设计,文献[8]中选择余弦平方加权来形成波束,虽然波束的主瓣较窄,但是第一旁瓣电平很高,而且无法动态控制旁瓣等级,灵活性差。文献[9]中选择切比雪夫加权,虽然能够灵活调整旁瓣等级,但是传统的切比雪夫加权针对标准线阵设计,应用到不规则阵列上时,无法达到完全等旁瓣的效果。文献[10]指出可以通过数学推导将波束优化设计问题转化为二阶锥规划(Second-order cone programming, SOCP)的标准形式,但是仅仅给出了不均匀线阵在远场条件下的波束设计结果。文献[11~13]针对不同问题提出了基于凸优化的恒定束宽的波束设计方法,虽然适用于任意形状阵列,但是求解问题的表述过于繁杂,不便于理解与计算。实际情况中,成像声呐经常工作在近场区域,如果用远场条件下的波束形成器接收近场信号,波束指向性能将会退化,严重情况下会导致声呐图像的畸变。由于排布阵元的载体存在遮挡效应,并不是所有的阵元都能全向接收信号。为了得到高质量的声呐图像,还需要保证多波束之间的均匀性和一致性。这些因素都增加了对波束进行优化设计的难度,进而影

响到成像声呐的图像质量。

综合考虑上述因素,本文提出了一种基于失真度评估的时变聚焦多波束形成算法。首先建立了近场时变聚焦模型,将聚焦点的时间结构和半圆形阵列的空间结构联系起来,获得了各个聚焦点精确的延时信息,为波束优化设计奠定基础。其次简要阐述了半圆形阵列子孔径旋转下时变聚焦多波束形成的基本原理。然后在兼顾波束主旁瓣性能及波束数量的基础上,利用 SOCP 方法设计了各个聚焦点的最优权值,并指出了 SOCP 方法设计波束的优点。最后给出了波束的失真度评估准则,研究了散焦波束的失真度随探测距离的变化关系,并在失真度阈值的约束下,合理地选择了几个必需的聚焦面,提高了算法的工程可实现性。

## 1 近场时变聚焦模型

近场波束的指向性是距离的函数,根据聚焦点的位置做近场聚焦校正,这样才能实现对连续大尺度水下目标的精细成像。半圆形阵列的近场条件<sup>[8]</sup>为  $d < (2R)^2 / \lambda$ , 其中  $\lambda$  为发射信号波长,  $R$  为阵列半径。

近场时变聚焦模型如图 1 所示,设回波信号的采样频率为  $f_s$ , 则任意两个采样点之间的时间间隔为  $1/f_s$ 。考虑主动声呐的双程传播和脉冲测距原理,探测场景的第  $n$  个距离单元上的聚焦点  $Q(n, \theta_i)$  相对圆心  $O$  的距离为  $d(n) = nc / (2f_s)$ , 其中  $c$  为水下声速。

根据余弦定理,聚焦点  $Q(n, \theta_i)$  到第  $k$  阵元的距离为

$$r(n, k, \theta_i) = \sqrt{d(n)^2 + R^2 - 2d(n)R\cos(\theta_i - \varphi_k)} \quad (1)$$

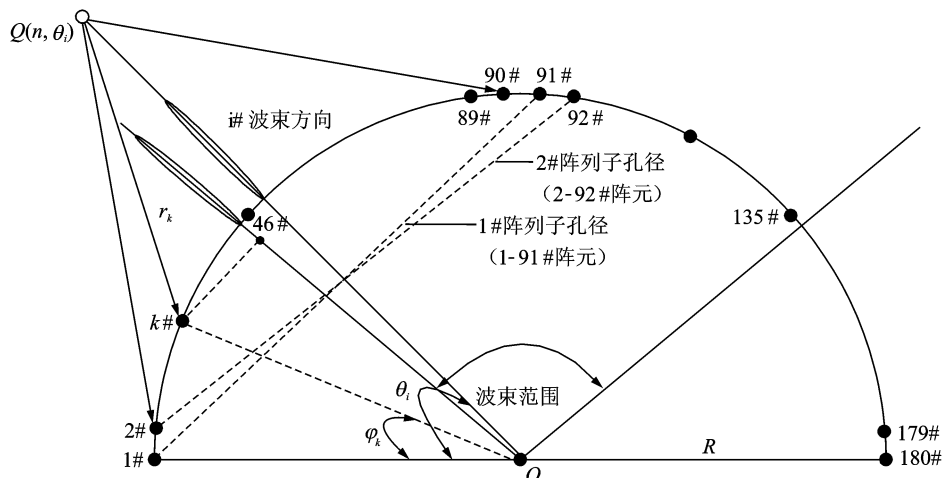


图 1 近场时变聚焦模型

Fig. 1 Near-field time-varying focus model

式中:  $M$  为阵元总数;  $\theta_i$  为波束预成方向;  $\varphi_k = (k-1)\pi/(M-1)$  为第  $k$  阵元对应的圆心角。将式(1)对  $R$  在 0 点处进行泰勒级数展开, 可得

$$r(n, k, \theta_i) = d(n) - R \cos(\theta_i - \varphi_k) + \frac{R^2 \sin^2(\theta_i - \varphi_k)}{2d(n)}$$

第  $k$  阵元相对阵列圆心  $O$  的延时

$$\tau(n, k, \theta_i) = \frac{d(n) - r(n, k, \theta_i)}{c} = \frac{R \cos(\theta_i - \varphi_k)}{c} - \frac{R^2 \sin^2(\theta_i - \varphi_k)}{2d(n)c}$$

精确的阵列流形矩阵为

$$\mathbf{A} = [a(n, \theta_1), a(n, \theta_2), \dots, a(n, \theta_K)] \quad (2)$$

式中:  $\mathbf{a}(n, \theta_i) = [\exp(-j2\pi f_0 \tau(n, k, \theta_i))]^H (k=1, \dots, 91)$  为导向矢量;  $N=91$  为形成波束的阵元数, 即阵列子孔径的阵元数;  $f_0$  为发射信号频率;  $K$  为入射信号数。半圆形阵列的近场球面波信号可用矩阵描述为  $\mathbf{x}(n) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{s}(n) + \mathbf{v}(n)$ , 其中  $\mathbf{s}(n)$  为入射信号幅度,  $\mathbf{v}(n)$  为加性高斯白噪声。在探测场景的第  $n$  个距离单元上,  $\theta_i$  方向的波束输出为

$$y(n) = \mathbf{w}^H(n, \theta_i) \cdot \mathbf{x}(n) \quad (3)$$

式中:  $\mathbf{w}(n, \theta_i)$  为第  $n$  个距离单元上指向  $\theta_i$  方向的聚焦权值。

同理, 在探测场景的第  $n+1$  个距离单元上形成  $\theta_i$  方向的波束时, 聚焦点移到  $Q(n+1, \theta_i)$ , 聚焦距离变为  $d(n+1) = (n+1)c/(2f_s)$ 。重复上述步骤, 即可得波束输出为

$$y(n+1) = \mathbf{w}^H(n+1, \theta_i) \cdot \mathbf{x}(n+1)$$

此外, 利用半圆形阵列子孔径旋转的方式形成波束<sup>[14]</sup>, 可以大大减少聚焦点个数。对于 180 阵元的均匀半圆形阵列, 用 1~91 阵元形成 1~6 号波束, 保持权值系数不变, 用 2~92 阵元形成 7~12 号波束, 以此类推, 子孔径旋转 90 次后, 仅用 6 组权值即可形成 540 个波束, 同时保证了成像多波束之间的均匀性。

## 2 波束优化设计

为了满足半圆形阵列的近场高精度成像要求, 本文给出了设计兼顾波束各项性能的最优权值的方法。首先通过近场时变聚焦模型可以得到各个距离单元上包含精确延时信息的导向矢量  $\mathbf{a}(\theta)$ , 则波束的空间指向性函数为  $\mathbf{g}(\theta) = \mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta)$ 。其次将波束优化设计问题看作多目标优化问题<sup>[12]</sup>, 并转化为 SOCP 的标准形式。利用基于 MATLAB 的 SeDuMi 工具箱求解, 得到适于成像的最优权值。波束方向图的综合设计主要包括波束指向的

控制、主瓣宽度约束、旁瓣等级约束、零陷约束、权值范数约束等, 下面给出波束优化的统一表达式

$$\mathbf{w} = \underset{\mathbf{w}}{\operatorname{argmin}} \xi_i \quad (4)$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} \mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta_0) = 1 \\ \|\mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta_{ML}) - g_d(\theta_{ML})\|_2 \leq \xi_1 \\ \|\mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta_{SL})\|_\infty \leq \xi_2 \\ \|\mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta_{NL})\|_\infty \leq \xi_3 \\ \|\mathbf{w}\|_2 \leq \xi_4 \end{cases}$$

式中:  $\theta_0$  为波束预成方向;  $\theta_{ML}$  为波束主瓣方向;  $\theta_{SL}$  为波束旁瓣方位;  $\theta_{NL}$  为波束零陷方位;  $g_d(\theta_{ML})$  为期望波束的主瓣;  $\xi_i (i=1, 2, 3, 4)$  为附加的约束。式(4)满足二阶锥规划的标准形式, 可以用 SOCP 方法求解波束设计的优化权值  $\mathbf{w}$ 。

成像波束的指向控制影响目标方位的测量, 主瓣宽度约束影响声呐图像的方位分辨率, 旁瓣等级约束影响探测时的虚警概率, 权值范数约束影响阵列对白噪声的输出增益, 零陷方向约束决定对干扰方向的抑制能力, 波束优化设计的主要问题在于权衡波束的各项性能指标以得到折中的最优权值。SOCP 方法优化波束的优势主要体现在以下几个方面: (1) 设计过程仅与导向矢量  $\mathbf{a}(\theta)$  有关而对阵列形状没有要求, 非常适用在不规则阵列以及近场模型中; (2) 波束设计过程与回波数据的接收相互独立, 因此形成的波束具有较高的稳健性, 有利于声呐稳定地成像显示; (3) 设计不同指向的波束时, 能使得多波束之间保持较高的一致性, 有利于提高声呐图像的精度; (4) 通过调整约束条件可以设计出不同主旁瓣性能的波束, 具有很强的灵活性。

## 3 波束失真度评估

多波束成像声呐通常具有较高的距离分辨率, 如果近场范围的每个距离单元上都进行聚焦校正, 聚焦面将多达上百个, 聚焦权值将高达上千组。工程实现时的计算量和存储量都无法容忍这么多的权值系数, 所以必须要适当减少聚焦面的数量。但是声呐的近场成像质量又与波束的聚焦精度密切相关, 所以为了缓解计算和存储的压力, 需要在保证成像精度的前提下, 合理地选择聚焦面。为了快速准确地找到必要的聚焦面, 本文建立了波束失真度的评估模型, 以当前波束与理想的聚焦波束之间的相对误差作为波束失真程度的度量, 给出第  $n$  个距离单元上的波束失真度的定义, 即

$$\delta(n) = \frac{\|g(n, \theta) - g_d(\theta)\|_2^2}{\|g_d(\theta)\|_2^2}$$

$$\frac{\|w^H(n)a(\theta) - w_d^H a(\theta)\|_2}{\|w_d^H a(\theta)\|_2} \quad (5)$$

式中:  $g(n, \theta)$  为当前距离单元上的波束指向性函数;  $g_d(\theta)$  为理想的聚焦波束指向性函数;  $w_d$  为聚焦权值;  $w(n)$  为当前使用的加权。

多波束成像声呐一般采用脉冲测距与波束形成定位相结合的方法实现目标场景的定距定位显示。时变聚焦波束形成及成像流程如下;首先通过脉冲测距方法得到目标场景的距离信息,进而得到精确的延时信息和导向矢量;然后利用波束失真度评估准则得到各个聚焦面位置;最后采用 SOCP 方法设计得到聚焦权值用于波束形成,得到目标场景的方位信息。聚焦波束形成的过程中,如果当前波束与理想波束的失真度大于选取的阈值  $T$ , 输出聚焦距离  $d_i$ , 同时更新权值进行实时聚焦, 否则继续使用上一组权值, 流程如图 2 所示。

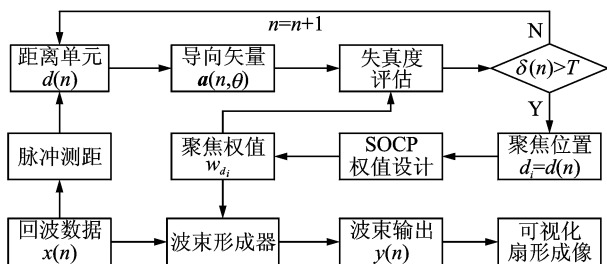


图 2 时变聚焦波束形成流程图

Fig. 2 Time-varying focused beam-forming processing

### 4 仿真与测试结果及分析

为了验证本文算法的可行性,进行如下仿真。参数选择为均匀半圆阵的阵元数  $M=180$ , 阵列半径  $R=0.12$  m, 子孔径阵元数  $N=91$ , 工作频率  $f_0=450$  kHz, 水下声速  $c=1500$  m/s, 最大探测距离  $D=100$  m, 距离分辨率  $\Delta d=2.5$  cm, 远、近场分界距离  $d=17.28$  m。由于本文研究的多波束成像声呐存在 1 m 的视野盲区, 根据工程经验将聚焦面的初始位置选择在  $d_1=1.05$  m 处, 散焦波束的失真度阈值选择为  $T=0.01$ 。以上仿真参数为课题组研发的一款多波束成像声呐的实际参数<sup>[14]</sup>。

#### 仿真 1: 散焦波束失真度仿真

图 3 给出了不同阵元入射信号的延时变化曲线。表 1 给出了在失真度阈值约束下, 聚焦面的分级选择情况, 选择流程如图 2 所示。

图 4 给出了近场波束在未聚焦、全聚焦和时变分级聚焦情况下失真度随探测距离的变化曲线。

其中未聚焦是指远场近似波束对近场区域进行成像, 全聚焦是指在近场范围的各个距离单元上都聚焦, 时变分级聚焦是指仅在表 1 选择的几个聚焦面上进行聚焦。

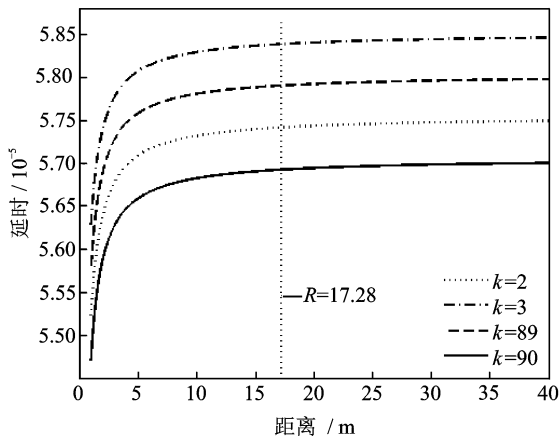


图 3 入射信号的延时变化曲线

Fig. 3 Delay change curve of incident signal

表 1 聚焦面分级选择情况

Tab. 1 Hierarchical select of focal planes					
探测距离	聚焦面	探测距离	聚焦面	探测距离	聚焦面
[1.0, 1.1]	1.05	(1.10, 1.35]	1.25	(1.35, 1.70]	1.55
(1.7, 2.2]	1.95	(2.2, 3.2]	2.65	(3.2, 5.5]	4.10
(5.5, 10.5]	7.50	(10.5, 17.3]	14.50	(17.3, 100.00]	60.00

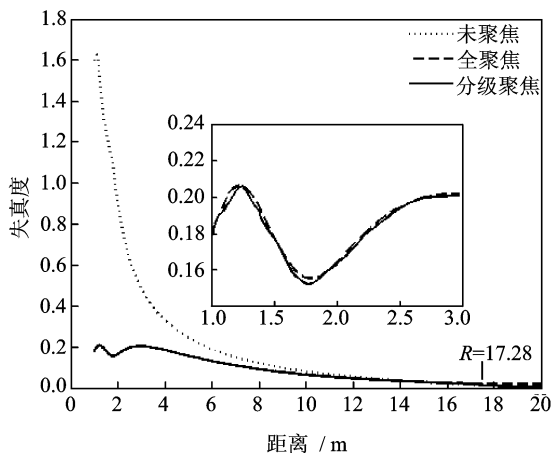


图 4 近场波束的失真度变化曲线

Fig. 4 Change curves of near-field beam distortion

结合图 3, 4 和表 1 可以看出, 通过散焦波束的失真评估模型可以得到 9 个离散的聚焦面。利用这 9 个离散的聚焦距离设计得到的聚焦权值进行时变聚焦波束形成, 其波束失真度曲线能够很好地拟合全聚焦情况下的波束失真度曲线, 而且在近场

条件下,其失真度远小于未聚焦情况下的数值,证明了聚焦面位置选择的正确性以及时变聚焦波束形成的可行性和准确性。

### 仿真2:波束优化设计仿真

图5对比了近场4.1 m处聚焦面上,均匀加权、余弦平方加权、切比雪夫加权和SOCP设计的最优加权情况下的波束方向图。由图5可以看出,在不规则阵列和近场模型下,均匀加权和余弦平方加权虽然波束主瓣较窄,但是第一旁瓣电平很高。选择-30 dB的切比雪夫加权,此时波束失去了等旁瓣效果,而通过SOCP方法设计的权值依然具有完全的等旁瓣控制能力,有利于设计一致性很好的波束用于成像。图6给出了4.1 m处聚焦面上,通过SOCP方法设计的具有不同主旁瓣性能的波束方向图,仿真选择的峰值旁瓣电平(Peak sidelobe level, PSL)分别为-30, -40, -50, -60 dB。由图6可以看出,通过调整约束条件,SOCP设计方法还具有灵活的旁瓣等级控制能力,

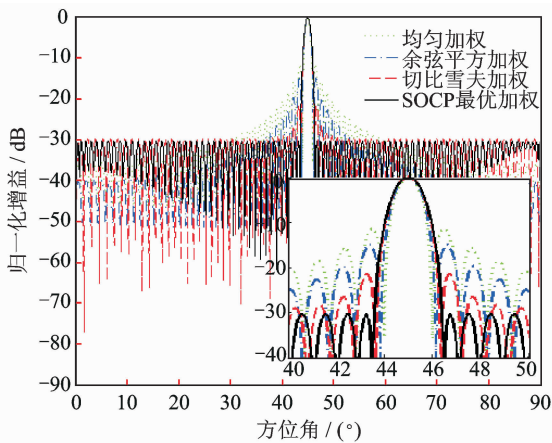


图5 不同聚焦加权的波束

Fig. 5 Beams of different focused weights

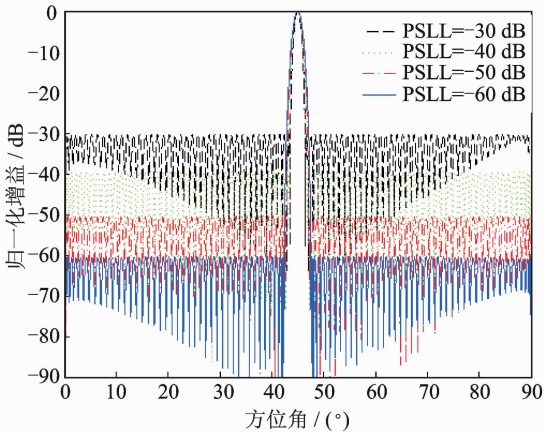


图6 不同主旁瓣性能的波束

Fig. 6 Beams of different performance indicators

为探索图像质量与波束主旁瓣性能之间的关系提供了可能。

### 仿真3:多波束均匀性和一致性仿真

图7给出了4.1 m处聚焦面上的多波束方向图,这里仅选择了指向在 $45^\circ$ 附近的6组聚焦权值形成的波束,其他方向上的波束是在权值不变的情况通过阵列子孔径旋转得到。图8对比了不同聚焦面上的波束指向性能。仿真结果表明,通过SOCP方法设计的最优权值,可以保证每个聚焦面上探测波束的均匀性以及远、近场波束的一致性,满足成像声呐对复杂多变的场景精细成像的要求。

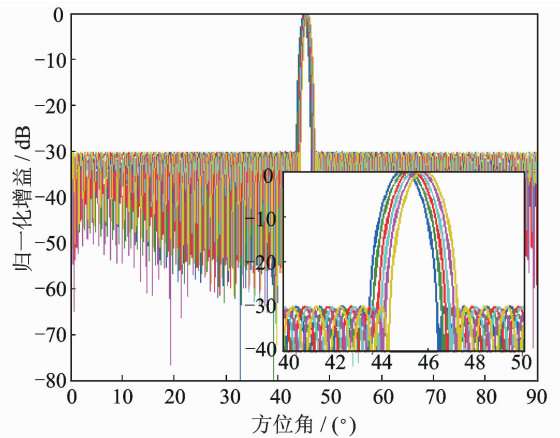


图7 同一聚焦面上的多波束

Fig. 7 Multi-beam of same focal plane

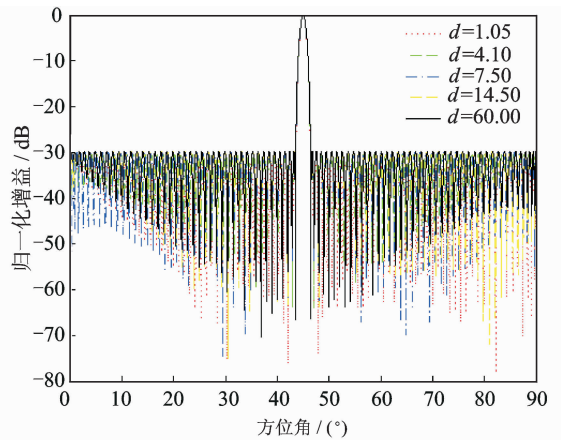


图8 不同聚焦面上的波束

Fig. 8 Beams of different focal planes

为了验证算法的有效性,在消声水池和千岛湖对声呐的成像效果进行了测试,如图9所示。根据声呐的技术指标<sup>[14]</sup>,选择成像波束的旁瓣等级为-30 dB。在消声水池对悬挂的大圆环进行成像,得到轮廓清晰的圆环图像,即使悬挂圆环的绳子也在图像中呈现出来,如图9(a)所示。在游泳池对水

下潜水员进行实时扫描成像,得到了连续清晰的潜水员运动画面,如图 9(b)所示。在千岛湖对堤坝的水下阶梯进行成像,得到了纹理清晰的阶梯图

像,如图 9(c)所示。高质量的实测声呐图像进一步验证了基于失真度评估的时变聚焦多波束形成方法的有效性和实用性。

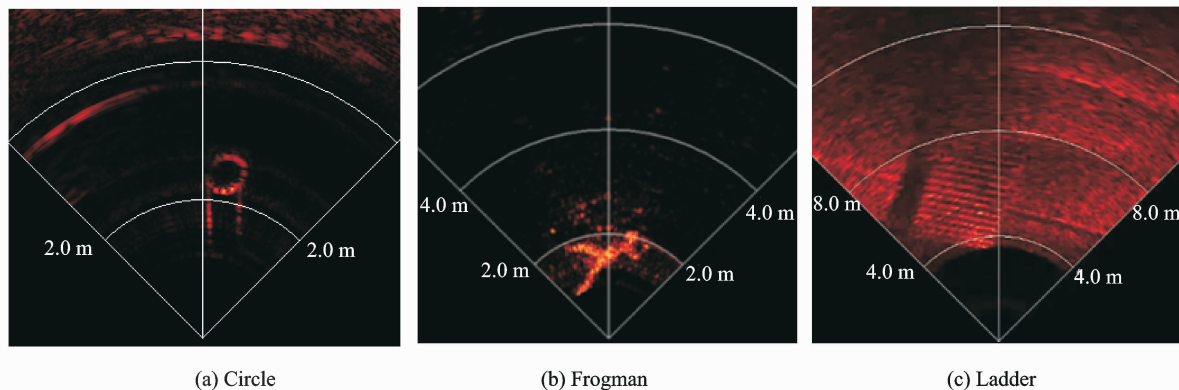


图 9 成像声呐实测图像

Fig. 9 Observed images of imaging sonar

## 5 结 论

为了缓解近场波束的聚焦精度与计算复杂度以及硬件存储量之间的矛盾,本文给出了一种基于失真度评估的时变聚焦多波束形成算法。仿真与实测结果验证了该算法的可行性和有效性。

该算法的优点主要表现在:(1)将聚焦点的时间结构和半圆形阵列的空间结构联系起来,获得了各个聚焦点的精确延时信息;(2)利用半圆形阵列子孔径旋转的方式形成多波束,保持了成像多波束之间的均匀性和一致性;(3)采用 SOCP 的方法,在兼顾波束方向图各项性能的同时,实现了不规则阵列和近场模型下最优权值的设计,满足了成像声呐对复杂多样的场景均可精细成像的要求;(4)通过失真度评估模型合理地选择了几个必要的聚焦面,大大降低了计算量和存储需求,提高了算法工程的可实现性。

需要指出的是,波束优化设计过程与阵列的接收数据无关,完全依赖阵列流形,所以没有突破瑞利极限,目标的方位向分辨率仍然受到阵列孔径的限制。

### 参考文献:

- [1] Trees H L V. Optimum waveform estimation[M]// Optimum Array Processing: Part IV of Detection, Estimation, and Modulation Theory. [S. l.]: John Wiley & Sons, Inc, 2002:428-709.
- [2] Trees H L V. Chapter 7. Adaptive beamformers [M]// Optimum Array Processing: Part IV of Detection, Estimation, and Modulation Theory. [S. l.]:

John Wiley & Sons, Inc, 2002:710-916.

- [3] Cruza J F, Camacho J, Serrano-Iribarnegaray L, et al. New method for real-time dynamic focusing through interfaces[J]. Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, IEEE Transactions on, 2013,60(4):739-751.
- [4] Chen P, Tian X, Chen Y. Optimization of the digital near-field beamforming for underwater 3-D sonar imaging system[J]. Instrumentation and Measurement, IEEE Transactions on, 2010, 59(2):415-424.
- [5] Monzingo R A, Haupt R L, Miller T W. Optimum array processing[M]// Introduction to Adaptive Arrays. [S. l.]: IET Digital Library, 2011:81-149.
- [6] 王立兵, 韩宁, 龚文飞. 可用于快速搜索卫星信号的降维空时波束形成算法[J]. 南京航空航天大学学报, 2013,45(3):402-409.  
Wang Libing, Han Ning, Gong Wenfei. Improved reduce-rank space-time adaptive processing beaming algorithm for fast search of satellite signal[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2013,45(3):402-409.
- [7] 黄庆东, 卢光跃, 庞胜利, 等. 基于多级维纳滤波器的树型 WSN 分布式线性约束最小方差波束形成方法[J]. 南京航空航天大学学报, 2015,47(1):52-58.  
Huang Qingdong, Lu Guangyue, Pang Shengli, et al. Multistage wiener filter based distributed LC-MV beamforming method in tree topology WSN[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2015,47(1):52-58.
- [8] 黄慧, 汪飞, 夏伟杰, 等. 成像声呐中多波束形成的 FPGA 工程实现[J]. 单片机与嵌入式系统应用, 2014,14(3):29-32.

- Huang Hui, Wang Fei, Xia Weijie, et al. FPGA implementation of multi-beamforming of imaging sonar [J]. *Microcontrollers & Embedded Systems*, 2014, 14(3):29-32.
- [9] 董璘璘. 基于实测数据的多波束成像声呐系统优化与实现[D]. 南京:南京航空航天大学, 2015.
- Dong Jinjin. Optimization and implementation of multi-beam imaging sonar system based on experimental data [D]. Nanjing: Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2015.
- [10] 陈鹏, 马晓川, 闫晟, 等. 基于二阶锥规划的非均匀线列阵优化波束形成[J]. *电声技术*, 2008, 32(4): 39-43.
- Chen Peng, Ma Xiaochuan, Yan Sheng, et al. Optimum beamforming with constant sidelobe level of nonuniform linear arrays based on second order cone programming[J]. *Electroacoustic Technology*, 2008, 32(4):39-43.
- [11] 鄢社锋, 侯朝焕, 马晓川, 等. 基于凸优化的时域宽带旁瓣控制自适应波束形成[J]. *声学学报*, 2007, 32(1):5-9.
- Yan Shefeng, Hou Chaohuan, Ma Xiaochuan, et al. Convex optimization based adaptive broadband FIR beamforming with sidelobe control[J]. *Acta Acustica*, 2007, 32(1):5-9.
- [12] 范展, 梁国龙. 基于凸优化的最小旁瓣恒定束宽时域宽带波束形成[J]. *电子学报*, 2013, 41(5):943-948.
- Fan Zhan, Liang Guolong. Broadband beamforming with minimum sidelobe and constant beamwidth based on convex optimization[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2013, 41(5):943-948.
- [13] 金伟, 贾维敏, 姚敏立, 等. 一种分解迭代二阶锥规划鲁棒自适应波束形成算法[J]. *电子与信息学报*, 2012, 34(9):2051-2057.
- Jin Wei, Jia Weimin, Yao Minli, et al. A robust adaptive beamforming algorithm using decomposition and iterative second order cone programming [J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2012, 34(9):2051-2057.
- [14] 黄慧. 多波束成像声纳信号处理机的设计与 FPGA 实现[D]. 南京:南京航空航天大学, 2014.
- Huang Hui. Design and implementation of signal processor of multi-beam imaging sonar on FPGA[D]. Nanjing: Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2014.

