

DOI:10.16356/j.1005-2615.2015.03.003

## 社交网络中谣言传播动力学研究

赵洪涌 朱霖河

(南京航空航天大学理学院,南京,211106)

**摘要:**社交网络已成为谣言发酵与传播的主要媒介之一,因此有必要研究谣言在社交网络上的传播规律。本文结合时空滞后、空间扩散、媒体报道等因素对社交网络中谣言传播的影响,建立新的社交网络谣言时空传播模型。利用偏泛函微分方程理论,给出模型的稳定性以及发生 Hopf 分岔的判别条件。数值仿真显示时滞可以影响模型的收敛速度及改变模型的稳定性,同时,媒体对社交网络谣言的深度报道可以极大地减小网络中谣言传播者密度,并扩大系统的稳定区域。最后,给出一些社交网络谣言传播控制策略。

**关键词:**社交网络;谣言传播;媒体报道;稳定性;Hopf 分岔

**中图分类号:**O193      **文献标志码:**A      **文章编号:**1005-2615(2015)03-0332-11

## Research on Rumor Spreading Dynamics in Social Networks

Zhao Hongyong, Zhu Linhe

(College of Science, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing, 211106, China)

**Abstract:** Social networks have been developed into one of the most important media for rumor fermentation and propagation, and it is necessary to disclose how the rumor spreads in social networks. Combined with the imports of spatial-temporal delay, spatial diffusion and media coverage, a new delayed reaction-diffusion rumor spreading model is developed. Applying the theory of partial functional differential equation, some stability and Hopf bifurcation conditions are given for the model. Examples are given to validate that delay can influence the convergence rate and the stability of the model, and media coverage benefits to reduce the density of rumor spreaders and expands the stability domain. Finally, some useful strategies for rumor spreading control in social networks are presented.

**Key words:** social networks; rumor spreading; media coverage; stability; Hopf bifurcation

随着互联网技术的迅猛发展,人们获取信息的方式和途径正在悄然地发生改变。互联网时代造就了“指尖上的信息”,社交网络作为一种新的提供信息扩散及建立社交关系的平台正逐步成为人们所关注的热点话题<sup>[1-4]</sup>。在国外,全球最大的社交网络 Facebook 的月活跃用户数已达到 12.8 亿,更有超过 10 亿数量的用户通过移动终端进行登录;在国内,新浪微博、人人网、腾讯 QQ、微信等注册

人数也呈现逐年快速上升的趋势。区别于以往的大多数通过口口相传的信息传播方式及传统的 Web1.0 网络信息传播模式,社交网络的灵活便捷性与网络开放性大大促进了信息的传播速度,同时由于网络成本的低廉性也促使了更多的人群利用社交网络进行信息交换、信息共享、商业洽谈等。然而,社交网络给人们进行信息传递带来方便快捷的同时,也给保护信息安全及维护社交网络良好的

**基金项目:**国家自然科学基金(61174155)资助项目;江苏省“青蓝工程”基金资助项目。

**收稿日期:**2015-03-04;**修订日期:**2015-04-23

**作者简介:**赵洪涌,男,教授,博士生导师,长期从事网络动力学、种群动力学及神经网络理论等方面的研究,先后在国内外著名学术期刊上发表高水平学术论文 80 余篇,其中被 SCI 检索系统收录 50 篇,在 SCI 期刊被他引近千次。

**通信作者:**赵洪涌,E-mail:hongyongz@126.com。

舆论环境带来了巨大的挑战。众所周知,由于社交网络对于虚拟人群的约束较少,这大大削弱了网络中各类信息的确信性和可靠性。尤其是一些关于国家发展、社会生活及个人利益的敏感信息、丑闻信息或谣言信息等,在经过社交网络媒介的发酵之后,可迅速成为网络突发事件,由此引起的巨大负面效应给社会稳定与和谐带来的危害往往让人猝不及防。例如,2011年通过社交网络进行谣言扩散而导致的发生在我国沿海大部分地区的抢盐风暴事件,极大地影响了正常的社会秩序;又如2012年2月21日,网友“米朵麻麻”通过微博发布了“今天去打预防针,医生说252医院封了,出现了非典变异病毒,真是吓人”的虚假信息,该微博迅速在网络上传播,引起了各方的极度恐慌。事实上,随着当今网络信息全球化进程的加速和网络科技的高速发展,目前社交网络中谣言跨地域性的传播速度比历史上任何时候都要快,世界上任何一个地方发生的突发事件而产生的谣言信息,在仅仅几个小时内就可以传播到其他地方,并产生极大的危害,严重地破坏社会秩序。因此,如何定性和定量地揭示社交网络中谣言等有害信息的内在传播规律,怎样保持当前不断遭受谣言侵蚀的网络系统的平稳安全运行,政府和媒体等部门应该为此制定哪些可行的防范和控制措施,这些问题都是迫切需要去思考和解决的关键问题。

由于数学模型的高度抽象性、严密的逻辑性和应用的广泛性,它对谣言传播过程的描述是直观的,并能精确地、深层次地反映和揭示谣言等有害信息的内在传播规律,因此,基于数学模型研究谣言传播已受到学者的广泛关注<sup>[5-11]</sup>。经典的谣言传播模型理论研究起源于20世纪60年代。1965年,Dalay和Kendall<sup>[12]</sup>提出了谣言传播的数学模型,后来的学者以Dalay和Kendall的名字命名该模型为DK模型。DK模型实际上是借助随机过程来分析谣言传播机理,它把人群按照谣言传播效果分成谣言易染类人群、谣言感染类人群及谣言移出类人群3大类,并假设其中两类人之间的相互转换关系满足某种数学上的概率分布。1973年,Maki和Thompson<sup>[13]</sup>对DK模型的传播机制进行了修改,认为谣言是通过传播者与人群中其他人的双向接触进行传播的,并由此得到了新的著名的Maki-Thompson谣言传播模型。由于谣言的形成及传播是一个典型的社会复杂系统演化过程,具有复杂系统理论所认为的一切复杂系统特征,所以考虑网络拓扑结构对谣言传播的影响开始得到学者的关

注。2001年,Zanette等<sup>[14]</sup>首次将谣言传播理论推广到复杂网络上,以小世界网络上的谣言传播为例建立了具有网络拓扑结构特性的谣言传播模型。2007年,Nekovee<sup>[15]</sup>等人借助平均场方程理论建立了一个一般性的复杂社交网络上的随机谣言传播模型,作者通过计算拟解析解及数值模拟的方法对比了随机图和无标度网路上的谣言传播阈值的行为特征,认为谣言影响力受到网络拓扑结构和谣言传播率的影响。众所周知,谣言是一种社会现象,更是一种典型的社会群体心理行为。文献<sup>[16]</sup>充分考虑人群具有怀疑特性,同时结合谣言传播的网络拓扑结构,提出了更加符合社会实际情况的具有怀疑机制的SIQR谣言传播模型,并分析了模型的稳定性。2011年,Zhao等人<sup>[17]</sup>研究了博客网上具有遗忘机制的谣言传播模型,并通过数值模拟的方法阐述了群体遗忘率对谣言传播影响。随着各种移动通信设备的迅猛发展,越来越多的网络信息通过移动终端进行传播,考虑到人群的空间移动性带来的网络信息空间扩散传播的特点,利用反应扩散方程建立网络信息传播模型已成为可能。Wang<sup>[18-19]</sup>首次引进“friendship hops”的概念定义信息传播的空间距离,建立了新的基于反应扩散方程的网络信息时空传播模型。Zhao<sup>[20]</sup>等人在Wang的基础上,考虑到谣言传播过程中政府干预的影响,首次提出了具有政府调节控制的反应扩散社交网络谣言传播模型,并分析了模型的稳定性与Hopf分岔行为。然而,迄今为止,还未发现同时结合社交网络谣言传播过程中的时空滞后、空间扩散、媒体报道等因素建立和研究谣言传播模型的相关报道。

在现实世界中,时间滞后现象是普遍存在的。例如,时滞大量存在于传染病模型的研究中,许多文献认为基本疾病传播需要经历一个潜伏期<sup>[21-23]</sup>。谣言传播与传染病传播在传播机理上有很多相似之处。因此,类似于传染病传播,谣言传播同样存在时间滞后性。例如,网络谣言从发布、发酵、传播、调控到消失这一过程中可能存在的时间滞后现象;又如,一个被谣言感染的人群,由于工作学习等原因未能及时将所获得的谣言进行传播,从而导致信息传播的滞后;再如,每个个体由于自身心理因素的不同,他们对某种谣言传播失去兴趣也存在不同程度的滞后因素。由此可见,考虑社交网络谣言传播过程中的时间滞后性是准确分析网络谣言传播机制及建立更加符合实际情况的网络谣言传播模型的基础和关键。

随着网络科技的快速发展,尽管网络信息传播从某种程度上挑战了传统媒体的垄断地位,然而广大网民对传统媒体的新闻报道的可信度仍然很高。因此,媒体报道对有效地控制网络谣言信息传播起到了关键性的作用。一方面,传统媒体的报道可以澄清诸如谣言等不实信息,产生积极的影响。另一方面,媒体的报道可以避免人群对谣言信息的误解和混淆,杜绝给谣言传播者以传播的机会和素材,从而制止和消除谣言的传播。由此可见,充分考虑社交网络谣言传播过程中媒体报道对传播的影响不可忽视,也更加符合实际。

基于以上分析,本文将在已有的关于反应扩散方程网络信息传播模型建模思想的基础上,充分考虑时空滞后、空间扩散、媒体报道等因素对网络谣言传播的影响,建立新的具有媒体报道效应的时滞反应扩散社交网络谣言传播模型。利用偏泛函微分方程稳定性和分岔理论,深入探讨时滞对模型稳定性和 Hopf 分岔的影响,并给出一些简单的易于判别的准则。最后运用数值仿真验证理论分析的准确性,并给出一些切实可行的网络谣言控制的策略建议。

## 1 社交网络谣言时空传播的机理与模型建立

由于谣言在社交网络中的发布、发酵、传播、调控到消失这一过程与传染病的传播、扩散和防治具有很多相似之处,因此现有的大多数谣言传播模型都借鉴了传染病模型的建模思想和研究方法。经典传染病模型的动力学研究中,通常采用“仓室”模型的概念建立疾病传播模型。例如,根据疾病的传播特征和传播环境,利用仓室模型将某地区的人群(或某一种人群)分成疾病易感者(Susceptible)、疾病潜伏者(Latent)、疾病感染者(Infected)、疾病移出者(Recovered)等基本类型,建立 SI、SIS、SIR、SEIR 等传染病传播模型。

本文基于传染病传播模型的基本思想,建立社交网络中谣言传播的动力学模型。首先,根据社交网络中谣言传播的现实背景和传播机制,作如下几点说明:

(1)根据仓室模型方法,主要将社交网络中的人群分成两大类:谣言无知者(Ignorant),表示暂未被感染但有可能即将被谣言感染的人群;谣言传播者(Spreader),表示已被谣言感染且具有继续传播谣言能力的人群。

(2)随着现代移动通讯工具的普及,以及移动

设备快速的更新换代,传统的在固定终端上登陆的社交网络开始向移动设备进行转移,考虑社交网络中人群的空间移动导致的谣言时空传播特性已成为可能,并且具有更加广泛的现实意义。

(3)媒体报道在疾病防控中已得到广泛的应用<sup>[24-26]</sup>,毫无疑问,媒体报道对社交网络谣言的传播同样具有直接的影响,借助传染病模型中研究媒体报道因素影响的方法,考虑媒体报道影响下的社交网络谣言传播模型更加符合实际情形。

(4)在传染病研究中,通常疾病传播需要经过一个潜伏滞后期,考虑到网络谣言从发布、发酵、传播、调控到消失这一过程中同样可能存在时间滞后现象,因此,时滞也是社交网络谣言传播中一个不可或缺的考虑因素。

基于以上分析,建立如下的时滞反应扩散社交网络谣言传播模型

$$\begin{cases} \frac{\partial I(t,x)}{\partial t} = d\Delta I(t,x) + A(1 - P(M(t))) - \beta I(t,x)S(t,x) - \eta I(t,x) \\ \frac{\partial S(t,x)}{\partial t} = d\Delta S(t,x) + \beta I(t,x)S(t,x) - \eta S(t,x) - \gamma S(t-\tau,x) \end{cases} \quad t > 0, x \in \Omega = [0, \pi] \quad (1)$$

纽曼边界条件

$$\frac{\partial I}{\partial \nu}(t,x) = \frac{\partial S}{\partial \nu}(t,x) = 0 \quad t > 0, x \in \partial\Omega \quad (2)$$

初始条件

$$\begin{cases} I(t,x) = I_0(t,x) \geq 0 & (t,x) \in (-\tau, 0] \times \bar{\Omega} \\ S(t,x) = S_0(t,x) \geq 0 & (t,x) \in (-\tau, 0] \times \bar{\Omega} \end{cases} \quad (3)$$

式中:  $I(t,x)$  表示  $t$  时刻  $x$  位置处谣言无知者的密度;  $S(t,x)$  表示  $t$  时刻  $x$  位置处谣言传播者的密度;  $d, A, \beta, \gamma, \eta > 0$  为常数,且  $d$  为谣言的空间扩散能力,  $A$  为网络新增人群密度,  $\beta$  为谣言传播系数,  $\gamma$  为网络中谣言传播者受教育而停止传播的概率,  $\eta$  为人群对网络谣言失去兴趣而停止接受或传播的概率;  $\tau$  表示传播者因受教育而决定停止传播这一过程中的反应时间;  $\Omega$  表示网络区域。纽曼边界条件表示谣言在网络边界处没有流出与流进。

特别地,  $P(M(t))$  表示谣言无知者根据媒体对谣言危害的报道信息及时清醒而不受谣言蒙蔽的概率,根据文献<sup>[24,26]</sup>的研究,这里定义

$$P(M(t)) = \frac{M(t)}{\alpha + M(t)} \quad (4)$$

式中:  $\alpha > 0$  为半饱和系数,刻画媒体报道对谣言传播的影响;  $M(t)$  表示媒体的信息报道量。根据

文献[27,28],取

$$M(t) = \int_{-\infty}^t kS(\theta) \cdot \frac{1}{\tau_1} e^{-(t-\theta)/\tau_1} d\theta \quad (5)$$

式中:  $k$  表示媒体报道系数;  $\tau_1$  刻画媒体对网络谣言传播报道的滞后性。

**注 1** 当谣言传播过程中不存在媒体报道的影响,即  $M(t) = 0$  时,此时网络新增人群将全部作为谣言无知者进入系统,这种情况下增强了谣言持续传播的可能性同时也扩大了谣言传播的危害范围。然而,从引入的概率函数  $P(M(t))$  可知  $\frac{dP(M)}{dM} \geq 0$  且  $\lim_{M \rightarrow \infty} P(M) = 1$ ,这意味着随着媒体报道的力度增大,真正进入网络中的谣言无知者密度会逐渐减少,并且如果媒体报道更加准确可信,则有可能使网络中不存在新进入的谣言无知者。由此可见媒体报道对谣言传播具有重大的影响,并且选取的概率函数也恰好可以近似地反映现实中媒体报道的影响过程。

## 2 谣言传播模型的稳定性与 Hopf 分岔分析

由式(5)计算可得

$$\begin{aligned} I^* &= \frac{\eta + \gamma}{\beta} \\ S^* &= \frac{-(\eta + \gamma)(\alpha\beta + k\eta) + \sqrt{(\eta + \gamma)^2(\alpha\beta - k\eta)^2 + 4Ak\alpha\beta^2(\eta + \gamma)}}{2k\beta(\eta + \gamma)} \\ M^* &= \frac{-(\eta + \gamma)(\alpha\beta + k\eta) + \sqrt{(\eta + \gamma)^2(\alpha\beta - k\eta)^2 + 4Ak\alpha\beta^2(\eta + \gamma)}}{2\beta(\eta + \gamma)} \end{aligned}$$

下面,将重点分析正平衡点  $E^*$  的稳定性和分岔情况。

令  $\bar{I} = I - I^*$ ,  $\bar{S} = S - S^*$ ,  $\bar{M} = M - M^*$ ,为方便起见,用  $I, S, M$  代替  $\bar{I}, \bar{S}, \bar{M}$ ,则式(6)可以写成如下形式

$$\begin{cases} \frac{\partial I}{\partial t} = d\Delta I - (\beta S^* + \eta)I - (\eta + \gamma)S - \frac{\alpha A}{(\alpha + M^*)^2}M + \sum_{i+j+l \geq 2} f^{ijl} I^i S^j M^l \\ \frac{\partial S}{\partial t} = d\Delta S + \beta S^* I + \gamma S - \gamma S(t - \tau) + \beta I S \\ \frac{dM}{dt} = \frac{1}{\tau_1}(kS - M) \end{cases} \quad (7)$$

式中:  $f^{ijl} =$

$$\frac{1}{i! j! l!} \frac{\partial^{i+j+l} f}{\partial I^i(t) \partial S^j(t) \partial M^l(t)} \Big|_{(I^*, S^*, M^*)}$$

$$f = A\left(1 - \frac{M}{\alpha + M}\right) - \beta I S - \eta I$$

$$\frac{dM}{dt} = \frac{1}{\tau_1}(kS - M)$$

从而式(1)可以进一步改写为如下形式

$$\begin{cases} \frac{\partial I(t, x)}{\partial t} = d\Delta I(t, x) + A\left(1 - \frac{M(t)}{\alpha + M(t)}\right) - \beta I(t, x)S(t, x) - \eta I(t, x) \\ \frac{\partial S(t, x)}{\partial t} = d\Delta S(t, x) + \beta I(t, x)S(t, x) - \gamma S(t, x) - \gamma S(t - \tau, x) \\ \frac{dM(t)}{dt} = \frac{1}{\tau_1}(kS(t, x) - M(t)) \\ t > 0, x \in \Omega = [0, \pi] \end{cases} \quad (6)$$

通过简单计算可知,式(6)存在以下两类平衡点:

- (1) 边界平衡点  $E_1 = (\frac{A}{\eta}, 0, 0)^T$ ,此平衡点意味着社交网络中不存在谣言传播的用户。
- (2) 正平衡点  $E^* = (I^*, S^*, M^*)^T$ ,如果条件 (H1)  $A\beta - \eta(\eta + \gamma) > 0$  成立,此平衡点意味着社交网络中同时存在谣言的易感染者与谣言的传播者,其中

从而,式(6)的正平衡点  $E^*$  转化为式(7)的零平衡点  $E^0$ 。

记  $U(t) = (I(t), S(t), M(t))^T = (I(t, \cdot), S(t, \cdot), M(t, \cdot))^T$ ,则式(7)可以进一步写成 Banach 空间  $C = C([- \tau, 0], X)$  中抽象的微分方程

$$\dot{U}(t) = \mathbf{D}\mathbf{A}U(t) + L(U_t) + f(U_t) \quad (8)$$

式中:  $\mathbf{D} = \text{diag}\{d, d, 0\}$ ;  $\mathbf{A} = \text{diag}\{\partial^2/\partial x^2, \partial^2/\partial x^2, \partial^2/\partial x^2\}$ ;  $L: C \rightarrow X, f: C \rightarrow X$ , 并且

$$L(\varphi) = \begin{bmatrix} -(\beta S^* + \eta)\varphi_1(0) - (\eta + \gamma)\varphi_2(0) - \frac{\alpha A}{(\alpha + M^*)^2}\varphi_3(0) \\ \beta S^* \varphi_1(0) + \gamma\varphi_2(0) - \gamma\varphi_2(-\tau_2) \\ \frac{1}{\tau_1}(k\varphi_2(0) - \varphi_3(0)) \end{bmatrix}$$

$$f(\varphi) = \begin{bmatrix} \sum_{i+j+l \geq 2} f^{ijl} \varphi_1^i(0) \varphi_2^j(0) \varphi_3^l(0) \\ \beta\varphi_1(0)\varphi_2(0) \\ 0 \end{bmatrix}$$

其中:  $\boldsymbol{\varphi}(\theta) = U_i(\theta)$ ,  $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)^T \in C$ .

进而, 式(8)在零平衡点  $E^0$  处的线性化系统为

$$\dot{U}(t) = D\boldsymbol{\Delta} U(t) + L(U_i) \quad (9)$$

其特征方程为

$$\lambda y - D\boldsymbol{\Delta} y - L(e^{\lambda \cdot} y) = 0 \quad y \in \text{dom}(\boldsymbol{\Delta}) \quad (10)$$

由泛函微分方程稳定性理论可知, 式(7)零平衡点  $E^0$  的稳定性取决于其特征方程式(10)的根的分布情况。即当式(10)的所有特征根都处于复平面的左半平面时, 式(7)的零平衡点  $E^0$  为局部渐近稳定, 否则, 系统不稳定。

显然, 针对式(6)满足的纽曼边界条件, 易得  $X$  上定义的线性算子  $\boldsymbol{\Delta}$  有特征值  $-n^2$  ( $n \in N_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ ), 相对应的特征向量为

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{Y}_n^T \left[ (\lambda I_3 + Dn^2) - \begin{pmatrix} -\beta S^* - \eta & -\gamma - \eta & -\frac{\alpha A}{(\alpha + M^*)^2} \\ \beta S^* & 0 & 0 \\ 0 & bk & -b \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \beta_n^1 \\ \beta_n^2 \\ \beta_n^3 \end{pmatrix} = 0 \quad (13)$$

式中  $b = \frac{1}{\tau_1}$ 。

则式(7)在零平衡点  $E^0$  处的特征方程可以写为

$$\lambda^3 + [2dn^2 + (\beta S^* + \eta + b - \gamma)]\lambda^2 + [d^2 n^4 + (\beta S^* + \eta + 2b - \gamma)dn^2 + b(\beta S^* + \eta - \gamma) + \eta(\beta S^* - \gamma)]\lambda + b[d^2 n^4 + (\beta S^* + \eta - \gamma)dn^2 + \eta(\beta S^* - \gamma) + \frac{\alpha k A \beta S^*}{(\alpha + M^*)^2}] + \gamma e^{-\lambda \tau} [\lambda^2 + (dn^2 + b + \beta S^* + \eta)\lambda + b(dn^2 + \beta S^* + \eta)] = 0 \quad (14)$$

在这一部分中, 作如下的假设

$$(H2) \quad 4(\beta S^* + \eta)(\beta S^* + \eta + b) - A\beta > 0.$$

**定理 1** 如果式(7)中的参数满足条件 (H1) ~ (H2), 则当  $\tau = 0$  时, 式(7)的零平衡点  $E^0$  是局部渐近稳定的。

**证明** 当  $\tau = 0$  时, 特征方程(14)可以变为

$$\lambda^3 + A_1 \lambda^2 + A_2 \lambda + A_3 = 0 \quad (15)$$

式中

$$A_1 = 2dn^2 + \beta S^* + \eta + b$$

$$A_2 = d^2 n^4 + (\beta S^* + \eta + 2b)dn^2 + \beta S^* (\gamma + \eta) + b(\beta S^* + \eta)$$

$$A_3 = b[d^2 n^4 + (\beta S^* + \eta)dn^2 + \beta S^* (\eta + \gamma) + \frac{\alpha k A \beta S^*}{(\alpha + M^*)^2}]$$

显然,  $A_1 > 0$ ,  $A_2 > 0$  且  $A_3 > 0$ 。

若条件 (H2) 成立, 则

$$A_1 A_2 - A_3 = 2d^3 n^6 + [3(\beta S^* + \eta) + 4b]d^2 n^4 +$$

$\beta_n^1 = (\gamma_n, 0, 0)^T$ ,  $\beta_n^2 = (0, \gamma_n, 0)^T$ ,  $\beta_n^3 = (0, 0, \gamma_n)^T$ , 其中  $\gamma_n = \cos(nx)$ 。因此,  $\beta_n = \{(\beta_n^1, \beta_n^2, \beta_n^3)\}_{n=0}^{\infty}$  组成了相空间  $X$  上的一组基, 所以, 对  $\forall y \in X$  可以写成如下的傅里叶级数展开形式

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{Y}_n^T \begin{pmatrix} \beta_n^1 \\ \beta_n^2 \\ \beta_n^3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y}_n^T = \begin{pmatrix} \langle y, \beta_n^1 \rangle \\ \langle y, \beta_n^2 \rangle \\ \langle y, \beta_n^3 \rangle \end{pmatrix} \quad (11)$$

进一步, 通过一些计算可以得到

$$L(\boldsymbol{\varphi}^T (\beta_n^1, \beta_n^2, \beta_n^3)^T) = L(\boldsymbol{\varphi}^T) (\beta_n^1, \beta_n^2, \beta_n^3)^T \quad n \in N_0 \quad (12)$$

式中  $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)^T \in C[-\tau, 0], X$ 。

从而特征方程(10)等价于

$$\left[ \begin{matrix} -\beta S^* - \eta & -\gamma - \eta & -\frac{\alpha A}{(\alpha + M^*)^2} \\ \beta S^* & 0 & 0 \\ 0 & bk & -b \end{matrix} \right] \begin{pmatrix} \beta_n^1 \\ \beta_n^2 \\ \beta_n^3 \end{pmatrix} = 0 \quad (13)$$

$$[2\beta S^* (\gamma + \eta) + b(\beta S^* + \eta) + (\beta S^* + b + \eta)(\beta S^* + 2b + \eta)]dn^2 + [\beta S^* (\gamma + \eta)(\beta S^* + \eta) + b(\beta S^* + \eta)(\beta S^* + \eta + b) - \frac{\alpha k A \beta S^*}{(\alpha + M^*)^2}] \geq 2d^3 n^6 + [3(\beta S^* + \eta) + 4b]d^2 n^4 + [2\beta S^* (\gamma + \eta) + b(\beta S^* + \eta) + (\beta S^* + b + \eta)(\beta S^* + 2b + \eta)]dn^2 + \{\beta S^* (\gamma + \eta)(\beta S^* + \eta) + \frac{1}{4}b[4(\beta S^* + \eta)(\beta S^* + \eta + b) - A\beta]\} \geq 0.$$

由 Routh-Hurwitz 判据可知, 特征方程(15)的根全部具有负实部。根据稳定性理论知, 式(7)的零平衡点  $E^0$  是渐近稳定的。证毕。

为了考虑时滞对系统稳定性与 Hopf 分岔的影响, 还需作如下的假设:

$$(H3) \quad \beta S^* - 2\gamma > 0$$

$$(H4) \quad A\beta + 4[\beta S^* (\eta - \gamma) - 2\eta\gamma] < 0$$

$$(H5) \quad d^3 - b\beta A - 4\gamma\beta S^* (\gamma + \eta) > 0$$

$$(H6) \quad d^4 - b\beta A (\beta S^* + \eta + b) - 2\gamma^2 [b^2 + (\beta S^* + \eta)^2] > 0$$

令  $\lambda = i\omega$ , 并将其代入特征方程(14)得

$$-i\omega^3 - [2dn^2 + (\beta S^* + \eta + b - \gamma)]\omega^2 + [d^2 n^4 + (\beta S^* + \eta + 2b - \gamma)dn^2 + b(\beta S^* + \eta - \gamma) + \eta(\beta S^* - \gamma)]i\omega + b[d^2 n^4 + (\beta S^* + \eta - \gamma)dn^2 + \eta(\beta S^* - \gamma) + \frac{\alpha k A \beta S^*}{(\alpha + M^*)^2}] + \gamma(\cos\omega\tau - i\sin\omega\tau)[- \omega^2 + i\omega(dn^2 + b + \beta S^* + \eta) + b(dn^2 + \beta S^* + \eta)] = 0 \quad (16)$$

分离实部和虚部可得

$$\begin{cases} \gamma\{-\omega^2 + b(dn^2 + \beta S^* + \eta)\}\cos\omega\tau + (dn^2 + \beta S^* + \eta + b)\omega\sin\omega\tau = \omega^2[2dn^2 + (\beta S^* + \eta + b - \gamma)] - b[d^2n^4 + (\beta S^* + \eta - \gamma)dn^2 + \eta(\beta S^* - \gamma) + \frac{\alpha k A \beta S^*}{(\alpha + M^*)^2}] \\ \gamma\{-[-\omega^2 + b(dn^2 + \beta S^* + \eta)]\sin\omega\tau + (dn^2 + \beta S^* + \eta + b)\omega\cos\omega\tau\} = \omega^3 - \omega[d^2n^4 + (\beta S^* + \eta + 2b - \gamma)dn^2 + b(\beta S^* + \eta - \gamma) + \eta(\beta S^* - \gamma)] \end{cases} \quad (17)$$

进而有

$$\omega^6 + P_{1n}\omega^4 + P_{2n}\omega^2 + P_{3n} = 0 \quad (18)$$

式中:

$$P_{1n} = 2d^2n^4 + 2(\beta S^* + \eta - \gamma)dn^2 + \beta S^*(\beta S^* - 2\gamma) + \eta^2 + b^2;$$

$$P_{2n} = d^4n^8 + 2(\beta S^* + \eta - \gamma)d^3n^6 + [2b^2 + (\beta S^* + \eta)^2 + 2\beta S^*(\eta - \gamma) - 4\gamma\eta]d^2n^4 + [2b^2(\beta S^* + \eta) - 2\gamma^2\beta S^* - 2\gamma\beta\eta S^* - \frac{2bk\alpha A\beta S^*}{(\alpha + M^*)^2} - 2b^2\gamma + 2\eta(\beta S^* - \gamma)(\beta S^* + \eta)]dn^2 + (\beta S^* - \gamma)^2(b^2 + \eta^2) + b^2\eta^2 - \gamma^2[b^2 + (\beta S^* + \eta)^2] - \frac{2bk\alpha A\beta S^*}{(\alpha + M^*)^2}(\beta S^* + \eta + b - \gamma);$$

$$P_{3n} = b^2[d^2n^4 + (\beta S^* + \eta)dn^2 + \beta S^*(\gamma + \eta) + \frac{\alpha k A \beta S^*}{(\alpha + M^*)^2}][d^2n^4 + (\beta S^* + \eta - 2\gamma)dn^2 + \eta(\beta S^* - \gamma) - \gamma(\beta S^* + \eta) + \frac{\alpha k A \beta S^*}{(\alpha + M^*)^2}].$$

**引理 1** 若条件 (H3) ~ (H4) 成立, 则当  $n = 0$  时, 方程 (18) 存在唯一的正根。

**证明** 令

$$h(z) = z^3 + P_{1n}z^2 + P_{2n}z + P_{3n} \quad (19)$$

式中  $z = \omega^2$ 。

显然, 当  $n = 0$  时,  $\lim_{z \rightarrow +\infty} h(z) = +\infty$ , 且

$$h(0) = P_{30} = b^2[\beta S^*(\gamma + \eta) + \frac{\alpha k A \beta S^*}{(\alpha + M^*)^2}] \times [\eta(\beta S^* - \gamma) - \gamma(\beta S^* + \eta) + \frac{\alpha k A \beta S^*}{(\alpha + M^*)^2}] = \frac{b^2}{(\alpha + kS^*)^2}[\beta S^*(\gamma + \eta) + \frac{\alpha k A \beta S^*}{(\alpha + M^*)^2}]\{(\alpha + kS^*)^2[\beta S^*(\eta - \gamma) - 2\gamma\eta] + \alpha k A \beta S^*\}.$$

若条件 (H4) 满足, 则  $(\alpha + kS^*)^2[\beta S^*(\eta - \gamma) - 2\gamma\eta] + \alpha k A \beta S^* < 0$  成立, 从而  $h(0) < 0$ 。

另一方面, 若 (H3) 成立, 则  $P_{10} > 0$ 。根据笛卡尔符号法则可知, 当  $n = 0$  时, 方程 (18) 存在唯一的正根。证毕。

在引理 1 的条件下, 假设方程 (18) 存在唯一的正根  $\omega_0$ , 将其代入式 (17) 计算可得

$$\tau_m = \frac{1}{\omega_0} \arccos\left(\frac{Q_1}{Q_2} + 2m\pi\right) \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (20)$$

式中

$$Q_1 = \gamma\omega_0^4 + [\gamma b^2 + \frac{\alpha b k A \beta S^*}{(\alpha + M^*)^2} - \eta(\beta S^* - \gamma)(\beta S^* + \eta)]\omega_0^2 - b^2(\beta S^* + \eta)[\frac{\alpha k A \beta S^*}{(\alpha + M^*)^2} + \eta(\beta S^* - \gamma)] \\ Q_2 = \gamma\{\omega_0^4 + [b^2 + (\beta S^* + \eta)^2]\omega_0^2 + b^2(\beta S^* + \eta)^2\}$$

**引理 2** 若 (H3) 满足, 此外条件 (H5) ~ (H6) 成立, 则对  $\forall n \geq 1$ , 方程 (18) 不存在任何正根。

**证明** 若条件 (H3) 满足, 易得

$$P_{1n} = 2d^2n^4 + 2(\beta S^* + \eta - \gamma)dn^2 + \beta S^*(\beta S^* - 2\gamma) + \eta^2 + b^2 > 0.$$

若 (H3)(H5)(H6) 成立, 则

$$P_{2n} \geq d^4n^8 + 2(\beta S^* + \eta - \gamma)d^3n^6 + [2b^2 + \eta^2 + 2\eta\beta S^* + (\beta S^* + 2\eta)(\beta S^* - 2\gamma)]d^2n^4 + [2b^2(\beta S^* + \eta - \gamma) - 2\gamma^2\beta S^* - 2\gamma\eta\beta S^* - \frac{1}{2}bA\beta]dn^2 - \gamma^2[b^2 + (\beta S^* + \eta)^2] - \frac{1}{2}bA\beta(\beta S^* + \eta + b) \geq 2(\beta S^* + \eta - \gamma)d^3n^6 + [2b^2 + \eta^2 + 2\eta\beta S^* + (\beta S^* + 2\eta)(\beta S^* - 2\gamma)]d^2n^4 + \frac{1}{2}d[d^3 - bA\beta - 4\gamma(\gamma\beta S^* + \eta\beta S^*)] + \frac{1}{2}\{d^4 - bA\beta(\beta S^* + b + \eta) - 2\gamma^2[b^2 + (\beta S^* + \eta)^2]\} > 0.$$

根据条件 (H6), 通过简单计算可知

$$d^4 - b\beta A(\beta S^* + \eta + b) - 2\gamma^2[b^2 + (\beta S^* + \eta)^2] = [d^2 - \sqrt{2}\gamma(\beta S^* + \eta)][d^2 + \sqrt{2}\gamma(\beta S^* + \eta)] - b\beta A(\beta S^* + \eta + b) - 2\gamma^2b^2 > 0$$

从而  $d^2 - \sqrt{2}\gamma(\beta S^* + \eta) > 0$

进而可以推得  $P_{3n} > 0$ 。

综上, 当条件 (H3) 及 (H5) ~ (H6) 成立时, 对  $\forall n \geq 1$ , 方程 (18) 不存在任何正根。证毕。

**引理 3**<sup>[29]</sup> 假设  $h(\omega_0^2) > 0$ , 这里的函数  $h$  由式 (19) 定义。如果  $\tau = \tau_0$ , 那么  $\pm i\omega_0$  是特征方程 (14) 的一对单重纯虚根。而且

$$\left. \frac{d(\operatorname{Re} \lambda(\tau))}{d\tau} \right|_{\tau=\tau_0, \lambda=i\omega_0} > 0$$

**证明** 证明过程与文献<sup>[29]</sup>类似, 这里不再进行陈述。

**定理 2** 在定理 1 的条件下,若(H3)~(H6)条件成立,且  $h(\omega_0^2) > 0$ , 则

- (1) 当  $\tau \in [0, \tau_0)$  时,式(7)的零平衡点  $E^0$  是局部渐近稳定的;
- (2) 当  $\tau = \tau_0$  时,式(7)发生 Hopf 分岔。也就是说,在  $\tau = \tau_0$  附近,式(7)在零平衡点  $E^0$  处发生周期振荡。这里的  $\tau_0$  由式(20)定义。

### 3 数值仿真分析

#### 3.1 时滞 $\tau$ 对系统的影响

在式(1)中,取参数  $A=0.5, \alpha=0.4, \beta=0.5, \eta=0.1, \gamma=0.2, k=0.3, \tau_1=0.8, d=3$ 。通过简单计算可得定理 2 的条件满足,系统正平衡点  $E^*=(0.600 \ 0, 0.828 \ 1)^T$ , 且临界时滞  $\tau_0=4.127 \ 9$ 。根据定理 2,当  $\tau=3 < \tau_0$  时,系统正平衡点  $E^*$  是局部渐近稳定的(见图 1);当  $\tau=4.13 > \tau_0$  时,系统在正平衡点  $E^*$  处不稳定并产生周期解(见图 2)。

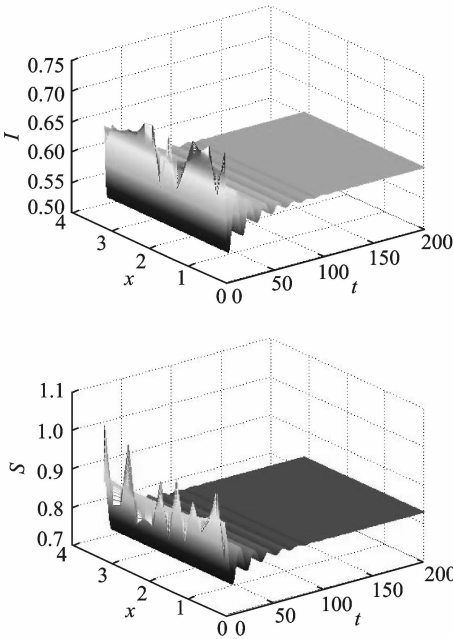


图 1 式(1)在正平衡点  $E^*$  的渐近稳定图

Fig. 1 Locally asymptotically stable images of positive equilibrium point  $E^*$  of system (1)

进一步,在式(1)中保持其他参数不变,分别取  $\tau=1.5, 2.5, 3 < \tau_0$ , 根据定理 2,式(1)的正平衡点  $E^*$  是局部渐近稳定的(见图 3), 并且从图 3 中可以看到,随着时滞的逐渐增大但不超过临界时滞时,系统收敛到正平衡点  $E^*$  的速度逐渐减慢。根据社交网络中谣言传播的背景意义来看,如果网络中谣言传播者因受教育而停止传播需要的反应延迟时间越长,则整个网络中受谣言影响的用户数量

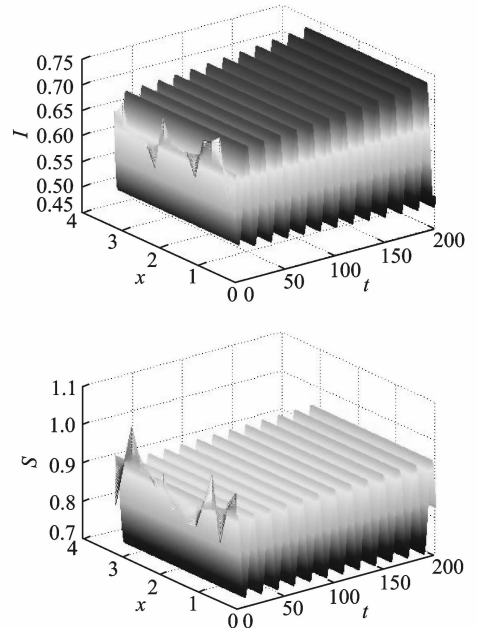


图 2 式(1)在正平衡点  $E^*$  的不稳定图

Fig. 2 Unstable images of positive equilibrium point  $E^*$  of system (1)

密度趋于稳定值的速度越慢;此外,若这样的反应延迟时间超过了网络可以接受的最大临界值,则有可能使网络中受谣言影响的用户数量密度呈现周期波动的现象,从而极大地危害了稳定的网络环境,并可能导致社会突发性危害事件的发生。

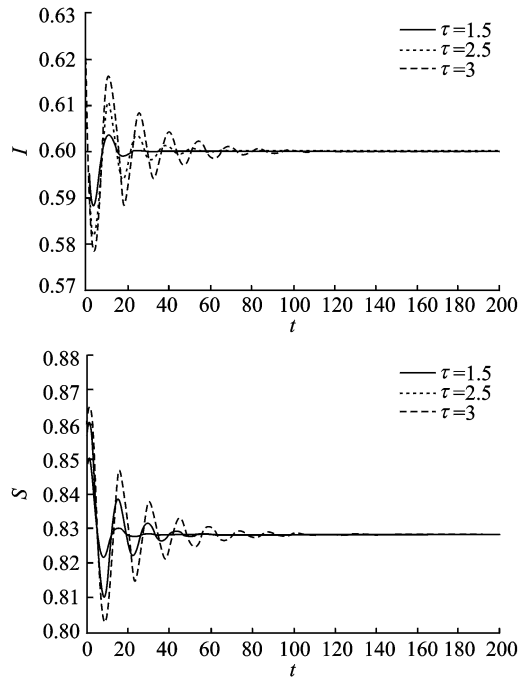


图 3 系统(1)在正平衡点  $E^*$  处收敛速度图

Fig. 3 Convergence rate of positive equilibrium point  $E^*$  of system (1)

### 3.2 媒体报道系数 $k$ 对系统的影响

在式(1)中,取定参数  $A = 0.5, \alpha = 0.4, \beta = 0.5, \eta = 0.1, \gamma = 0.2, d = 3, \tau_1 = 0.8$ , 并保持媒体报道系数  $k$  在区间  $[0, 1]$  上连续变化,通过 Matlab 数值模拟的方法可以得到谣言传播者密度  $S$  随  $k$  变化的曲线图(见图 4)。通过图 4 发现,随着  $k$  的逐渐增大,网络中的谣言传播者密度  $S^*$  逐渐减小。换句话说,若媒体加大谣言传播危害的报道,则可以有效控制谣言传播者的肆意扩散,从而维护良好的网络舆论环境。

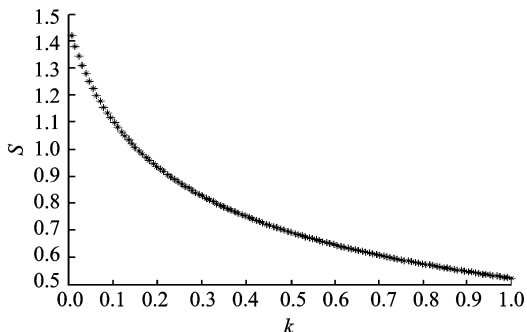


图 4 媒体报道系数  $k$  与谣言传播者密度  $S$  的变化曲线  
Fig. 4 Curve of density of rumor spreaders varying with coefficient  $k$

### 3.3 半饱和系数 $\alpha$ 对系统的影响

在系统(1)中,选定参数  $A = 0.5, k = 0.3, \beta = 0.5, \eta = 0.1, \gamma = 0.2, d = 3, \tau_1 = 0.8$ , 并保持半饱和系数  $\alpha$  在区间  $[0.4, 1]$  上连续变化,显然定理 2 的条件满足。根据定理 2 的结论,容易得到系统发生 Hopf 分岔的临界值与  $\alpha$  的变化关系,即系统稳定域大小随  $\alpha$  增加的变化关系(见图 5)。由图 5 可见,随着半饱和系数  $\alpha$  的逐渐增大,系统稳定域逐渐增大。也就是说,当社交网络中的谣言兴起并肆意传播时,加大媒体报道的力度及媒体报道覆盖的范围可以逐步地增强网络系统的稳定性,从而有效地维护网络信息安全及构建良好的网络舆论环境,切实地促进社会和谐稳定。

### 3.4 谣言传播率 $\beta$ 对系统的影响

对于式(1),选取参数  $A = 0.5, k = 0.3, \alpha = 0.4, \eta = 0.1, \gamma = 0.2, d = 3, \tau_1 = 0.8$ , 并保持谣言传播率  $\beta$  在区间  $[0.1, 1]$  上连续变化。通过简单计算可见,对于给定的参数及  $\forall \beta \in [0.1, 1]$  满足条件(H1)。通过 Matlab 数值模拟的方法可以分别得到谣言易感染者密度  $I$  与谣言传播者密度  $S$  随  $\beta$  变化的曲线图(见图 6,7)。从图 6 中容易发现,谣言传播率  $\beta$  的增大将导致网络中谣言易感染者密度减少;而图 7 则准确地显示,谣言传播率  $\beta$  的

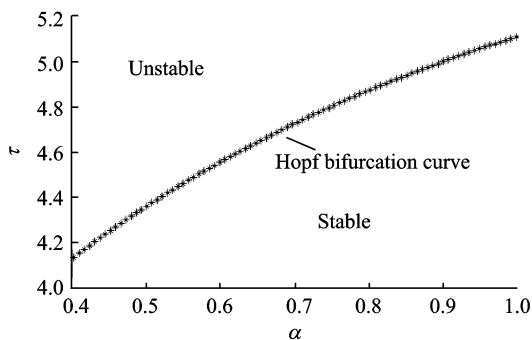


图 5 半饱和系数  $\alpha$  与正平衡点  $E^*$  的稳定区域图  
Fig. 5 Stable region of positive equilibrium point  $E^*$  varying with coefficient  $\alpha$

减小将有利于控制谣言传播者密度的增大。结合社交网络谣言传播的背景,不难发现谣言传播率  $\beta$  的大小变化情况直接影响了网络中各类人群密度的变化情况。

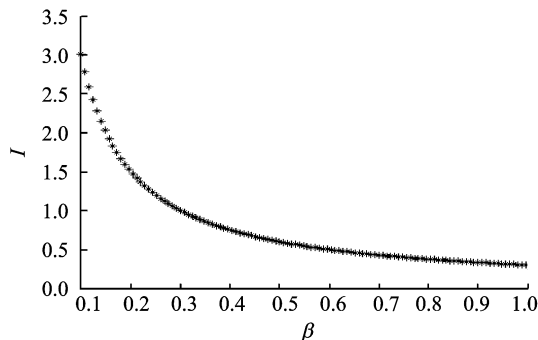


图 6 谣言传播率  $\beta$  与谣言无知者密度  $I$  的关系变化图  
Fig. 6 Curve of density of rumor ignorant users varying with coefficient  $\beta$

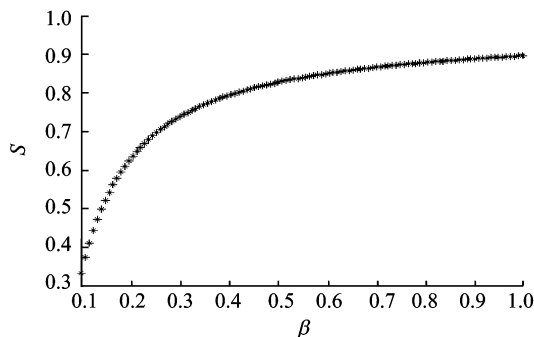


图 7 谣言传播率  $\beta$  与谣言传播者密度  $S$  的关系变化图  
Fig. 7 Curve of density of rumor spreaders varying with coefficient  $\beta$

### 3.5 媒体报道的滞后时间 $\tau_1$ 对系统的影响

对于式(1),考虑参数  $A = 0.5, \alpha = 0.45, \beta = 0.5, \eta = 0.1, \gamma = 0.2, k = 0.3, d = 2$ , 并且  $\tau_1 \in [0.5, 2.5]$ 。通过简单计算可知,定理 2 的条件满足。根据定理 2 的结论,容易得到系统发生 Hopf



分岔的临界值与  $\tau_1$  的变化关系(见图8)。图8显示,当  $\tau_1$  由0.5逐渐增大到2.5时,系统的稳定区域逐渐减小,这意味着在这组参数影响下,媒体报道的延迟滞后时间越长对系统稳定性带来的危害越大。进一步,固定  $\tau = 3.86$ ,其他参数不变,分别取  $\tau_1 = 1$  和  $\tau_1 = 2$ ,显然定理2的条件满足。如图9所示,当  $\tau_1 = 1$  时,式(1)的正平衡点  $E^* = (0.600\ 0, 0.859\ 5)^T$  是局部渐近稳定性的;如图10所示,当  $\tau_1 = 2$  时,式(1)的正平衡点  $E^* = (0.600\ 0, 0.859\ 5)^T$  不稳定并发生周期振荡。由此可见,媒体报道的滞后时间  $\tau_1$  同样可以引起系统正平衡点发生分岔现象。

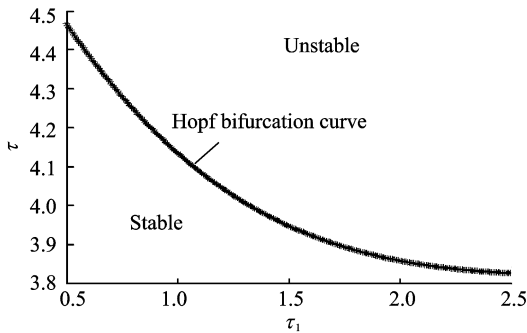


图8 媒体报道的滞后时间  $\tau_1$  与正平衡点  $E^*$  的稳定区域图

Fig. 8 Stable region of positive equilibrium point  $E^*$  varying with delay  $\tau_1$

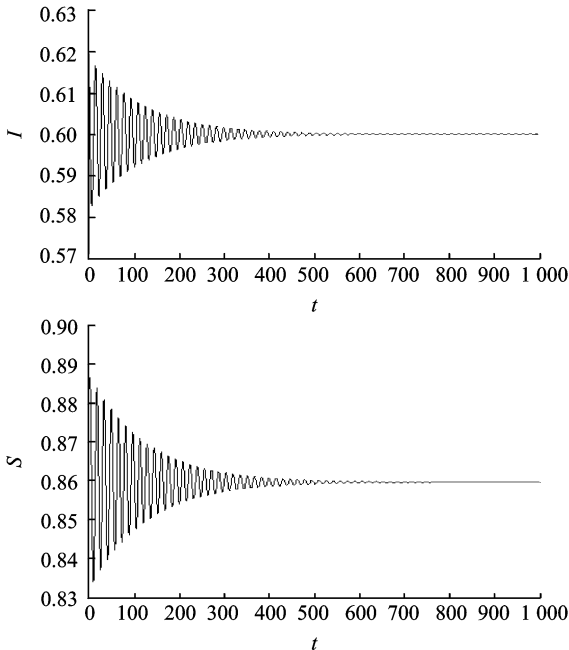


图9 当  $\tau_1 = 1$  时,式(1)在正平衡点  $E^*$  的渐近稳定图  
Fig. 9 Locally asymptotically stable images of positive equilibrium point  $E^*$  of system (1) for  $\tau_1 = 1$

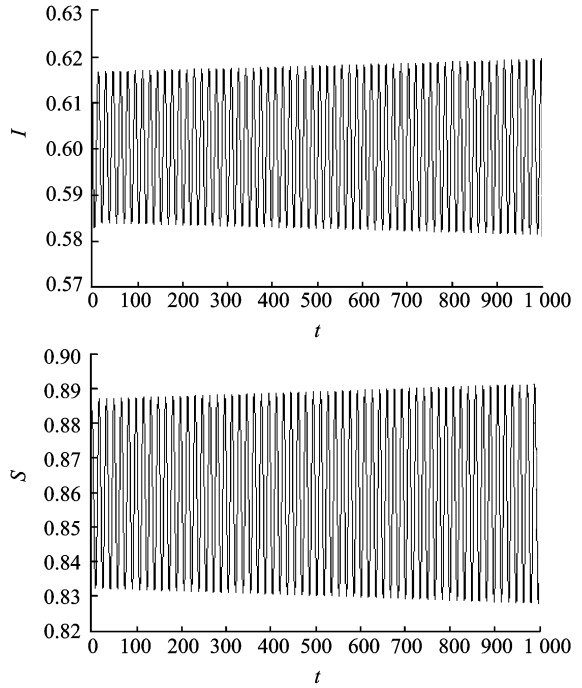


图10 当  $\tau_1 = 2$  时,式(1)在正平衡点  $E^*$  的不稳定图  
Fig. 10 Unstable images of positive equilibrium point  $E^*$  of system (1) for  $\tau_1 = 2$

### 4 社交网络谣言传播控制策略

随着互联网技术的高速发展及网络化生活的普及,社交网络越来越成为谣言发酵和传播的便捷场所,社交网络谣言传播事件污染了网络舆论环境,扰乱了稳定的社会秩序,同时也严重地损害了中国互联网形象和公信力,因此,切实地采取有效措施遏制网络谣言的肆意传播及维护网络信息安全已迫在眉睫。针对本文的理论分析和数值仿真结果,给出几点网络谣言控制的策略建议。

(1)对于社交网络中出现并进一步发酵传播的谣言,媒体需要大力报道谣言传播可能带来的各方面的影响和危害,同时积极寻求相关事实真相,及时纠正和披露谣言等不实信息;此外,媒体要借助自身方便、快捷、公信力高的平台优势,扩大报道的范围,让更多的谣言蒙蔽者可以清醒,停止谣言的传播。由此,通过媒体报道的作用可以有效地减少社交网络中谣言传播者的密度,并逐步增强网络系统稳定性,维护社会稳定繁荣。

(2)政府等管理部门应普及科普知识,提高公民基本素养,同时每个社交网络用户应加强网络信息安全教育,努力提高自身辨识信息真假的能力。基于此,当社交网络中出现谣言传播时,网络用户才会对谣言有一个自己的认识,并快速地做出正确的判断,减小时间延迟效应;关键时刻,对于专家的

辟谣也会更加容易接受和采纳,产生预期的社会效应;同时,这也可以有效地降低谣言的传播率,从而减少社交网络中谣言传播者的密度。

## 5 结束语

本文将社交网络中的用户分为谣言易感染者与谣言传播者两大类人群,并针对时空滞后、空间扩散、媒体报道等诸多因素部分或综合的对社交网络中谣言传播的影响,建立了新的时滞反应扩散社交网络谣言传播模型。利用偏泛函微分方程的稳定性和分岔理论,讨论了时滞对系统正平衡点的稳定性及Hopf分岔的影响情况。进一步,通过Matlab软件进行了数值仿真,实例分析表明:随着时滞的增大,系统收敛速度逐渐变慢,并且当时滞超过某一临界值时,系统出现周期振荡现象;同时,谣言传播率的大小变化情况直接反映了网络中各类人群的密度的变化情况,即谣言传播率越大,则谣言易感者密度越小,谣言传播者密度越大;此外,媒体对社交网络谣言的深度报道可以极大地减小网络中谣言传播者密度,并扩大系统的稳定区域。最后,给出几点切实可行的网络谣言控制的策略建议。

## 参考文献:

- [1] Zheng M H, Lv L Y, Zhao M. Spreading in online social networks: The role of social reinforcement [J]. *Physical Review E*, 2013, 88(1): 012818.
- [2] Zhao J C, Wu J J, Xu K. Weak ties: Subtle role of information diffusion in online social networks [J]. *Physical Review E*, 2010, 82(1): 016105.
- [3] Gallos L K, Rybski F, Liljeros F, et al. How people interact in evolving online affiliation networks [J]. *Physical Review X*, 2012, 2(3): 031014.
- [4] Haerter J O, Jamtveit B, Mathiesen J. Communication dynamics in finite capacity social networks [J]. *Physical Review Letters*, 2012, 109(5): 168701.
- [5] Moreno Y, Nekovee M, Pacheco A F. Dynamics of rumor spreading complex networks [J]. *Physical Review E*, 2004, 69(6): 006130.
- [6] Zhao L J, Wang J J, Huang R B. 2SI2R rumor spreading model in homogenous networks [J]. *Physica A*, 2014, 413(11): 153-161.
- [7] Trepevski D. Model for rumor spreading over networks [J]. *Physical Review E*, 2010, 81(5): 056102.
- [8] Zhou J, Liu Z H, Li B W. Influence of network structure on rumor propagation [J]. *Physics Letters A*, 2007, 368(6): 458-463.
- [9] Zanette D H. Dynamics of rumor propagation on small-world networks [J]. *Physical Review E*, 2002, 65(4): 041908.
- [10] 霍良安, 黄培清. 谚语“谣言止于智者”的定量模型研究[J]. *科技管理研究*, 2014, 32(14): 239-243.  
Huo Liang'an, Huang Peiqing. Study on quantitative model for proverb of "rumor is stopped by the intellect" [J]. *Science and Technology Management Research*, 2014, 32(14): 239-243.
- [11] 霍良安, 黄培清. 基于系统动力学的谣言传播模型研究[J]. *数学的实践与认识*, 2013, 43(16): 1-8.  
Huo Liang'an, Huang Peiqing. Study on rumor propagation models based on dynamical system theory [J]. *Mathematics in Practice and Theory*, 2013, 43(16): 1-8.
- [12] Daley D J, Kendal D G. Stochastic rumors [J]. *Journal of the Institute of Mathematics and its Applications*, 1965(1): 42-55.
- [13] Maki D P, Thompson M. *Mathematical models and applications, with emphasis on social, life, and management sciences* [M]. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1973.
- [14] Zanette D H. Criticality behavior of propagation on small-world networks [J]. *Physical Review E*, 2001, 64(5): 050501.
- [15] Nekovee M, Moreno Y, Bianconi G, et al. Theory of rumor spreading in complex social networks [J]. *Physica A*, 2007, 374(1): 457-470.
- [16] 王筱莉, 赵来军. 社会网络中具有怀疑机制的谣言传播模型 [J]. *上海理工大学学报*, 2012, 34(5): 424-428.  
Wang Xiaoli, Zhao Laijun. Rumor spreading model with skepticism mechanism in social networks [J]. *Journal of University of Shanghai for Science and Technology*, 2012, 34(5): 424-428.
- [17] Zhao L J, Wang Q, Cheng J J, et al. Rumor spreading model with consideration of forgetting mechanism: A case of online blogging LiveJournal [J]. *Physica A*, 2011, 390(13): 2619-2625.
- [18] Wang F, Wang H Y, Xu K. Diffusive logistic model towards predicting information diffusion in online social networks [C]// 32<sup>nd</sup> International Conference on Distributed Computing Systems Workshops (ICDC-SW). Los Alamitos: IEEE Computer Society, 2012: 133-139.

- [19] Wang F, Wang H Y, Xu K, et al. Characterizing information diffusion in online social networks with linear diffusive model [C]// 33<sup>rd</sup> International Conference on Distributed Computing Systems Workshops (ICDCSW). New York:IEEE, 2013: 307-316.
- [20] Zhu L H, Zhao H Y, Wang H Y. Bifurcation and control of a delayed diffusive logistic model in online social networks [C]// 33<sup>rd</sup> Chinese Control Conference (CCC). Piscataway:IEEE, 2014: 2773-2778.
- [21] Zhang T L, Teng Z D. Global behavior and permanence of SIRS epidemic model with time delay [J]. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2008, 9(4): 1409-1424.
- [22] Xu R, Ma Z E. Global stability of a SIR epidemic model with nonlinear incidence rate and time delay [J]. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2009, 10(5): 3175-3189.
- [23] Wang W D. Global behavior of an SEIRS epidemic model with time delays [J]. *Applied Mathematics Letters*, 2002, 15(4): 423-428.
- [24] Cui J A, Tan X, Zhu H P. An SIS infection model incorporating media coverage [J]. *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 2008, 38(15): 1323-1334.
- [25] Cui J A, Sun Y H, Zhu H P. The impact of media on the control of infectious diseases [J]. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 2008, 20(1): 31-53.
- [26] Zhao H T, Lin Y P, Dai Y X. An SIRS epidemic model incorporating media coverage with time delay [J]. *Computational and Mathematical Methods in Medicine*, 2014(1): 680743.
- [27] D'Onofrio A, Manfredi P, Salinelli E. Bifurcation thresholds in an SIR model with information-dependent vaccination [J]. *Mathematical Modelling of Natural Phenomena*, 2007, 2(1): 26-43.
- [28] D'Onofrio A, Manfredi P, Salinelli E. Vaccinating behaviour, information, and the dynamics of SIR vaccine preventable diseases [J]. *Theoretical Population Biology*, 2007, 71(3): 301-317.
- [29] Hu H J, Huang L H. Stability and Hopf bifurcation analysis on a ring of four neurons with delays [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2009, 213(2): 587-599.